Kollektive Flußeffekte in relativistischen Schwerionenkollisionen bei SIS-Energien

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Justus-Liebig-Universität Gießen

Fachbereich 13 – Physik

vorgelegt von
Alexander Hombach

Gießen, 1998

D 26
Dekan: Prof. Dr. Karl-Heinz Schartner
I. Berichterstatter: Prof. Dr. Ulrich Mosel
II. Berichterstatter: Prof. Dr. Werner Scheid
Tag der mündlichen Prüfung: 13. 4. 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In den letzten Jahren wurden im Bereich mittlerer Energien, d. h. von etwa 100 AMeV bis hin zu 2 AGeV Einschußenergie, eine Reihe neuer Schwerionenexperimente durchgeführt. Für die vorliegende Arbeit interessant waren dabei vor allem die an der Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI) in Darmstadt mit den Detektoren FOPI, KaoS und TAPS vorgenommenen Untersuchungen, sowie die am Lawrence Berkeley National Laboratory (LBL) mit dem EOS-Detektor durchgeführten Experimente. Ein wichtiges Resultat, das unter anderem den Anstoß für diese Arbeit und eine Reihe anderer Untersuchungen gab, war dabei die Entdeckung des sogenannten radialen Flusses [1] an der GSI im Jahr 1994, der bereits 1985 von Stock [2] postuliert wurde.

Insbesondere der FOPI-Detektor mit seiner bereits vom Namen her angedeuteten großen geometrischen Akzeptanz von annähernd 4π Raumwinkel erlaubt es, Daten zum Fluß von Nukleonen und Fragmenten mit großer Präzision in vielen Winkelbereichen zu messen. Dies gilt auch für die in einer Schwerionenreaktion produzierten Mesonen, ihre Rapiditätsverteilungen und Spektren.

So entstand im Rahmen dieser Arbeit in Zusammenarbeit mit Stefan Teis [3] und Martin Effenberger [4] eine neue Version des seit 1986 an der Universität Gießen verwendeten Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck-(BUU)-Transportmodells, CBUU. Es stellt eine wesentliche Erweiterung dieses Modells dar. Insbesondere wurden höhere Nukleonenresonanzen und impulsabhängige Nukleonenpotentiale implementiert. Letzteres ist dabei das Hauptthema der vorliegenden Arbeit, die sich demzufolge vor allem mit dem Nukleonenfluß in einer Schwerionenreaktion befaßt, der direkt von der nuklearen Zustandsgleichung abhängt. Ergebnisse zur Teilchenproduktion, die vor allem auf die Parametrisierung der Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnitte sensitiv sind, waren dagegen der wesentliche Aspekt von [3]. Sie werden in dieser Arbeit nur gestreift, soweit neue Daten verfügbar geworden sind und um einige Aspekte der Resonanzdynamik des CBUU-Modells zu diskutieren, die ja mit der Nukleonendynamik in Wechselwirkung steht.

Das BUU-Modell kann man aus den quantenmechanischen Bewegungsgleichungen für ein Fermionensystem ableiten. Es ist jedoch vor allem aus der historischen Entwicklung aus den frühen Kaskadenmodellen zur Beschreibung einer Schwerionenreaktion zu verstehen:

Das Hauptproblem bei der Beschreibung von Schwerionenkollisionen ist die große Anzahl von Teilchen, die miteinander wechselwirken. So beträgt die Nukleonenzahl bei einer Blei-Blei - Kollisionen über 400. Dazu kommen die durch die Reaktion erzeugten Mesonen, die ebenfalls wiederum wechselwirken. Daher hat man sehr früh auf Computermodelle zurückgegriffen, um Schwerionenreaktionen zu beschreiben. Die einfachste Form dieser Modelle stellen die sogenannten Kaskaden-Modelle dar [5]. Hier werden die Teilchen – Nukleonen, Resonanzen und Mesonen – als vollständig frei betrachtet. Das bedeutet, daß die Teilchen wohl miteinander kollidieren, wobei die freien Wirkungsquerschnitte für die Reaktionen angenommen werden, sich zwischen den Kollisionen aber kräftefrei und geradlinig bewegen; eine Art Billard-Ball-Modell. Diese Art von Modellen wird auch noch heute zur Beschreibung von Reaktionen im Hochenergiebereich, wo die kinetische Energie der Teilchen wesentlich größer als das Nukleonenpotential ist, verwendet.

Das BUU-Modell ist eine Erweiterung der Kaskadenmodelle um das mittlere Feld der Nukleonen. Im Kollisionsterm werden die Teilchen weiterhin, abgesehen von den zur Energieerhaltung eingehenden Potentialdifferenzen, als frei betrachtet. Zwischen den Stößen propagieren sie in einem selbstkonsistent berechneten Potential. Dieses Potential ist in seiner einfachsten Form ein lediglich dichteabhängig parametrisiertes Skyrme-Potential.

Mit zunehmender Computerrechenleistung ist es nun möglich geworden, weitere Effekte zu berücksichtigen und das Modell zu verfeinern. So ist aus Nukleon-Kern - Streuexperimenten bekannt, daß das Mittlere-Feld-Potential impulsabhängig ist; dadurch kann man Effekte, die früher als Hinweis auf eine harte Zustandsgleichung gedeutet wurden, mit einer wesentlich weicheren erklären. Diese Impulsabhängigkeit hat in der Parametrisierung von Welke et al. [6] im CBUU-Modell Berücksichtigung gefunden. Darüberhinaus beinhaltet das Modell nun alle Nukleonenresonanzen, deren Existenz gesichert ist, bis hin zu 2 GeV Masse und nimmt auch Elemente des relativistischen BUU-Programms RBUU auf, was zur Beschreibung von Schwerionenkollisionen bis hin zu 2 AGeV Einschußenergie wünschenswert ist. Mit diesen Modifikationen, die mit einer vollständigen Restrukturierung des Programms verbunden wurden, konnte eine deutliche Verbesserung der Beschreibung von Schwerionenreaktionen erreicht werden.

Die Gliederung der vorliegenden Arbeit ist folgende:

In einem ersten Teil werden die Gleichungen des CBUU-Modells hergeleitet und in Grundzügen die numerische Realisierung beschrieben. Auf Details wird nur insoweit eingegangen, wie es zum Verständnis der Diskussionen in den Ergebniskapiteln notwendig ist, alle weitergehenden Informationen finden sich in Anhang A. Größeren Raum nimmt dagegen die Herleitung, Parametrisierung und numerische Implementierung des impulsabhängigen Mittlere-Feld-Potentials ein.

In einem zweiten Teil wird der Zusammenhang zwischen dem Nukleonenpotential und den im Kollisionterm verwendeten Wirkungsquerschnitten untersucht. Das Mittlere-Feld-Potential und die Wirkungsquerschnitte werden im CBUU-Modell aus verschiedenen Quellen gewonnen, entstammen aber eigentlich aus der gleichen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung. Mittels Dispersionsrelationen wird in diesem Teil der Arbeit die Konsistenz der Parametrisierungen überprüft und diskutiert.

Es folgen anschließend einige Kapitel mit Ergebnissen aus Simulationsrechnungen mit dem CBUU-Modell. In Kapitel 4 wird der prinzipielle Ablauf einer Schwerionenkollision dargestellt und im Rahmen dessen die Frage der Projektil/Target-Equilibrierung untersucht, zu der gegenwärtig an der GSI Experimente durchgeführt werden. Kapitel 5 stellt kurz die Ergebnisse zur Mesonenproduktion vor, da hier Aspekte der Resonanzdynamik des CBUU-Modells deutlich werden, die für die Berechnung des transversalen Flusses wichtig sind. Dieser wird in Kapitel 6 behandelt. Aus dem Vergleich der berechneten Flow-Werte mit den experimentellen Daten ergeben sich mögliche Rückschlüsse auf die Nukleonenpotentiale und das Verhalten der Nukleonenresonanzen. Diese werden im Detail diskutiert. Kapitel 7 faßt dann die Ergebnisse der Berechnungen zum radialen Fluß bei sehr zentralen Kollisionsereignissen zusammen.

In Kapitel 8 werden Flußsignale von Fragmenten untersucht. Dazu wurde ein Koaleszenzmodell entwickelt, das aus der CBUU-Nukleonenverteilung am Reaktionsende Cluster bildet. Möglichkeiten und Grenzen dieses Modells bei der Beschreibung der Multiplizitätsverteilung von *intermediate mass fragments* werden diskutiert und anschließend sowohl das transversale wie radiale Flußverhalten der Fragmente im Vergleich zu den experimentellen Daten untersucht.

Es folgen eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse und ein Ausblick.

Kapitel 2

Das CBUU-Modell

Die BUU-Gleichung beschreibt die zeitliche Änderung der Phasenraumdichte $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ der Nukleonen durch Propagation und Kollisionen:

$$\partial_t f(\vec{r}, \vec{p}, t) + \left(\frac{\vec{p}}{E} + \vec{\nabla}_p U(\vec{r}, \vec{p}) \right) \vec{\nabla}_r f - \vec{\nabla}_r U \, \vec{\nabla}_p f \; = \; I_{\text{coll}} \; , \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} I_{\text{coll}} \;\; = \;\; & -\frac{4}{(2\pi)^3} \int d^3p_2 \, d^3p_3 \, d\Omega_4 \times \; \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \qquad (2.2) \\ & \times v_{12} \frac{d\sigma}{d\Omega} \; \Big([f_1 f_2 (1 - f_3)(1 - f_4)] - \; [f_3 f_4 (1 - f_1)(1 - f_2)] \Big) \; . \end{aligned}$$

Der linke Teil von Gleichung (2.1) ist der sogenannte Vlasov- oder Propagationsteil, der die Bewegung der Teilchen in einem mittleren Feld U beschreibt. Das Kollisionsintegral (2.2) gibt die Stöße zwischen den Teilchen wieder.

Die physikalische Bedeutung der BUU-Gleichung erschließt sich am besten durch eine Trennung von Propagations- und Kollisionsteil. Für ersteren wird zunächst eine rein klassische Betrachtung durchgeführt. Anschließend soll eine Ableitung aus den quantenmechanischen Bewegungsgleichungen skizziert werden, die die dabei eingehenden Näherungen verdeutlicht. Der Kollisionsterm wird im folgenden Kapitel lediglich klassisch motiviert, da dies zum Verständnis dieser Arbeit ausreichend ist; auch war die Erweiterung des Kollisionsterms der wesentliche Inhalt einer anderen Arbeit [3].

Ebenso soll die Realisierung des Kollisionsterms, das Resonanzmodell, in dieser Arbeit nur in Grundzügen skizziert werden; Details zu den Parametrisierungen kann man Anhang A entnehmen. Hingegen wird die Herleitung, Parametrisierung und Implementation der impulsabhängigen Potentiale im Detail besprochen, da dies das Hauptthema der vorliegenden Arbeit ist und die Potentiale die Bewegung der Nukleonen und damit ihren Fluß am Ende einer Schwerionenreaktion entscheidend bestimmen.

2.1 Die Vlasov-Gleichung

2.1.1 Klassische Herleitung

Die Struktur und die Bedeutung der Vlasov-Gleichung kann man sich am besten durch eine klassische Überlegung verdeutlichen. Sie startet mit dem Satz von Liouville: Das Volumen eines Phasenraumelementes bleibt konstant, falls sich alle Punkte, die es begrenzen, gemäß den für dieses System gültigen kanonischen Gleichungen bewegen. Da dies für *beliebige* Phasenraumelemente gilt, bedeutet es, daß die Anzahl der Teilchen dN in einem Phasenraumvolumen dV konstant bleibt. Mithin ist die Phasenraumdichte $f(\vec{r},\vec{p},t)$ dieser Teilchen konstant, denn aus

$$dN = f(\vec{r},\vec{p},t)\, dV \tag{2.3}$$

folgt

$$f(\vec{r},\vec{p},t) = \text{const.} \tag{2.4}$$

Schreibt man die totale Ableitung von f nach der Zeit als Summe partieller Ableitungen, so ergibt sich

$$\frac{df}{dt} \;=\; \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \;=\; 0\;. \tag{2.5}$$

Dabei ist $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ eine Geschwindigkeit, geschrieben als $\frac{\vec{p}}{E}$, und $\frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$ eine Kraft, die man als Gradient des Mittlere-Feld-Potentials schreiben kann: $\vec{F} = -\vec{\nabla}_r U$. In Summe:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{E}\vec{\nabla}_r f - \vec{\nabla}_r U\,\vec{\nabla}_p f = 0\;. \tag{2.6}$$

Im Falle eines impulsabhängigen Potentials $U = U(\vec{r},\vec{p})$ ergibt sich die generalisierte Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ aus $H = T + U$ zu

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{E} + \vec{\nabla}_p U\;. \tag{2.7}$$

Damit erhält man den linken Teil von Gleichung (2.1),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\vec{p}}{E} + \vec{\nabla}_p U\right)\vec{\nabla}_r f - \vec{\nabla}_r U\,\vec{\nabla}_p f = 0\;. \tag{2.8}$$

2.1.2 Quantenmechanische Herleitung

Die Betrachtung in Abschnitt 2.1.1 ist rein klassischer Natur, während ein System aus Nukleonen, wie es zwei kollidierende Atomkerne darstellen, ein quantenmechanisches System ist. Man kann nun zeigen, daß die Vlasov-Gleichung ((2.1) mit $I_{\text{coll}} = 0$) unter gewissen Näherungen aus der quantenmechanischen Bewegungsgleichung des Systems ableitbar ist. Dies wird im Detail beispielsweise in [7, 8, 9, 10] dargelegt. Hier soll eine solche Ableitung lediglich skizziert werden, um den Weg zu verdeutlichen und auf die Näherungen eingehen zu können, auf die bei der Diskussion der Ergebniskapitel zurückgegriffen werden wird.

Einteilchenbewegungsgleichungen

Ein quantenmechanisches System von A Teilchen wird durch eine A-Teilchen-Wellenfunktion $|\Psi_A(1,2,...,A;t)\rangle \equiv |\Psi\rangle$ beschrieben, wobei $1,2,...,A$ eine abkürzende Schreibweise für die Koordinaten und inneren Freiheitsgrade der A Teilchen ist. Die Zeitentwicklung des Systems ist durch die Schrödingergleichung

$$i\partial_t|\Psi\rangle = H_A|\Psi\rangle \tag{2.9}$$

mit dem Vielteilchenhamiltonoperator H_A gegeben. Für die komplex konjugierte Wellenfunktion $\langle\Psi|$ liest sich die Gleichung

$$-i\partial_t\langle\Psi| = \langle\Psi|H_A\ . \tag{2.10}$$

Multipliziert man Gleichung (2.9) von rechts mit $\langle\Psi|$, Gleichung (2.10) von links mit $|\Psi\rangle$ und subtrahiert sie voneinander, so ergibt sich

$$\begin{aligned} i\partial_t\left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right) &= H_A|\Psi\rangle\langle\Psi| - |\Psi\rangle\langle\Psi|H_A = \\ i\partial_t\hat{\rho}_A &= H_A\hat{\rho}_A - \hat{\rho}_A H_A = \\ i\partial_t\hat{\rho}_A &= [H_A,\hat{\rho}_A]\ . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dies ist die sogenannte von-Neumann-Gleichung mit $\hat{\rho}_A = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ als der A-Teilchendichtematrix. Sie enthält die vollständige Information über das zu untersuchende System, inklusive aller Teilchenkorrelationen.

Für den Vielteilchenhamiltonoperator H_A in Gleichung (2.11) wählt man nun einen experimentell begründeten Ansatz. Aus der näherungsweisen Konstanz der Bindungsenergie pro Nukleon im Kern kann man folgern, daß es sich bei der Kernkraft im wesentlichen um eine Zweiteilchenkraft handelt [11]. Man setzt daher den Hamiltonoperator in der Form

$$H_A = \sum_{i=1}^{A} t(i) + \sum_{i<j}^{A} v(ij) \tag{2.12}$$

an. Dieser Hamiltonoperator koppelt jeweils *zwei* Teilchen über den Wechselwirkungterm $v(ij)$. Der Erwartungswert von H kann daher bereits bei vollständiger Kenntnis der Zweiteilchendichtematrix bestimmt werden. Zur Herleitung dieser benötigt man eine Beziehung zwischen den Dichtematrizen verschiedenen Ranges.

Aus der A-Teilchendichtematrix läßt sich durch Ausintegration der $(n+1)\dots A$ Koordinaten eine reduzierte Dichtematrix gewinnen, die $n < A$ Freiheitsgrade beschreibt. Dies wird als Spurbildung (engl. Trace, Tr) über diese Koordinaten bezeichnet:

$$\rho_n(1,\dots,n;1',\dots,n') = \mathrm{Tr}_{(n+1,\dots,A)}\rho_A(1,\dots,A;1',\dots,A') \ , \tag{2.13}$$

d. h., die Dichtematrizen sind rekursiv auseinander bestimmbar.

Diese Rekursionsbeziehung läßt sich für ein System im Grundzustand ($T=0$) leicht herleiten: Die Spur über die Einteilchendichtematrix ergibt die Anzahl der Teilchen im System, leicht zu sehen in der Schreibweise der 2. Quantisierung

$$\mathrm{Tr}_{(1=1')}\rho_1(1,1') = \sum_i \langle \hat{a}_i^+ \hat{a}_i \rangle = A \ . \tag{2.14}$$

Die Spur über 1 und 2 über die Zweiteilchendichtematrix ergibt demzufolge

$$\mathrm{Tr}_{(1,2)}\rho_2(12,1'2') = \sum_{i,j} \langle \hat{a}_i^+ \hat{a}_j^+ \hat{a}_i \hat{a}_j \rangle = (A-1)A \ , \tag{2.15}$$

und damit

$$\mathrm{Tr}_{(1,\dots,n)}\rho_n = \frac{A!}{(A-n)!} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Tr}_{(1,\dots,A)}\rho_A = A! \ . \tag{2.16}$$

Ineinander eingesetzt folgt daraus direkt die gesuchte Beziehung zwischen ρ_n und ρ_{n+1}:

$$\rho_n = \frac{1}{A-n}\mathrm{Tr}_{(n+1)}\rho_{n+1} \ . \tag{2.17}$$

Angewendet auf die von-Neumann-Gleichung (2.11) ergibt sich eine Hierarchie von A gekoppelten, linearen Bewegungsgleichungen für die Dichtematrizen unterschiedlichen Ranges:

$$\begin{aligned} i\partial_t\rho_n &= \left[\sum_{i=1}^n t(r_i), \rho_n\right] + \left[\sum_{i<j=1}^n v(i,j), \rho_n\right] + \mathrm{Tr}_{(n+1)}\left[\sum_{i=1}^n v(i,n+1), \rho_{n+1}\right] \ . \\ {\scriptstyle (n} &{\scriptstyle = 1,\dots,A-1)} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Sie wird auch als Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon-(BBGKY)-Hierarchie der Dichtematrizen bezeichnet.

Diese Hierarchie ist nach wie vor exakt. Zur Lösung des Gleichungssystems (2.18) werden nun zwei entscheidende Näherungen gemacht: Es werden alle Korrelationen oberhalb der Zweiteilchendichtematrix vernachlässigt, und auch diese wird lediglich als antisymmetrisiertes Produkt von Einteilchendichtematrizen geschrieben, um dem fermionischen Charakter des Systems Rechnung zu tragen:

$$\begin{aligned} \rho_3 &\equiv 0 \qquad\qquad \text{und} \\ \rho_2(12,1'2') &= \rho(11')\rho(22') - \rho(12')\rho(21') \\ &\quad (+c_2(12,1'2'),\ \text{vernachlässigt}) \ . \end{aligned} \tag{2.19}$$

Dies sind die Näherungen, die zur sogenannten Time-Dependent-Hartree-Fock–Beschreibung (TDHF) gehören.

Zu lösen ist im folgenden also eine Gleichung, in der nur die Einteilchendichtematrix auftaucht, zusammen mit dem Zweiteilchenhamiltonoperator (2.12):

$$i\partial_t \rho_1 \;=\; [H_{12}, \rho_1] \;=\; [t(1), \rho_1] + \mathrm{Tr}_2 \left[v(12), \rho_2 \right] \; . \tag{2.20}$$

Der Wechselwirkungterm $\sum_{i,j} v(ij)$ in H_{12} kann nun durch ein effektives Einteilchenpotential U^{HF} wiedergegeben werden, das lokal, aber impulsabhängig ist. Damit erhält man formal eine reine Einteilchengleichung:

$$\begin{aligned} i\partial_t \rho_1 \;&=\; [H_1, \rho_1] \qquad (2.21)\\ \text{mit} \qquad H_1 \;&=\; t(1) + U^{HF}(1) \; . \end{aligned}$$

Konstruktion des Mittlere-Feld-Potentials

Das Mittlere-Feld-Potential U^{HF} gewinnt man aus einer Variation der Lösung von Gleichung (2.20) nach den Wellenfunktionen, die die Lösung von Gleichung (2.21) darstellen. Sei

$$H_A|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \; , \tag{2.22}$$

wobei die Wellenfunktion $|\Psi\rangle$ bereits das antisymmetrisierte Produkt der Eigenfunktionen der H_i ist:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det|\Phi_i\rangle \qquad \text{mit} \qquad H_i|\Phi_i\rangle = e_i|\Phi_i\rangle \; . \tag{2.23}$$

Dann verlangt man

$$\frac{\delta}{\delta\Phi^*_\alpha(x)} \left\{ \langle\Psi|H_A|\Psi\rangle - \sum_{i=1}^{A} e_i \langle\Phi_i|\Phi_i\rangle \right\} \;=\; 0 \; . \tag{2.24}$$

Daraus folgt die Bestimmungsgleichung für das nichtlokale Potential $U^{HF}(\vec{r}, \vec{r}\,')$:

$$\begin{aligned} e_\alpha \Phi_\alpha(\vec{r}) \;&=\; -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \Phi_\alpha(\vec{r}) \\ &+\; \int d^3\vec{r}\,' \sum_i \Phi^*_i(\vec{r}\,')\Phi_i(\vec{r}\,') v(\vec{r}, \vec{r}\,') \Phi_\alpha(\vec{r}) \qquad (2.25)\\ &+\; \int d^3\vec{r}\,' \sum_i \Phi^*_i(\vec{r}\,')\Phi_i(\vec{r}) v(\vec{r}, \vec{r}\,') \Phi_\alpha(\vec{r}\,') \qquad (2.26) \end{aligned}$$

Mit $\rho(\vec{r}\,') = \sum_i |\Phi_i(\vec{r}\,')|$ ergibt sich aus Gleichung (2.25) das lokale Hartree-Potential

$$U^H(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,') v(\vec{r}, \vec{r}\,') \; . \tag{2.27}$$

Das Fock-Potential $U^F(\vec{r}, \vec{r}\,')$ (2.26) kann man unter der Annahme unendlich ausgedehnter Kernmaterie (*infinite nuclear matter*) umschreiben in $U^F(\vec{r}, \vec{k})$: In einem unendlich ausgedehnten System sind die Zustände ebene Wellen

$$\Phi_\alpha(\vec{r}) \sim e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad \Phi_i(\vec{r}) \sim e^{i\vec{k}'\vec{r}}, \tag{2.28}$$

und die Wechselwirkung ist nur vom Relativabstand abhängig: $v(\vec{r},\vec{r}\,') = v(\vec{r}-\vec{r}\,')$. Damit ist

$$\begin{aligned}
U^F(\vec{r},\vec{r}\,') &= \int d^3r' \sum_i \Phi_i^*(\vec{r}\,')\Phi_i(\vec{r})\ v(\vec{r},\vec{r}\,')\ \Phi_\alpha(\vec{r}\,') \\
&\sim \int d^3r' \int d^3k'\ v(\vec{r}-\vec{r}\,')\ e^{-i\vec{k}'\vec{r}\,'} e^{i\vec{k}'\vec{r}} e^{i\vec{k}\vec{r}\,'} \\
&= \int d^3r' \int d^3k'\ v(\vec{r}-\vec{r}\,')\ e^{i\vec{k}'(\vec{r}-\vec{r}\,')} e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')} e^{i\vec{k}\vec{r}} \\
&= \int d^3R \int d^3K\ v(\vec{R})\ e^{i\vec{K}\vec{R}} e^{i\vec{k}\vec{r}} \qquad (\text{mit } \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,',\ \vec{K}=\vec{k}-\vec{k}') \\
&= \int d^3k'\ v(\vec{k}-\vec{k}')\ e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad = \quad U^F(\vec{r},\vec{k})\ .
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Aus dem nichtlokalen Potential $U(\vec{r},\vec{r}\,')$ ergibt sich also ein lokales, impulsabhängiges Potential $U^F(\vec{r},\vec{k})$.

In diesem Mittlere-Feld-Potential wird der langreichweitige Teil der Wechselwirkung $v(ij)$ absorbiert. Der kurzreichweitige Anteil ist, zusammen mit den vernachlässigten Korrelationen $c(12,1'2')$, Ursache für den Kollisionsterm auf der rechten Seite der BUU-Gleichung (2.1).

Wignertransformierte

Die Einteilchengleichung (2.21), zu deren Lösung nun alle Voraussetzungen vorliegen, ist noch in Form der Einteilchendichtematrix $\rho_1(11')$ geschrieben, wohingegen die BUU-Gleichung (2.1) eine Gleichung für die Phasenraumdichte f ist. Die Verbindung zwischen ρ und f kann man mit einer Wignertransformation herstellen. Man schreibt ρ auf Schwerpunkt- und Relativkoordinaten um und führt eine Fouriertransformation über die Relativkoordinate aus,

$$\begin{aligned}
&\rho(x_1,x_2) \to \rho(r,s)\ , \quad r = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad s = x_2 - x_1 \\
&f(r,p) \ = \ \int d^3s\ e^{-ips}\ \rho(r,s)\ ,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

wobei $\rho(x_1,x_2) = \langle x_1|\hat{\rho}|x_2\rangle$ die Darstellung von $\rho_1(11')$ im Ortsraum ist. Im Impulsraum lautet die entsprechende Transformation

$$\begin{aligned}
&g(p_1,p_2) \to g(p,q)\ , \quad p = \frac{p_1+p_2}{2}, \quad q = p_2 - p_1 \\
&f(r,p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3q\ e^{iqr}\ g(p,q)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

mit $g(p_1,p_2) = \langle p_1|\hat{\rho}|p_2\rangle$. Diese Wignertransformierte f ist an sich nicht identisch zur klassischen Phasenraumdichte f; sie kann, als quantenmechanische Größe, negativ werden. Man kann jedoch zeigen, daß die Wignertransformierte der Dichtematrix bezüglich der Erwartungswerte der Observablen mit der klassischen Phasenraumdichte identifiziert werden kann, wenn die charakteristischen Längen und Impulse des Systems, auf denen sich die physikalischen Größen ändern, größer $\hbar$ sind [12]. Dies ist für rein quantenmechanische Größen wie den Spin, der z. B. bei Teilchen-Teilchen-Kollisionen eine Rolle spielt, sicher nicht gegeben; dies ist jedoch nicht Gegenstand der Vlasov-Gleichung. Für Potentiale und Impulse der Teilchen hingegen ist diese Annahme im Niederenergiebereich erfüllt. Inwieweit sie bei relativistischen Schwerionenkollisionen mit den dort auftretenden hohen Dichte- und Impulsgradienten Gültigkeit besitzt, ist eine andere Frage; sie wird jedoch allgemein verwendet.

Man transformiert nun den kinetischen Term von Gleichung (2.21) gemäß (2.31) im Impulsraum, was den 2. Term auf der linken Seite der BUU-Gleichung (2.1) ergibt

$$
\begin{aligned}
[\hat{T},\hat{\rho}] &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3q\; e^{iqr}\;\langle p+\frac{q}{2}|[\hat{T},\hat{\rho}]|p-\frac{q}{2}\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3q\; e^{iqr}\;\left\{\frac{(p+\frac{q}{2})^2}{2m}-\frac{(p-\frac{q}{2})^2}{2m}\right\}\; g(p,q) \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3q\; e^{iqr}\;\frac{pq}{m}\; g(p,q) \\
&= \frac{p}{m}\,\nabla_r\left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3q\; e^{iqr}\; g(p,q)\right) \\
&= \frac{p}{m}\,\nabla_r f(r,p)\;.
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

Der Potentialterm wird in der gleichen Weise im Ortsraum transformiert, nur daß hier eine zusätzliche Näherung, die *lowest order gradient expansion*, eingeht:

$$
\begin{aligned}
[\hat{U},\hat{\rho}] &= \int d^3s\; e^{-ips}\;\langle r-\frac{s}{2}|[\hat{U},\hat{\rho}]|r+\frac{s}{2}\rangle \\
&= \int d^3s\; e^{-ips}\;\left\{U(r-\frac{s}{2})-U(r+\frac{s}{2})\right\}\;\rho(r,s) \\
&\approx -\int d^3s\; e^{-ips}\;\{s\cdot\nabla_r U\}\;\rho(r,s) \\
&= -\nabla_r U\,\nabla_p f(r,p)\;.
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

Damit ist der Ausdruck für den Propagations- oder Vlasov-Teil der BUU-Gleichung gefunden.

2.1.3 Zusammenfassung der Näherungen und Konsequenzen

Bei der Ableitung der Vlasov-Gleichung aus der Vielteilchen-Schrödingergleichung wurden folgende Näherungen gemacht:

1. Beschränkung auf die niedrigste Ordnung der BBGKY-Hierarchie und Vernachlässigung aller Teilchenkorrelationen,

2. Approximation der Wechselwirkung durch ein mittleres Feld, sowie
3. Gradientenentwicklung dieses Mittlere-Feld-Potentials und ausschließliche Berücksichtigung des niedrigsten Terms.

Daraus ergeben sich folgende Konsequenzen:

a) Die Verbindung zwischen dem Stoßterm auf der rechten Seite der BUU-Gleichung (2.1) und dem Mittlere-Feld-Potential auf der linken geht verloren. Stöße und Anziehung rühren eigentlich aus der gleichen Wechselwirkung her. Dies ist die Ursache für die Diskussion in Kapitel 3, in dem mittels Dispersionsrelationen ein Zusammenhang zwischen den im CBUU-Modell verwendeten Wirkungsquerschnitten und der Potentialparametrisierung untersucht wird.

b) Beschränkung auf die Beschreibung der Einteilchendynamik. Alle Korrelationseffekte, die z. B. zur Bildung von Präfragmenten in einer Schwerionenkollision führen könnten, sind von vorneherein ausgeschaltet. Daher kann man mit dem BUU-Modell nicht die Fragmentation der Spektatoren bei sehr peripheren Kollisionen und den damit verbundenen niedrigen Anregungsenergien beschreiben. Im Rahmen dieser Arbeit werden Fragmente am Reaktionsende mit einem Koaleszenzmodell aus der Einteilchenverteilung gebildet, was in Kapitel 8 beschrieben wird.

2.2 Das Kollisionsintegral

Der Kollisionsterm auf der rechten Seite der BUU-Gleichung (2.1) entspringt der gleichen Wechselwirkung wie das Mittlere-Feld-Potential. Im Prinzip ist er daher aus der Vielteilchengleichung (2.11) herleitbar. Dies ist jedoch nur unter bestimmten Näherungen möglich. Je nachdem, bei welchem Rang man die BBGKY-Hierarchie (2.18) abschneidet, ergibt sich die Born-Approximation, die zeitabhängige G-Matrix-Theorie, die Brückner-Theorie, oder eine *nuclear quantum correlation dynamics* [7, 13, 14]. Die Lösung der dann aufgestellten Gleichungen hängt wiederum von der gegebenen Phasenraumkonfiguration ab [7, 15, 16, 17, 18] und ist bisher nur in Spezialfällen möglich.

In der Praxis geht man daher einen anderen Weg bei der Formulierung des Stoßterms. Unter der Annahme, daß sich die in-Medium-Wirkungsquerschnitte nicht stark von der Wechselwirkung zweier freier Nukleonen z. B. im *pp*-Stoß unterscheiden, parametrisiert man diese elementaren Wirkungsquerschnitte und benutzt sie für die Berechnung der Übergangsraten im BUU-Stoßterm.

Die funktionale Form des Stoßterms kann man sich leicht klarmachen. Der Stoßterm soll die Änderung der (Phasenraum-)Dichte pro Zeit durch Kollisionen mit anderen Teilchen beschreiben. Die Kollisionrate ist proportional zur Dichte der betrachteten Teilchen ρ_1, zur Dichte der Streupartner ρ_2, zur Geschwindigkeit v_{12}, mit der sich die

Teilchen 1 relativ zu den Streupartnern 2 bewegen, und zur Größe des Wirkungsquerschnitts. Es ergibt sich die Form

$$\frac{d\rho_1}{dt} \sim \sigma \cdot v_{12} \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \quad . \tag{2.34}$$

Da es sich um ein fermionisches System handelt, muß ad hoc noch das Pauli-Blocking der Streuendzustände eingeführt werden. Ausgedrückt unter Verwendung der Phasenraumdichte f liest sich der Stoßterm als

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dt} &= -\frac{4}{(2\pi)^3} \int d^3p_2\, d^3p_3\, d\Omega_4 \times \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \\ &\times v_{12} \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big([f_1 f_2 (1-f_3)(1-f_4)] - [f_3 f_4 (1-f_1)(1-f_2)] \Big) . \end{aligned} \tag{2.35}$$

Die erste Zeile beschreibt die Integration über alle möglichen Impulszustände der Streupartner 2 und Streuendzustände 3 und 4 unter Berücksichtigung der Energie- und Impulserhaltung. Da nach verschiedenen Impulsrichtungen unterschieden wird, wird in der zweiten Zeile statt σ der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ verwendet. $(1-f_3)(1-f_4)$ beschreibt das Pauli-Blocking der Endzustände einer Streuung von 1,2 nach 3,4. $f_3 f_4 (1-f_1)(1-f_2)$ trägt einem möglichen Gewinn an Dichte am Ort 1 durch Streuung zweier Teilchen von 3 und 4 nach 1 und 2 Rechnung.

2.2.1 Limitierungen des Ansatzes und Konsequenzen

Grundsätzlich ist die Annahme freier Wirkungsquerschnitte für die Nukleonstöße in einer Kern-Kern-Kollision ein vertretbarer und praktikabler Ansatz. Problematisch ist die Verwendung bei hohen Energien und Dichten insofern, als sich die Eigenschaften nukleonischer Resonanzen, insbesondere ihre Breite, im Medium verändern können. Effekte dieser Mediummodifikationen der Resonanzen sind beispielsweise in [4] für die Photoproduktion von Mesonen und Photoabsorption untersucht worden; im Rahmen dieser Arbeit und in [3] zeigte sich, daß sie in Bezug auf Schwerionenreaktionen nicht sehr ausgeprägt sind.

Die Vorgehensweise, aus freien NN-Stößen den totalen Nukleon-Wirkungsquerschnitt wie auch das Verhältnis der einzelnen Reaktionskanäle zueinander zu bestimmen, limitiert die im Modell möglichen Reaktionen von vorneherein auf 2-Teilchen-Reaktionen. Dies hat möglicherweise Auswirkungen auf die Mesondynamik, bei der beispielsweise die Pionenabsorption an mehreren Nukleonen wie in $\pi NNN \rightarrow NNN$, unberücksichtigt bleibt. Darauf wird in Kapitel 5 noch einmal eingegangen.

Die globale Nukleonendynamik sollte durch beide angesprochenen Punkte nicht wesentlich beeinflußt werden. In speziellen Fällen, wie bei der Berechnung der Balance-Energie in Schwerionenreaktionen, sind dichteabhängige Modifikationen des NN-Wirkungsquerschnittes in der Größenordnung von 20 % vorgeschlagen worden [19, 20, 21], werden durch Unsicherheiten in der Potentialparametrisierung jedoch in etwa "kompensiert" [22].

2.3 Realisierung des CBUU-Modells

Das CBUU-Modell soll im Energiebereich des SIS-Beschleunigers an der GSI verwendet werden, d. h. bis zu etwa 2 AGeV kinetischer Energie. Da dies weit über der Schwelle der Pionenerzeugung im freien NN-Stoß liegt, müssen inelastische Streuprozesse berücksichtigt werden. Die grundlegende Annahme des CBUU-Modells ist, daß dies immer über die Anregung nukleonischer Resonanzen geschieht (Resonanzmodell). Für diese, und für die entstehenden Mesonen, müssen dann jeweils eigene Transportgleichungen der Form (2.1) gelöst werden, die über den Stoßterm gekoppelt sind.

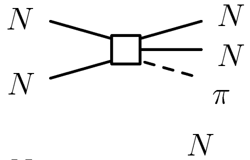
Das mittlere Nukleonenpotential wird aus einer externen Rechnungen gewonnen. Basis dafür sind Rechnungen von Wiringa et al. [23, 24], in denen auf mikroskopischer Ebene ein impulsabhängiges Mittlere-Feld-Potential berechnet wird, wobei die zugrundeliegenden Hamiltonoperatoren über den in Gleichung (2.12) hinausgehen und explizit Dreiteilchenwechselwirkungen berücksichtigen. Dies ist notwendig, um simultan NN-Streudaten, die Bindung leichter Kerne sowie die Sättigungseigenschaften nuklearer Materie beschreiben zu können. Diese Potentiale weichen jedoch stark von den aus Streuexperimenten extrahierten optischen Potentialen ab [25].

Im Folgenden wird auf die Grundzüge des Resonanzmodells eingegangen, das ausführlich in einer anderen Arbeit [3] beschrieben wurde. Detailliert soll die Gewinnung der Nukleonenpotentiale dargestellt und die Eigenschaften der Parametrisierung besprochen werden, da die mittleren Felder die Nukleonendynamik entscheidend mitbestimmen. Die Besonderheiten der numerischen Realisierung des CBUU-Modells werden anschließend diskutiert, soweit sie für die Ergebnisse dieser Arbeit relevant sind. Details des Resonanzmodells und der numerischen Realisierung finden sich im Anhang A.

2.3.1 Das Resonanzmodell

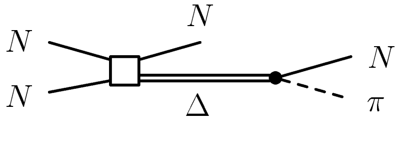
Inelastische Reaktionen wie die Pionenerzeugung werden im CBUU-Modell grundsätzlich über die Bildung von Resonanzen beschrieben. D. h., der Prozeß

$$NN \to NN\pi$$



verläuft gemäß

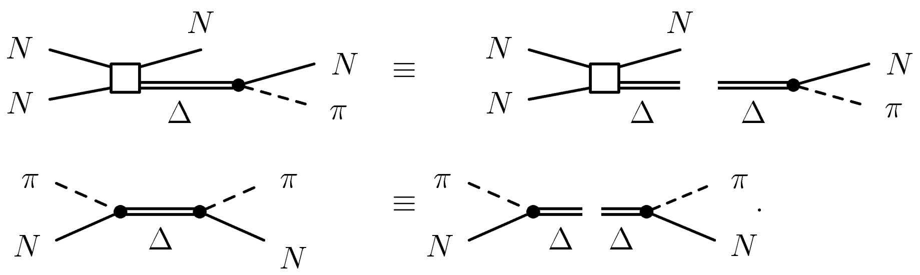
$$NN \to N + \Delta \to N + N\pi$$



über die Bildung eines Δ oder einer anderen Resonanz. Analoges gilt für die übrigen Mesonen. Die zweite wesentliche Modellannahme ist, daß Resonanzerzeugung und -zerfall zwei voneinander getrennte Prozesse sind. Sowohl Mesonproduktion wie auch -streuung finden also als Zwei-Stufen-Prozeß statt:

$$
\begin{array}{ccr}
NN \to NN\pi & \equiv & NN \to N\Delta, \quad \Delta \to N\pi \\
\pi N \to \pi N & \equiv & \pi N \to \Delta, \quad \Delta \to N\pi
\end{array}
$$

entsprechend



Der Schlüsselprozeß für alle Reaktionen ist demzufolge die Resonanzproduktion. Die Resonanzeigenschaften sind analog der im *particle data booklet* [26] angegebenen Eigenschaften der Resonanzen bis zu einer Masse von M=1.95 GeV für die freie Nukleon-Nukleon-Streuung parametrisiert; sie sind im Detail in Tabelle 2.1 aufgelistet. Diese Resonanzen werden benötigt, um die totalen Wirkungsquerschnitte für die 1π–, 2π–, η– und ρ–Produktion im Bereich bis $\sqrt{s} = 5$ GeV zu fitten. π, η und ρ sind auch die im CBUU-Modell berücksichtigten Mesonen, zuzüglich einem σ-Meson als korreliertem 2π-Zustand.

Die folgenden elastischen und inelastischen Baryon-Baryon, Meson-Baryon und Meson-Meson - Reaktionen sind eingeschlossen:

$$
\begin{array}{rcl}
NN & \longleftrightarrow & NN \\
NN & \longleftrightarrow & NR \\
NR & \longleftrightarrow & NR' \\
NN & \longleftrightarrow & \Delta(1232)\Delta(1232) \\
R & \longleftrightarrow & N\pi \\
R & \longleftrightarrow & N\pi\pi \\
 & = & \Delta(1232)\pi,\ N(1440)\pi,\ N\rho,\ N\sigma \\
N(1535) & \longleftrightarrow & N\eta \\
NN & \longleftrightarrow & NN\pi \\
\rho & \longleftrightarrow & \pi\pi \quad \text{(p-wave)} \\
\sigma & \longleftrightarrow & \pi\pi \quad \text{(s-wave)}\ .
\end{array}
\tag{2.36}
$$

Dabei sind 2π - Zerfälle als Aufeinanderfolge von 1π - Zerfällen realisiert, wie in Gleichung (2.36) angedeutet; Details siehe Anhang A.1.

In einer quantenmechanischen Rechnung können die intermediären Zustände nun *offshell* sein, d. h. nicht der Dispersionrelation

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \tag{2.37}$$

genügen. Gleichung (2.37) wird jedoch im BUU-Modell benötigt, um den Impuls und damit die Propagationsgeschwindigkeit der Teilchen festlegen zu können. Der Offshellness der Resonanzen wird daher durch eine Massenverteilung Rechnung getragen. Im πN-Stoß ist $M = \sqrt{s}$ vorgegeben, in einer NN-Reaktion wird die Masse gemäß der Verteilung

$$f(M) = \frac{2}{\pi} \frac{M^2\Gamma}{\left(M^2 - M_R^2\right)^2 + M^2\Gamma^2} \tag{2.38}$$

zufällig gewählt.

Die Breite Γ der Resonanzen ist impulsabhängig parametrisiert, üblicherweise als

$$\Gamma(q) \quad = \quad \Gamma_R \cdot \left(\frac{q}{q_R}\right)^{2l+1} \left(\frac{q_R^2 + \delta^2}{q^2 + \delta^2}\right)^{l+1} \tag{2.39}$$

mit

$$q^2 = (M^2 - M_N^2 - m^2)^2/4M^2 \quad , \quad \delta^2 = (M - M_N - m)^2 + \Gamma_R^2/4\ , \tag{2.40}$$

und Γ_R als Nominalbreite der Resonanz. q ist der Impuls des auslaufenden Mesons beim Zerfall der Resonanz in deren Ruhesystem, q^{2l+1} ist proportional zum verfügbaren Phasenraum des Zerfalls eines Zustandes mit Drehimpuls l. Der letzte Term in Gleichung (2.39) wirkt als Abschneidefaktor. Abweichend davon wird die $\Delta(1232)$-Breite nach Moniz [27] parametrisiert.

Diese Breitenparametrisierungen bestimmen im Resonanzmodell die Meson-Nukleon-Wirkungsquerschnitte vollständig, wie in Anhang A.1.2 dargelegt wird. Die Baryon-Baryon-Wirkungsquerschnitte werden in (Phasenraumfaktor $\times$ Matrixelement) aufgespalten und die Matrixelemente an die vorhandenen Pion-, Eta- und ρ-Produktionsdaten angefittet. Diese Vorgehensweise hat insbesondere den Vorteil, die Rückreaktionswirkungsquerschnitte $NR \to NN$ nicht aus "detailed balance"-Beschreibungen gewinnen zu müssen, die bei niedrigen Relativimpulsen von Nukleon und Resonanz um einen Faktor zwei differieren können [28].

Tabelle 2.1 zeigt im Überblick die Matrixelemente, Breiten und Zerfallskanäle der im CBUU-Modell enthaltenen Resonanzen. Die sich daraus ergebenden Wirkungsquerschnitte sind am Ende von Anhang A.1 im Vergleich zu den experimentellen Daten dargestellt.

Resonanz (M_R) [MeV]	$\overline{\left\|\mathcal{M}^2\right\|}/16\pi$ [mb GeV^2]	Γ_R [MeV]	Zerfallswahrscheinlichkeit [%]					
			N π	N η	N $\pi\pi$			
					$\Delta\pi$	N ρ	$N \overset{\text{direkt}}{\pi\pi}$	$N_{1440}\pi$
$\Delta(1232)$	-	120	100	0	0	0	0	0
$N(1440)$	14	350	65	0	25	0	10	0
$N(1520)$	4	120	55	0	25	15	5	0
$N(1535)$	8, 40	203	50	45	0	2	0	3
$\Delta(1600)$	68	350	15	0	75	0	0	10
$\Delta(1620)$	68	150	30	0	60	10	0	0
$N(1650)$	4	150	80	0	7	5	4	4
$N(1675)$	68	150	45	0	55	0	0	0
$N(1680)$	4	130	70	0	10	5	15	0
$\Delta(1700)$	7	300	15	0	55	30	0	0
$N(1720)$	4	150	20	0	0	80	0	0
$\Delta(1905)$	7	350	15	0	25	60	0	0
$\Delta(1910)$	68	250	50	0	50	0	0	0
$\Delta(1950)$	14	300	75	0	25	0	0	0

Tab. 2.1: Mittlere Massen M_R, Zerfallsbreiten Γ_R, Zerfallskanäle und Zerfallswahrscheinlichkeiten der baryonischen Resonanzen. Die angegebenen Werte sind aus [26] und im Fall des $N(1535)$ aus [29] entnommen; die im CBUU-Modell verwendete Masse der $N(1535)$-Resonanz entspricht dem in [29] angegebenen Wert von 1544 MeV/c^2. Die zweite Spalte enthält die gemittelten Matrixelemente des CBUU-Modells für die Produktion baryonischer Resonanzen in Nukleon-Nukleon-Kollisionen.

2.3.2 Das Mittlere-Feld-Potential

Funktionale Form

Das CBUU-Modell ist ein nichtrelativistisches Transportmodell. Daher verwendet man ein nichtrelativistisches optisches Potential zur Beschreibung des Mittlere-Feld-Potentials der Nukleonen. Es ist in der einfachsten Form ein dichteabhängiges Skyrme-Potential [30]

$$U(\rho) = A\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + B\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\tau} , \tag{2.41}$$

die Parameter A, B und τ werden dabei so gewählt, daß die Bedingungen

$$\begin{aligned} &\text{Bindungsenergie} && E/A(\rho_0) = -16\,\text{MeV} \quad , \\ &\text{Stabilität} && \left.\frac{\partial E}{\partial \rho}\right|_{\rho_0} = 0 \qquad \text{und} \\ &\text{Inkompressibilität} && K = 9\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\frac{E}{A} = 210 \ldots 380\,\text{MeV} \end{aligned} \tag{2.42}$$

erfüllt sind.

Jedoch konnte gezeigt werden [31, 2, 32], daß mit diesem Potential keine konsistente Beschreibung der Nukleon-Kern- und Kern-Kern-Streudaten erreicht werden kann. Darüberhinaus verlangen Rechnungen aus der Astrophysik eine weiche EoS, während sich die Kern-Kern-Streuergebnisse bevorzugt mit einer harten EoS beschreiben lassen [33]. Eine Lösung dieses Problems liegt in der Verwendung eines impulsabhängigen Potentials, das bei großen Relativgeschwindigkeiten der Teilchen eine zusätzliche Repulsion erzeugt. Eine plausible Form dieser Impulsabhängigkeit kann man aus der Nichtlokalität der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung unter der Annahme eines massiven Mesonen-Austauschs herleiten:

In Abschnitt 2.1.2 ergab sich für das Fock-Potential die Gleichung (2.29)

$$\int d^3r' \int d^3k' \; v(\vec{r}-\vec{r}\,') \; e^{-i\vec{k}'\vec{r}\,'} e^{i\vec{k}'\vec{r}} e^{i\vec{k}\vec{r}\,'} \quad = \quad U^F(\vec{r},\vec{k}) \; . \tag{2.43}$$

Speziell mit der Wechselwirkung eines massiven Mesonaustauschs

$$v(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{e^{\mu|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{\mu|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{2.44}$$

ergibt sich für die funktionale Form der Impulsabhängigkeit damit

$$\begin{aligned} v(\vec{K}) &= \int d^3R \, \frac{e^{\mu R}}{\mu R} \; e^{i\vec{K}\vec{R}} \\ &= \frac{4\pi}{\mu} \, \frac{1}{\mu^2+\vec{K}^2} \quad = \quad \mathrm{const} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\vec{k}-\vec{k}'}{\mu}\right)^2} \; , \end{aligned} \tag{2.45}$$

wobei $R = |\vec{r}-\vec{r}\,'|$ und $\vec{K} = \vec{k}-\vec{k}'$ ist.

Genau diese Form der Impulsabhängigkeit wurde von Welke et al. [6] für die Parametrisierung eines Mittlere-Feld-Potentials vorgeschlagen

$$U(\rho,\vec{p}) \; = \; U_{\mathrm{Skyrme}} + \frac{2C}{\rho_0} \int d^3p' \; \frac{f(\vec{r},\vec{p}\,')}{1+\left(\frac{\vec{p}-\vec{p}\,'}{\Lambda}\right)^2} \; . \tag{2.46}$$

Sie hat gegenüber anderen, funktional ähnlichen Parametrisierungen [24] den Vorteil, aus einer potentiellen Energiedichte ableitbar zu sein,

$$U \quad = \quad \frac{\delta W}{\delta \rho} \; , \tag{2.47}$$

mit

$$W \quad = \quad A\frac{\rho^2}{\rho_0} + B\frac{\rho^{\tau+1}}{\rho_0^\tau} + \frac{C}{\rho_0} \int d^3p \int d^3p' \; \frac{f(\vec{r},\vec{p})f(\vec{r},\vec{p}\,')}{1+\left(\frac{\vec{p}-\vec{p}\,'}{\Lambda}\right)^2} \; ,$$

womit die Energieerhaltung des Transportmodells überhaupt überprüfbar wird, da sich die Gesamtenergie als Summe der kinetischen und der potentiellen Energie berechnen läßt, vergleiche Abschnitt 2.5.

Parameter des Potentials

Die fünf Parameter des Potentials (2.46), A, B, τ, C und Λ, können an die drei Bedingungen für das Skyrme-Potential (2.42) plus zwei Vorgaben für das Potential bei verschiedenen Impulswerten oder Annahmen über die effektive Masse des Nukleons [34] angepaßt werden. Erstere können einmal an aus Nukleon-Kern–Streuexperimenten gewonnene Parametrisierungen des optischen Potentials [25] angepaßt werden oder auf Modellrechnungen beruhen. In dieser Arbeit wurde auf Modellrechnungen zurückgegriffen, in Übereinstimmung mit [35, 36]. Der Vorteil dieser Methode ist die Überprüfbarkeit der gewonnenen Potentialparametrisierung mit den Ergebnissen der Modelle bei verschiedenen Kerndichten.

Basis für die Parameter des Potentials (2.46) sind Rechnungen von Wiringa et al. [23, 24], in denen die nukleare EoS und das Einteilchenpotential mikroskopisch mit verschiedenen Zwei- und Dreiteilchenhamiltonoperatoren berechnet wird

$$H = \sum_i \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 + \sum_{i<j} v_{ij} + \sum_{i<j<k} V_{ijk} \quad . \tag{2.48}$$

Sie gehen damit über den Ansatz eines reinen Zweiteilchenhamiltonoperators (2.12) hinaus. Der Zweiteilchenterm wird an die Nukleon-Nukleon-Streudaten angepaßt, der Dreiteilchenterm wird benötigt, um sowohl die Bindungsenergien von leichten Kernen (^{3}He, ^{4}He) wie auch die Saturationseigenschaften nuklearer Materie wiederzugeben. Trotzdem sind noch Freiheiten bei der Wahl der Parameter vorhanden. So gehen in den Zweiteilchenterm v_{ij} wahlweise das Urbana v_{14} (Uv14) oder das Argonne v_{14} (Av14) -Potential ein. Der Dreiteilchenterm ist dazu jeweils das UrbanaVII - Modell (UVII) oder eine effektive Dreinukleonenwechselwirkung (TNI), bei der die Parameter der Zweiteilchenwechselwirkung dichteabhängig modifiziert werden (detaillierte Referenzen zu diesen Wechselwirkungmodellen siehe [23]).

Die verschiedenen Modelle ergeben dabei durchaus verschiedene Ergebnisse, vergleiche Abbildung 2.1. Diese treten jedoch vor allem bei hohen Dichten (2 - $3\rho_0$) und hohen Impulsen ($p \geq 600$ MeV) auf, bei denen der nichtrelativistische Hamiltonoperator (2.48) ohnehin nur eingeschränkt Gültigkeit besitzt.

In [24] werden die Resultate der mikroskopischen Rechnungen mit der Potential-Funktion

$$U(\rho, k) \;=\; \alpha(\rho) + \frac{\beta(\rho)}{1 + (\frac{k}{\Lambda(\rho)})^2} \tag{2.49}$$

gefittet, die ebenfalls die Form eines Mesonaustauschpotentials besitzt. Die besten Fits sind dabei für die Ergebnisse mit dem Uv14+UVII und dem Uv14+TNI - Hamiltonoperator möglich. Für diese Arbeit wurden daher diese beiden Ergebnisse mit dem Potentialansatz (2.46) nachgefittet. Der Unterschied zu [24] liegt darin, daß die Parameter (α, β, Λ in (2.49)) nicht einfach für jede Dichte neu bestimmt werden, sondern als Konstanten für alle Dichten Gültigkeit haben müssen. Es zeigt sich, daß über den

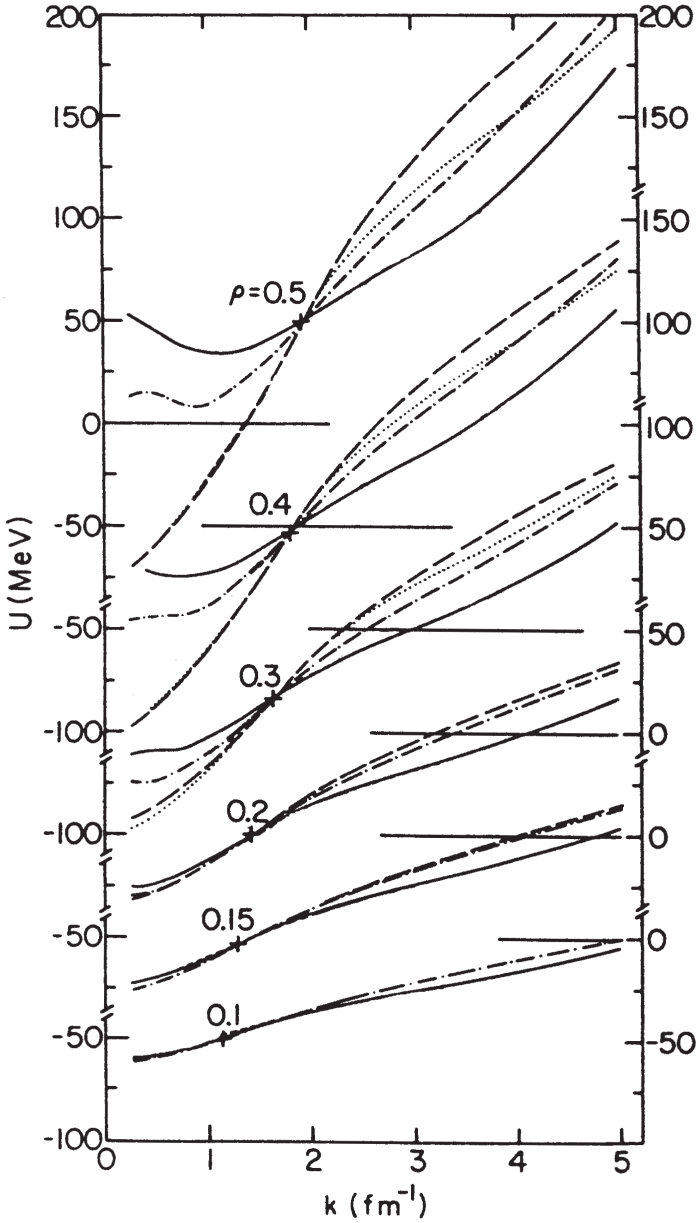


Abb. 2.1: Einteilchenpotential $U(\rho, k)$ aus den mikroskopischen Rechnungen von Wiringa et al. [24] für verschiedene Kerndichten. Die verschiedenen Linien entsprechen den Hamiltonoperatoren: Uv14 + TNI (Striche), Uv14 + UVII (Strich-Punkte), Av14 + UVII (durchgezogene Linie) und perturbative Berechnung mit Uv14 + UVII (Punkte). Für alle Rechnungen wurde die gleiche Fermienergie $e(\rho, k_F)$ angesetzt, angedeutet durch die "+", durch die alle Kurven gehen. Modifizierte Abbildung aus [24].

gesamten Dichtebereich hinweg (ca. $^1\!/_2$fache bis 3fache Kerndichte) die Ergebnisse für Uv14+UVII am besten wiedergegeben werden können.

Die so gewonnenen Konstanten wurden noch dahingehend modifiziert, daß sie die Einstellung verschiedener Kompressibilitäten erlauben. Die Bedingungen an die Potentiale im CBUU-Modell lauten somit:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{E}{A}\right|_{\rho_0} &= -16\,\mathrm{MeV}\ , \qquad & U(\rho_0, p{=}800\,\mathrm{MeV}) = 0\ , \\
\left.\frac{\partial E}{\partial \rho}\right|_{\rho_0} &= 0\ , \qquad & U(\rho_0, p \to \infty) = +32\ \mathrm{MeV}\ , \\
K = 9\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\frac{E}{A} &= 210 \mid 290 \mid 380\ \mathrm{MeV}\ . &
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

ρ_0 wurde dabei auf 0.168 fm^{-3} gesetzt. Die zu den verschiedenen Kompressibilitäten gehörenden impulsabhängigen Potentiale wurden

- *soft momentum-dependent* (smd) ,
- *medium momentum-dependent* (mmd) und
- *hard momentum-dependent* (hmd)

genannt. Zusätzlich wurden zu Vergleichszwecken je ein hartes (K=380 MeV) und ein weiches (K=210 MeV) Skyrme-Potential

- *soft* (s) und
- *hard* (h)

parametrisiert.

Abbildung 2.2 zeigt das smd - CBUU-Potential in Vergleich zum Fit an das Uv14+UVII - Potential aus [24]. Die Kompressibilität des Uv14+UVII - Potentials wird dabei in [24] mit K=202–224 MeV angegeben, verglichen mit K=210 MeV des CBUU-Potentials. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung bis zu 2 ρ_0. Darüber ist das CBUU-Potential insgesamt weniger repulsiv als auch weniger stark vom Teilchenimpuls abhängig.

Realisierung des Potentials

a) Referenzsystem

Das Potential (2.46) ist eine nichtrelativistische Parametrisierung, daher ergeben sich für das Potential und damit für die Teilchenenergie verschiedene Werte, je nachdem, in welchem System man $U(\rho, \vec{p})$ berechnet. Dies gilt, obwohl in Gleichung (2.46) nur die Impuls*differenz* benachbarter Nukleonen eingeht, da die Impulsverteilung der ein Nukleon umgebenden Materie in einer Lorentztransformation verzerrt wird. Mögliche Referenzsysteme, bezüglich derer man den Impuls der Teilchen bestimmen kann, sind einmal das Laborsystem, in dem die Kern-Kern-Kollision abläuft, sowie die jeweiligen Kerne selbst, denen das betrachtete Teilchen angehört, vergleiche Abbildung 2.3. Während eine Bestimmung im Laborsystem verschiedene Bindungsenergien für die Kerne liefert, je nach der Geschwindigkeit, mit der sie sich aufeinander zubewegen,

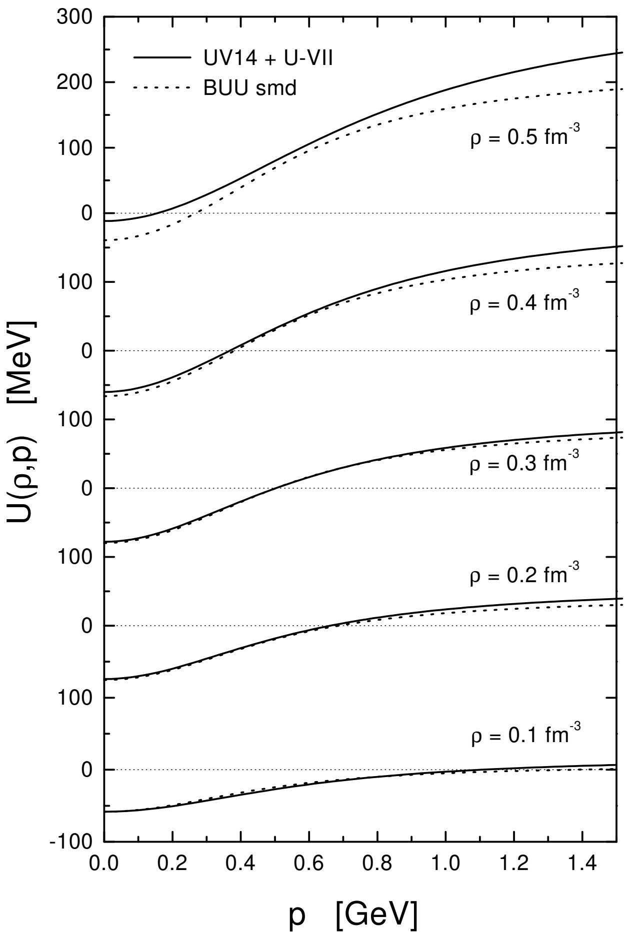


Abb. 2.2: Vergleich des in [24] angegebenen Fits an die Resultate der Berechnung des Einteilchenpotentials mit dem Uv14 + UVII – Hamiltonoperator (durchgezogene Linie) im Vergleich zu dem im CBUU-Modell verwendeten smd - Potential (Punkte).

stößt eine Bestimmung in den Kernsystemen auf Mehrdeutigkeiten, wenn die Kerne kollidieren und zumindest teilweise verschmelzen oder aufbrechen.

Im CBUU-Modell werden daher die Teilchenimpulse $\vec{p}, \vec{p}\,'$, die in Potentialgleichung (2.46) eingehen, grundsätzlich im lokalen Ruhesystem (*local rest frame*, LRF) der Kernmaterie genommen, die das zu untersuchende Teilchen umgibt. Dazu wird das gesamte Reaktionsvolumen in ein dreidimensionales Gitter mit 1 fm^3 großen Zellen zerlegt und in jeder Zelle die mittlere Bewegungsrichtung aller Teilchen ermittelt. In das durch diese mittlere Bewegungsrichtung festgelegte System wird eine Lorentz-Transformation durchgeführt und relativ zu diesem neuen System, in dem die Kernmaterie lokal ruht, der Impuls aller zu betrachtenden Teilchen ermittelt.

b) Beitrag des Potentials zur Teilchenenergie

Ein weiteres Problem, das sich aus der Verwendung einer nichtrelativistischen Para-

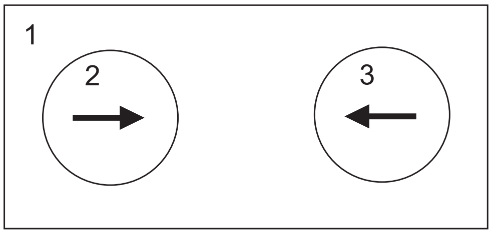


Abb. 2.3: Skizze der verschiedenen Bezugssysteme, die sich zur Berechnung der Nukleonenpotentiale anbieten: (1) Als Kasten angedeutet, das Laborsystem bzw. das Gitter, in/auf dem die Kollision stattfindet. (2) und (3) Die sich aufeinander zubewegenden Kerne.

metrisierung ergibt, ist, in welcher Art und Weise das Potential in die Berechnung der Gesamtenergie eines Nukleons eingeht. Diese erfolgt im CBUU-Modell mit der relativistischen Formel $E = \sqrt{p^2 + m^2}$. Prinzipiell kann U als nullte Komponente eines Vektorpotentials oder als skalares Potential behandelt werden, wobei sich die Teilchengesamtenergie einmal gemäß

$$E_{\text{vec}} = \sqrt{p^2 + m^2} + U \tag{2.51}$$

und zum anderen nach

$$\begin{aligned} E_{\text{sca}} &= \sqrt{p^2 + (m+U)^2} \qquad (2.52) \\ = \sqrt{p^2 + m^2 + 2mU + U^2} &= \sqrt{p^2+m^2}\left(1 + \frac{2mU + U^2}{p^2+m^2}\right)^{1/2} \\ &\simeq \sqrt{p^2+m^2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2mU+U^2}{p^2+m^2}\right)\right] \\ &\simeq \sqrt{p^2+m^2} + \frac{m}{\sqrt{p^2+m^2}}\,U \end{aligned}$$

berechnet. Eine erste Abschätzung mit

$$|U| \leq 100 \text{ MeV} = 0.1 \text{ GeV}\,, \quad m \simeq 1 \text{ GeV} \tag{2.53}$$

ergibt, daß der Faktor $m/\sqrt{p^2+m^2}$, um den sich die Potentialbeiträge zur Gesamtenergie in (2.51) und (2.52) unterscheiden, im Bereich von p=0...2 GeV zwischen 1 und 0.45 liegt. Da diese Differenz entsprechende Auswirkungen sowohl auf die Propagation wie auch auf die Energiebilanz in den Teilchenproduktionsreaktionen hat, wurde im folgenden eine genauere Untersuchung vorgenommen:

Der Teilchenimpuls, der in die Berechnung von $U(\rho, \vec{p})$ eingeht, ist der Impuls relativ zur umgebenden Materie, wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben. Als Maximum kann angenommen werden, daß diese umgebende Materie im Mittel ruht, während sich das betrachtete Teilchen noch mit voller initialer Geschwindigkeit bewegt; eine Situation, wie sie zu Beginn einer Kern-Kern-Reaktion vorliegen kann. Dieser Maximalimpuls ergibt sich bei einer Einschußenergie von 2 AGeV aus

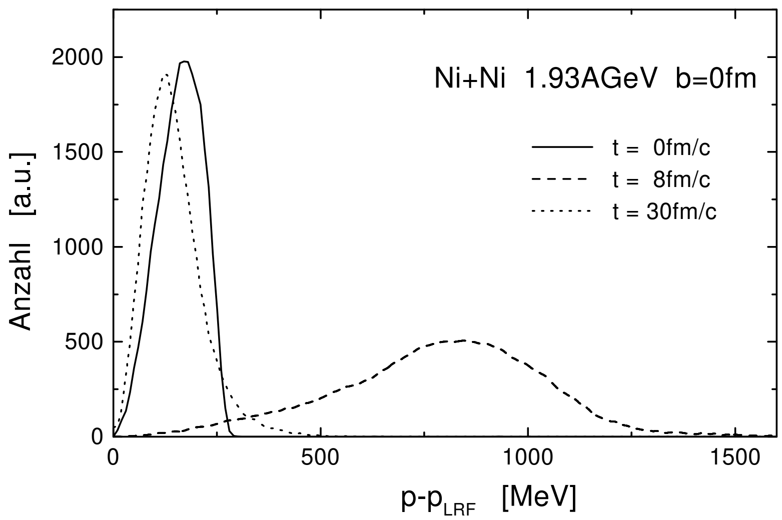


Abb. 2.4: Verteilung der Nukleonenimpulse relativ zu ihrem lokalen Ruhesystem (LRF) für eine zentrale Ni+Ni – Kollision bei 1.93 AGeV Einschußenergie. Die durchgezogene Linie zeigt die Verteilung vor der Kollision, die der Fermiverteilung in einem ruhenden Kern entspricht. Die maximale Verteilung ist nach 8 fm/c erreicht (Striche), am Ende der Reaktion nach 30 fm/c ist die Verteilung im Maximum sogar unterhalb der anfänglichen (Punkte).

$$\begin{aligned} S &= (E_1+m)^2 - p_1^2 \qquad \text{mit } \begin{cases} E_1 = T + m = 2.938 \text{ GeV} \\ p_1^2 = E_1^2 - m^2 \end{cases} \\ &= (2E_{cm})^2 \\ &= 4(p_{cm}^2 + m^2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_{cm}^2 = \frac{S}{4} - m^2 \end{aligned}$$

zu

$$p_{max} = 0.969 \text{ GeV}. \tag{2.54}$$

Addiert man die Fermiimpulse der beiden Kerne hinzu, so kommt man zu einem Impulsbereich bis knapp 1.5 GeV.

Abbildung 2.4 zeigt nun die Verteilung der Teilchenimpulse relativ zu ihrem lokalen Ruhesystem (also ohne die sich aus der Bewegung der Kerne ergebenden Impulskomponenten) für das System Ni+Ni bei 1.93 AGeV Einschußenergie für verschiedene Zeiten. Die Kollision beginnt nach 4 fm/c; nach 8 fm/c ist eine maximale mittlere Relativimpulsverteilung erreicht. Sie weist ein Maximum um 850 MeV mit Ausläufern bis 1.5 GeV auf.

Für diesen Impulsbereich zeigt Abbildung 2.5 die Differenz der vektoriellen minus der skalaren Energie. Bei normale Kerndichte $\rho = \rho_0$ ist $|\Delta E| \leq 10$ MeV und damit vernachlässigbar. Jedoch treten bei $3\rho_0$ erhebliche Differenzen auf, bis zu 100 MeV für $p = 1.25$GeV, was etwa 6 % der Gesamtenergie entspricht. Derartige Differenzen können beispielsweise Teilchenproduktion nahe der Schwelle beeinflussen. Der kollektive Fluß hingegen ist auch stark durch die Dynamik in späteren Phasen der Reaktion bestimmt, in denen die Impulsverteilung wieder zu wesentlich kleineren Impulsen hin

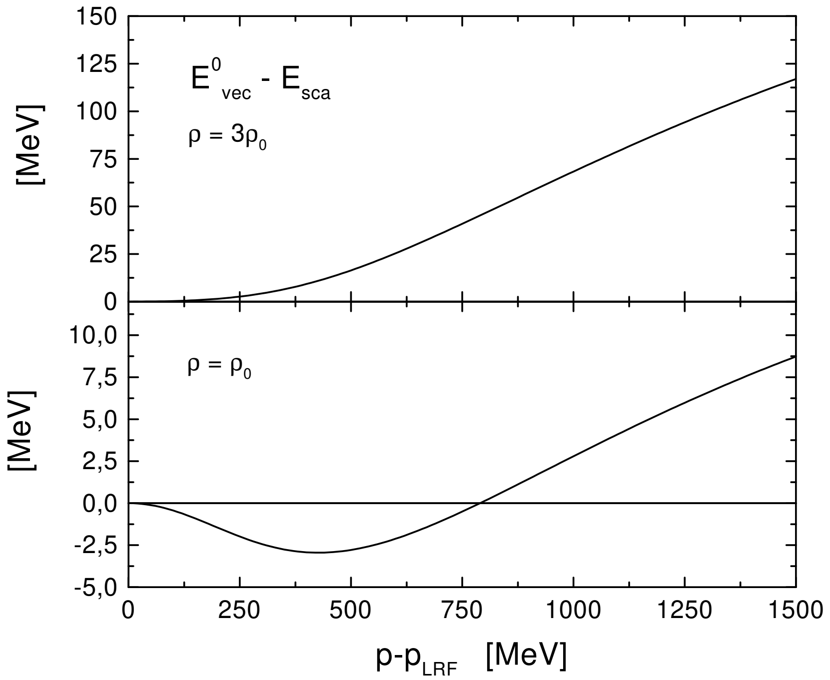


Abb. 2.5: Differenz der Einteilchenenergie bei Behandlung des Nukleonenpotentials als nullte Komponente eines Vektorfeldes zu der Energie bei Behandlung des Potentials als skalares in Abhängigkeit von Teilchenimpuls für verschiedene Kerndichten. Bei $3\rho_0$ sind Unterschiede bis zu 10 % der Gesamtenergie vorhanden, bei ρ_0 ist die Differenz vernachlässigbar.

verschoben ist, siehe Abbildung 2.4. Entscheidender ist hier der zusätzliche Faktor m^*/E mit $m^* = m + U$ vor den Potentialgradienten in der Propagation bei der Annahme eines skalaren Potentials, denn aus

$$H = \sqrt{p^2 + (m+U)^2} \tag{2.55}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{E} + \frac{m^*}{E}\,\vec{\nabla}_p U \\ \text{und} \qquad \dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \frac{m^*}{E}\,\vec{\nabla}_r U\ , \end{aligned} \tag{2.56}$$

womit die BUU-Gleichung (2.1) zu

$$\partial_t f + \left(\frac{\vec{p}}{E} + \frac{m^*}{E}\vec{\nabla}_p U\right)\vec{\nabla}_r f + \frac{m^*}{E}\vec{\nabla}_r U\,\vec{\nabla}_p f \;=\; I_{\text{coll}} \tag{2.57}$$

modifiziert wird. Dieser zusätzliche Vorfaktor liegt in der Größenordnung von 0.7 bei $p = 1$ GeV. Schnelle Teilchen erfahren also weniger Ablenkung bei der Behandlung des Potentials als skalares.

Für das CBUU-Modell wurde das Potential als nullte Komponente eines Vektorpotentials realisiert, d. h. direkt zur Energie addiert. Damit ergibt sich eine klare Trennung

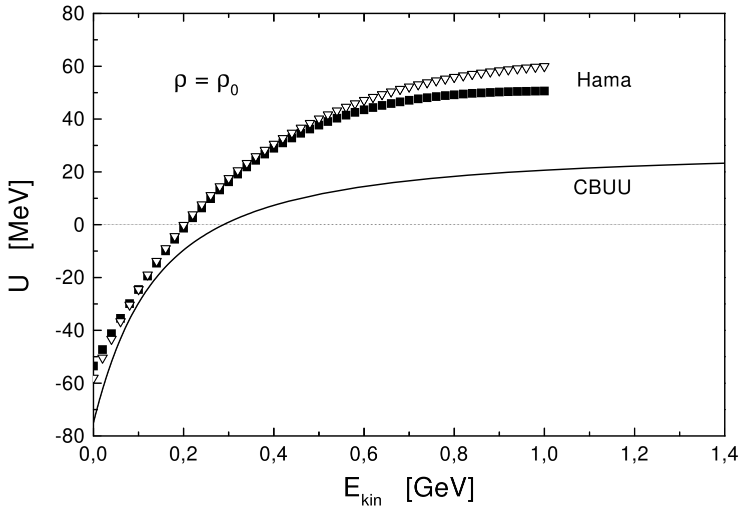


Abb. 2.6: Vergleich des CBUU-Potentials mit den beiden von Hama et al. [25] angegebenen Parametrisierungen des optischen Potentials bei normaler Kerndichte.

von kinetischer und potentieller Energie

$$E_{\text{ges}} = E_0 + T + U \;=\; m + \left(\sqrt{p^2 + m^2} - m\right) + U \;, \tag{2.58}$$

was bei der Überprüfung der Energieerhaltung die Berechnung der Energiedichte vereinfacht. Dieses Vorgehen entspricht auch der Behandlung des Potentials in der (nicht-relativistischen) Schrödingergleichung, in der sich die Gesamtenergie gemäß

$$E_{\text{ges}} = T + U \;=\; \frac{p^2}{2m} + U \tag{2.59}$$

berechnet. Darüberhinaus ist die Impulsabhängigkeit des an die Wiringa-Rechnungen [24] angefitteten Potentials ohnehin deutlich schwächer als das aus Streuexperimenten extrahierte optische Potential von Hama et al. [25] (siehe dazu nächsten Abschnitt), eine zusätzliche Abschwächung der Potentialgradienten durch Faktoren m^*/E führt zu ungenügender Ablenkung der Kerne im Schwerionenstoß. Darauf wird in Kapitel 6.6 noch einmal eingegangen.

Alternative Parametrisierungen

Die Parameter des CBUU-Potentials können prinzipiell auch an experimentell gewonnene Daten zur Impulsabhängigkeit des Potentials [25] und Annahmen über die Kompressibilität der Kernmaterie angefittet werden. Daraus ergäbe sich ein Potential mit wesentlich stärkerer Impulsabhängigkeit, wie aus Abbildung 2.6 ersichtlich ist. Im der vorliegenden Arbeit wurde diese Methode jedoch aus den folgenden Gründen nicht angewandt:

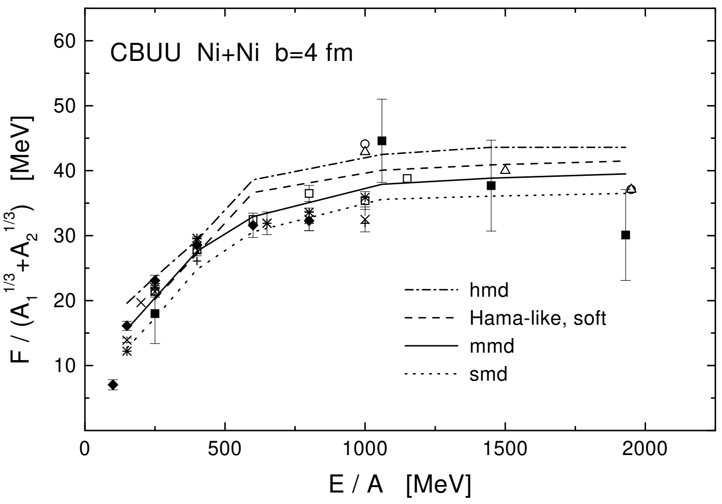


Abb. 2.7: Werte des transversalen Flußparameters F (vergleiche dazu Kapitel 6) für das CBUU-Potential mit weicher (K=210 MeV, "smd"), mittlerer (K=290 MeV, "mmd") und harter (K=380 MeV, "hmd") Zustandsgleichung im Vergleich zu den Flußwerten, die sich bei einer Anpassung der Potentialparameter aus Gleichung (2.46) an die Hama-Impulsabhängigkeit zusammen mit einer weichen Zustandsgleichung ergeben ("Hama-like").

1. Die experimentellen optischen Potentiale aus [25] sind durch Streuexperimente von Protonen an Kernen mit Massenzahlen von 40 bis 208 gewonnen. Die Aufspaltung der Potentiale in einen Oberflächen- und einen Volumenterm ist dabei Modellabhängig [25, 37, 38] und nur im gegebenen Energie- und vor allem Massenbereich kontrollierbar [25]. Eine Extrapolation zu höheren Massen (und um eine solche handelt es sich bei der Beschreibung nuklearer Kernmaterie) wird in [25] abgelehnt.

2. Ein Potential-Fit mit der funktionalen Form von Gleichung (2.46) an die Hama-Daten erlaubt nur die Einstellung einer weichen bis etwa mittleren Kompressibilität ($K \leq 250$ MeV). Für höhere Kompressibilitäten wird keine Konvergenz des Fitprogramms erreicht. Ein weiches Potential mit starker Impulsabhängigkeit bewirkt jedoch in etwa die gleiche Ablenkung der Materie in einer Schwerionenreaktion wie das mittelharte CBUU-Potential (K=290 MeV) mit seiner schwächeren Impulsabhängigkeit. Dies ist in Abbildung 2.7 gezeigt.

3. Das experimentelle Potential liegt nur für *eine* Kerndichte vor. Inwieweit der Verlauf des CBUU-Potentials (2.46) bei verschiedenen Kerndichten, z. B. seine auch bei hohen Impulsen anhaltende Attraktivität bei kleinen Dichten (vergleiche Abbildung 2.2), realistisch ist, kann nur eine Modellrechnung wie die von Wiringa et al. klären. Nimmt man deren Verlauf mit der Dichte als Referenz, ist es jedoch nur konsistent, auch ihre Impulsabhängigkeit zu übernehmen.

2.3.3 Numerische Lösung der BUU-Gleichung

Testteilchenmethode und Parallel-Ensemble–Algorithmus

Zur Lösung des Systems aus Transportgleichungen vom Typ (2.1) wird die Phasenraumdichte $f(\vec{r},\vec{p},t)$ durch "Testteilchen" approximiert,

$$f(\vec{r},\vec{p},t) = \sum_{i=1}^{n\cdot A} \delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i(t))\delta^3(\vec{p}-\vec{p}_i(t)) \; , \tag{2.60}$$

mit A als Massenzahl des Systems und n als der Zahl der Testteilchen pro Nukleon. Diese Testteilchen propagieren wie klassische Teilchen gemäß der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen: Integriert man die Vlasov-Gleichung

$$\partial_t f(\vec{r},\vec{p},t) + \left(\frac{\vec{p}}{E} + \vec{\nabla}_p U(\vec{r},\vec{p})\right)\vec{\nabla}_r f - \vec{\nabla}_r U \,\vec{\nabla}_p f \;=\; 0 \tag{2.61}$$

über ein Zeitintervall dt, so erhält man

$$f(\vec{r},\vec{p},t+dt) = f(\vec{r}-dt(\frac{\vec{p}}{E}+\vec{\nabla}_p U),\vec{p}+dt\vec{\nabla}_r U,t) \; , \tag{2.62}$$

woraus sich für die Testteilchen die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{E} + \vec{\nabla}_p U \quad \text{und} \quad \dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla}_r U \tag{2.63}$$

ergeben.

Im Falle von $n = 1$ repräsentiert jedes Testteilchen ein physikalisches Nukleon mit der Masse m_N, dem zugeordneten Wirkungsquerschnitt $\sigma_{NN\to X}$, etc.. Wählt man $n > 1$, so existieren zwei Möglichkeiten der Interpretation der Testteilchen. Zum einen kann man jedes Testteilchen als einen Teil eines physikalischen Teilchens auffassen, so daß ihm $\frac{1}{n}$-tel der Masse, des Wirkungsquerschnittes, u.s.f. des physikalischen Teilchens zugeordnet sind. Konsequenterweise wechselwirkt es mit allen anderen $n \cdot A - 1$ Testteilchen, genau wie jedes Nukleon mit allen anderen $A-1$ Nukleonen in Wechselwirkung steht. Dies wird als *full ensemble* – Methode bezeichnet.

Die andere Methode trägt den Namen *parallel ensemble* und bedeutet, daß man dieselbe Reaktion n-mal nebeneinander ablaufen läßt und ein Testteilchen eines Ensembles ausschließlich mit den anderen Testteilchen *desselben* Ensembles wechselwirken kann. Folglich trägt wie im Fall $n = 1$ jedes Testteilchen die volle Masse m_N, den vollen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{NN\to X}$, etc.. Die einzige Koppelung der Ensembles untereinander geschieht über die Berechnung des Mittlere-Feld-Potentials, das aus der über alle Ensembles gemittelten Dichte an einem Ort und dem Ensemble-gemittelten mittleren lokalen Impuls an diesem Ort berechnet wird und in allen Ensembles Gültigkeit besitzt. Diese Methode wird im CBUU-Modell angewendet.

Effekte der Potentialkopplung

Durch die Koppelung der parallelen Ensembles über das Potential resultieren bei einzelnen Flußgrößen Korrelationen zwischen den Ensembles. Abgesehen von den wesentlich stärkeren numerischen Fluktuationen ergibt 1 Rechnung (Run) mit 150 Ensembles nicht das gleiche Resultat wie 150 Rechnungen mit jeweils 1 Ensemble. Dies wird besonders am Beispiel des Flußwinkels deutlich:

Bei einer semizentralen Kollision prallen die sogenannten Spektatoren an der Reaktionszone, dem Feuerball, ab und werden um einige Grad aus ihrer ursprünglichen Flugrichtung abgelenkt (zum generellen Ablauf einer Schwerionenkollision sei an dieser Stelle auf Kapitel 4 verwiesen). Trägt man in der Endphase einer solchen Kollision die Zahl der Teilchen gegen ihren Flugrichtung auf, so ergibt sich eine Verteilung, deren Mittelwert man als Flußwinkel bezeichnet.

Dieser Flußwinkel ist nun in allen parallelen Ensembles eines Runs relativ einheitlich, da das attraktive Potential die Spektatorennukleonen quer über die Ensembles koppelt; zwischen unabhängigen Runs kann er hingegen stark variieren. Dies zeigt die Abbildung 2.8: In der oberen Reihe sind jeweils die Flußwinkelverteilungen dreier einzelner Runs mit je 150 Ensembles aufgetragen. Für jedes dieser Ensembles wurde der Flußwinkel dabei separat bestimmt und nur für die Abbildung wieder einem Run zugeordnet. Es ergeben sich speziell bei der "niedrigen" Energie von 400 AMeV sehr enge Verteilungen. Die mittleren Flußwinkel der Run-Verteilungen variieren stärker als die Verteilungen selbst breit sind. Selbst bei einer größeren Zahl unabhängiger Runs (untere Zeile) ist es nicht möglich, eine Breite der Gesamtverteilung zu bestimmen, die alleine mit experimentellen Ergebnissen vergleichbar wäre. Bei 1 AGeV sind diese Effekte weniger ausgeprägt, da bei höheren Energien das Nukleonenpotential eine geringere Rolle spielt.

Konsequenterweise kann man Flußgrößen, die derart sensitiv auf die Potentialkopplung reagieren, nicht im Parallel-ensemble-Algorithmus ausrechnen und die gewonnenen Verteilungen mit dem Experiment vergleichen. Im Full-ensemble-Algorithmus wäre die Situation in gewisser Weise noch unbefriedigender, da sich hier in den Abbildungen der unteren Reihe von Bild 2.8 nur 6 einzelne Peaks ergeben würden. Die Zahl der Ensembles pro Run zu reduzieren und dafür mehr Rechnungen durchzuführen, vergrößert jedoch nur die numerischen Fluktuationen und ist kein Alternative. Man muß daher im Einzelfall genau prüfen, wie sensitiv eine gegebene Größe auf den verwendeten Algorithmus ist. Für die Rechnungen in dieser Arbeit wurde generell die Parallel-ensemble-Methode verwendet.

Numerische Vereinfachung des Potentials

Die in Kapitel 2.3.3 beschriebene Testteilchenmethode führt dazu, daß der Integralterm in Gleichung (2.46) in eine Summe über alle Testteilchen übergeht:

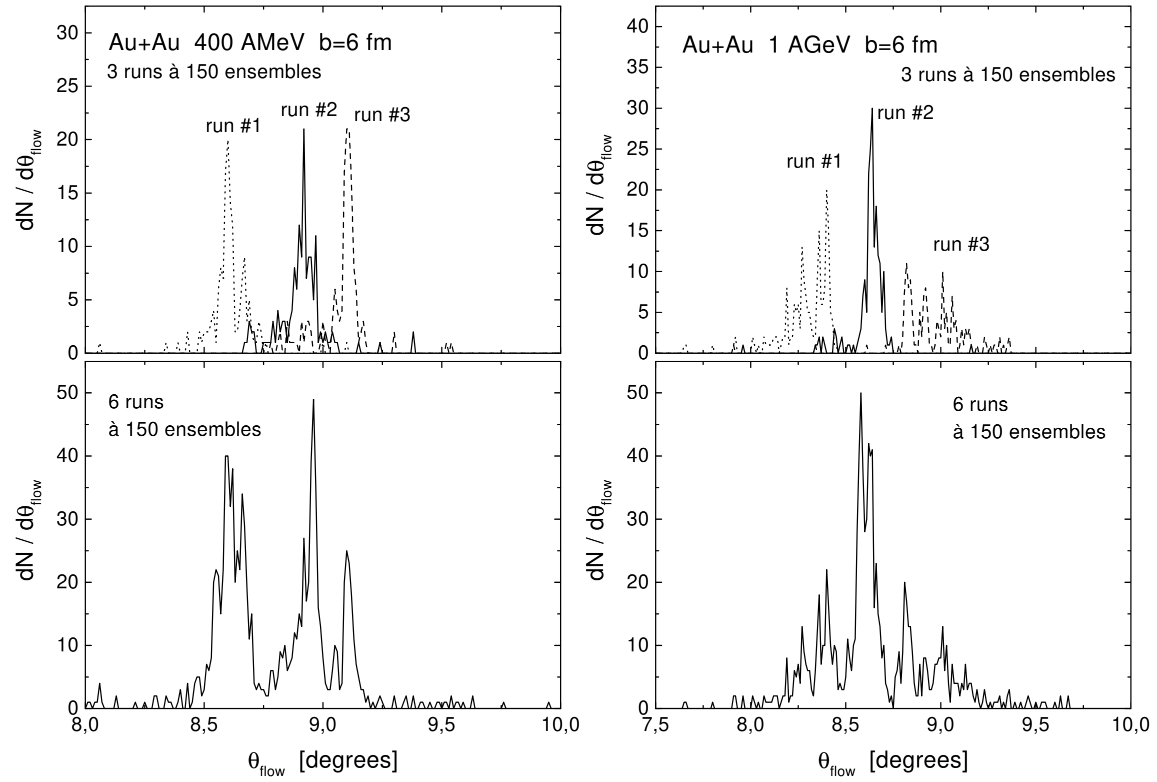


Abb. 2.8: Flußwinkelverteilungen für semizentrale Au+Au - Kollisionen, berechnet mit dem CBUU-Modell. Bei 400 AMeV (linke Spalte) kann man deutlich erkennen, daß alle Ensembles innerhalb eines Runs sehr ähnliche Ergebnisse liefern. Bei 1 AGeV (rechts) spielt die Koppelung der Ensembles über das Mittlere-Feld-Potential eine geringere Rolle.

$$\int d^3p' \, \frac{f(\vec{r},\vec{p}\,')}{1+\left(\frac{\vec{p}-\vec{p}\,'}{\Lambda}\right)^2} \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n\cdot A} \frac{1}{1+\left(\frac{\vec{p}-\vec{p}_i}{\Lambda}\right)^2} \,. \tag{2.64}$$

Zusammen mit der in Kapitel 2.3.2 beschriebenen LRF-Methode zu Bestimmung des Potentials führt dies zu einem hohen numerischen Aufwand, wenn die Zahl der Testteilchen groß ist. Da diese üblicherweise im Bereich $n = 150 \ldots 2000$ gewählt wird, wurde versucht, die Berechnung des Potentials zu vereinfachen.

Unter der Annahme, daß die Kernematerie lokal im Grundzustand ist, d. h. alle Impulszustände bis zur Fermikante besetzt sind,

$$f(\vec{r},\vec{p}) = \Theta(\vec{p}_F(\vec{r}) - \vec{p}) \quad \text{mit} \quad p_F(\vec{r}) = \left(\frac{3\pi^2}{2}\rho(\vec{r})\right) \,, \tag{2.65}$$

kann man den Integralterm in Gleichung (2.46) analytisch auswerten und erhält für das Potential den Ausdruck

$$U(\rho,\vec{p}) \;\; = \;\; U_{\text{Skyrme}} \; + \; \frac{4C}{(2\pi)^3\rho_0}\,\pi\Lambda^3$$

$$\times \left[\frac{p_F^2 - \Lambda^2 - p^2}{2p\Lambda} \ln \frac{(p+p_F)^2 + \Lambda^2}{(p-p_F)^2 + \Lambda^2} + \frac{2p_F}{\Lambda} \right. \\ \left. -2 \left(\arctan \frac{p+p_F}{\Lambda} - \arctan \frac{p-p_F}{\Lambda} \right) \right] . \qquad (2.66)$$

In diese Gleichung geht nur der Impuls des betrachteten Teilchens ein, demzufolge reduziert sich die Zahl der notwendigen Lorentztransformationen erheblich. Ebenso entfällt ein aufwendiges Sortieren der Teilchen, das zur Berechnung der Summe (2.64) über die *umgebenden* Teilchen notwendig ist.

In gewisser Weise stellt Gleichung (2.66) eine Erweiterung des für die Initialisierung eines Kerns angenommenen *local Thomas-Fermi*-Ansatzes (2.65) dar. Dieser ist für kalte Kernmaterie sicher gerechtfertigt, im Verlauf einer Schwerionenkollision mit entsprechender Aufheizung der Materie jedoch fragwürdig. Abbildung 2.9 zeigt die Abweichung des nach Gleichung (2.66) vom analytisch berechneten Potential $|U_{\mathrm{LTF}} - U_{\mathrm{int}}|/U_{\mathrm{int}}$ für eine zentrale Au+Au - Kollision bei 1.5 AGeV. Zu Beginn der Hochdichtephase bei 12.5 fm/c stimmen die beiden Berechnungsmethoden nur noch für 33 % der Teilchen im Rahmen von 10 % überein, für 1.6 % aller Nukleonen ist die Differenz sogar größer als 100 %. Dies ist jedoch keine systematische Über- oder Unterbewertung des Potentials, sondern tritt sowohl in positiver wie auch negativer Richtung auf. Ähnlich wie bei der Diskussion in Kapitel 2.3.2 sind Effekte in Bezug auf die Teilchenproduktion möglich, der kollektive Fluß ist jedoch durch die gesamte zeitliche Reaktionsdynamik bestimmt und wenig "anfällig" gegenüber stochastischen Fehlberechnungen des Potentials. Im Rahmen dieser Arbeit konnte keine Sensitivität der Ergebnisse bezüglich verschiedener Berechnungsmethoden des Potentials festgestellt werden, so daß im allgemeinen der analytische Ausdruck 2.66 verwendet wurde.

2.4 Numerische Stabilität des Modells

Numerische Fluktuationen und Ungenauigkeiten führen zum einen zu einem "Rauschen" in der Potentialberechnung, durch das künstliche Gradienten entstehen, und zum anderen auch dazu, daß die Bewegungsgleichungen der Teilchen an sich nur ungenau gelöst werden. Zum dritten ist nicht unmittelbar klar, ob man einen Kern im Grundzustand oder mit einer hohen Anregungsenergie initialisiert hat, der dann starke Schwingungen des mittleren Radius R_{rms} aufweist und möglicherweise instabil ist. Derartige rein numerische Probleme können zu Schwankungen der Ergebnisse zum transversalen Fluß um bis zu einen Faktor 2 führen [39].

Im CBUU-Modell werden die numerischen Fluktuationen auf zwei Arten gering gehalten. Zum einen tragen zum Potential an einem Ort $\vec{r}$ bzw. einer Gitterzelle $j_{\vec{r}}$ auch die Teilchen in den benachbarten Zellen bei, zur genaueren Beschreibung dieses Smearing-Algorithmus sei auf Anhang A.2 verwiesen. Zum anderen wird die Propagationsgleichung der Testteilchen mit einem Prädiktor-Korrektor-Verfahren gelöst. Es ist ausführlich in [3] und [40] beschrieben. Die Initialisierung der Kerne erfolgt im CBUU-

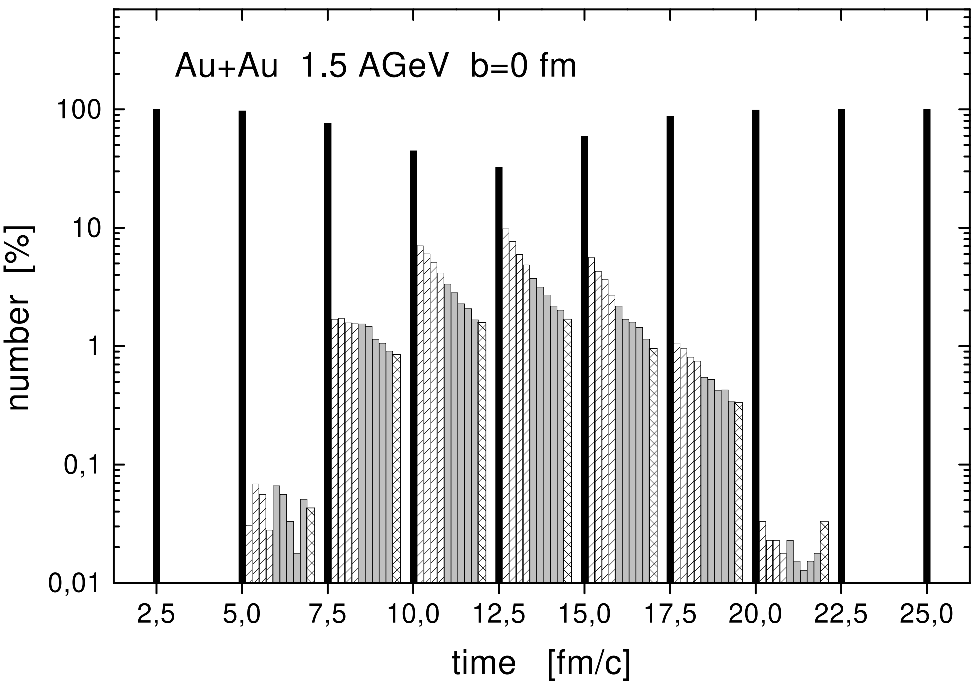


Abb. 2.9: Abweichung des mit der LTF-Näherung berechneten Potentials (2.66) von der direkten Summe (2.64) für verschiedene Zeiten während einer zentralen Au+Au - Kollision bei 1.5 AGeV. Aufgetragen ist jeweils alle 2.5 fm/c die relative Anzahl der Nukleonen, für die die Berechnung mit der LTF-Näherung im Rahmen von 10 % Gültigkeit hat (schwarze Histogramme direkt an der Zeitangabe), die relative Anzahl der Nukleonen, für die die LTF-Näherung im Rahmen von 10-20, 20-30, 30-40 und 40-50 % korrekt ist (schraffierte Histogramme rechts daneben), die Anzahl, für die die Abweichung zwischen 50-60, 60-70, 70-80, 80-90 und 90-100 % liegt (graue Histogramme) und für die sie über 100 % liegt (doppelt schraffierte unmittelbar links vor der nächsten Zeitangabe). Dabei handelt es sich um Absolutbeträge der Abweichungen, die Differenzen treten in positiver wie negativer Richtung auf.

Modell gemäß einer Woods-Saxon-Verteilung, wobei für die Parameter der Verteilung Werte aus Hartree-Fock Rechnungen für stabile Kerne aus [41] verwendet werden, Details siehe Anhang A.2. Zusammen mit dem Smearing- und dem Prädiktor-Korrektor-Verfahren entstehen so zeitlich stabile Kerne. So liegt die Schwankung der mittleren quadratischen Radien der Kerne unter 3 %. Eine detaillierte Studie der Stabilitätseigenschaften des CBUU-Modells wurde in [3] und [42] durchgeführt.

2.5 Energieerhaltung

Die Energieerhaltung eines Modells beeinflußt sowohl die Ergebnisse zur Teilchenproduktion wie auch zum Nukleonenfluß [43]. Zur Überprüfung ist es notwendig, ein aus einer potentiellen Energiedichte ableitbares Potential (vergleiche Kapitel 2.3.2) zu verwenden. Die Gesamtenergie ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
E_{ges} &= T + V \\
&= \sum_i t_i + \int d^3r\, W(\rho, \vec{r}) \\
&= \sum_i \left(\sqrt{m_i^2 + \vec{p}_i^{\,2}} - m_i \right) \\
&\quad + \int d^3r \left(A \frac{\rho(\vec{r})^2}{\rho_0} + B \frac{\rho(\vec{r})^{(\tau+1)}}{\rho_0^\tau} + \frac{C}{\rho_0} \int d^3p\, d^3p' \, \frac{f(\vec{r},\vec{p}) f(\vec{r},\vec{p'})}{1 + \left(\frac{\vec{p}-\vec{p'}}{\Lambda}\right)^2} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n\times A} \left(\sqrt{m_i^2 + \vec{p}_i^{\,2}} - m_i \right) \\
&\quad + \sum_{x,y,z} \left(A \frac{\rho^2}{\rho_0} + B \frac{\rho^{(\tau+1)}}{\rho_0^\tau} + \frac{C}{n\rho_0} \sum_{j,k} \frac{1}{1 + \left(\frac{\vec{p_j}-\vec{p_k}}{\Lambda}\right)^2} \right) .
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

Dabei läuft die Summe über die kinetischen Energien über alle $n \times A$ Testteilchen, und das Ortsraumintegral $\int dxdydz\, W$ wird als Summe über alle Gitterzellen $\sum_{x,y,z}$ genommen. Die Summe $\sum_{j,k}$ läuft über alle Testteilchen in der Zelle (x, y, z), die Impulse $\vec{p_j}, \vec{p_k}$ gelten relativ zum lokalen Ruhesystem (LRF).

Aufgrund numerischer Ungenauigkeiten ist immer mit einer Abweichung von einer vollständigen Energieerhaltung zu rechnen. Diese sollte jedoch nicht zu groß sein. Abbildung 2.10 zeigt die gesamte Energie pro Nukleon in einer zentralen Au+Au (links) und Ca+Ca – Kollision (rechts) bei 1 AGeV, im oberen Teil der Abbildung für den sogenannten Kaskadenmodus, d. h. ohne mittleres Feld, im mittleren Teil im reinen Mittlere-Feld-Potential ohne Kollisionen (MF), und im unteren Teil für die "volle" BUU-Simulation.

Obwohl für die individuellen Teilchenkollisionen im CBUU-Stoßterm Energieerhaltung auf dem 10^{-5}–Niveau gefordert wird, zeigt sich im Kaskadenmodus ein stetiger Energieverlust von 2 %. Er ergibt sich aus den ca. 2000 inelastischen Kollisionen und Zerfällen im Falle des Au+Au. Für die Ca+Ca - Rechnungen, die aus [3] übernommen wurden, wurde Energie- und Impulserhalt auf dem 10^{-3}–Niveau gefordert, was bei knapp 100 Kollisionen und Zerfällen ebenfalls zu einer Energieverletzung im Prozentbereich führt. Der MF-Modus erhält die Energie in der Summe nahezu vollständig, zeigt aber in der Hochdichtephase der Kollision, zwischen t=7.5 fm/c und t=25 fm/c, einige Abweichungen in positiver wie negativer Richtung. Diese stammen von dem Glättungsalgorithmus für die mittleren Felder her, der nicht nur die numerischen Fluktuationen, sondern auch steile physikalische Gradienten ausschmiert, die vor allem zu Beginn einer Schwerionenkollision existieren, vergleiche Kapitel 4. Die volle CBUU-Simulation zeigt für Au+Au im wesentlichen das Verhalten des Kaskadenmodus mit einem Energieverlust von ca. 2 %; dies ist ein sehr guter Wert, verglichen mit anderen Simulationen [43]. Ca+Ca zeigt im vollen BUU-Modus das Verhalten das des MF-Modus mit einer insge-

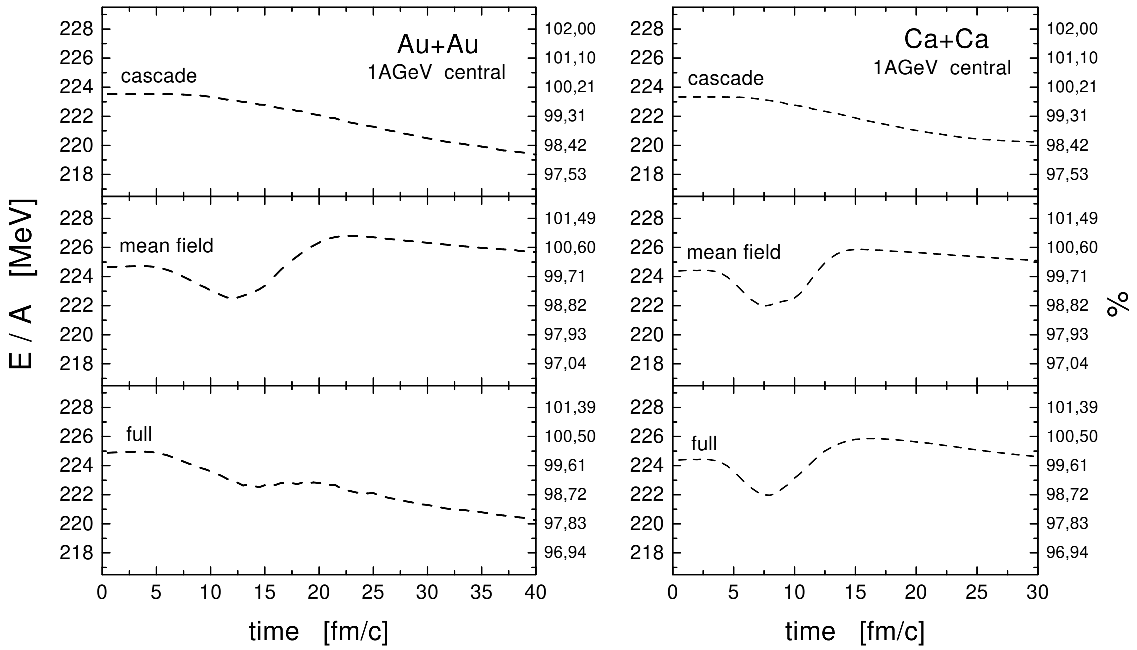


Abb. 2.10: Gesamtenergie pro Nukleon minus Ruhemasse in Verlauf einer zentralen 1 AGeV Au+Au (links) und Ca+Ca (rechts) - Kollision. Obere Zeile jeweils Kaskadenmodus, mittlere Zeile nur Propagation im mittleren Feld und untere Zeile mittleres Feld plus Kollisionen.

samt erhaltenen Energie. Die Unterschiede im Verhalten zwischen Ca+Ca und Au+Au sind in der wesentlich geringeren Zahl der Kollisionen im Falle des Ca begründet.

2.6 Drehimpulserhaltung

Eine andere Erhaltungsgröße in einer Schwerionenkollision ist der Drehimpuls. Er ist insbesondere für den transversalen Fluß interessant. Die Erhaltung des Drehimpulses in einem Transport- bzw. einem Kaskadenmodell wurde bereits in [43, 44] untersucht, wobei in [44] ein wesentlicher Effekt einer Drehimpulserhaltung in den individuellen Teilchen-Teilchen-Kollisionen, sowie ein Effekt der Wahl repulsiver oder attraktiver Streutrajektorien festgestellt wurde. Eine derartige Aussage wird in [43] nicht gemacht. Im Folgenden wird daher zum einen die Drehimpulserhaltung des CBUU-Modells sowie zum anderen der Einfluß von Änderungen des Stoßterms untersucht.

Auslöser für die Untersuchungen in [43, 44] war die Tatsache, daß in Transportmodellen im allgemeinen der Polarwinkel in einer NN-Streuung gemäß der experimentell gemessenen Winkelverteilung gewählt wird. Der Azimuthalwinkel wird hingegen zufällig festgelegt, was unmittelbar die Drehimpulserhaltung in der Streuung zerstört. Die Beschränkung auf repulsive Trajektorien in [44] wurde aus der Repulsivität der NN-Wechselwirkung bei höheren Energien motiviert. Ein unmittelbarer Effekt sollte sich dabei aus der geometrischen Interpretation des Wirkungsquerschnitts gemäß

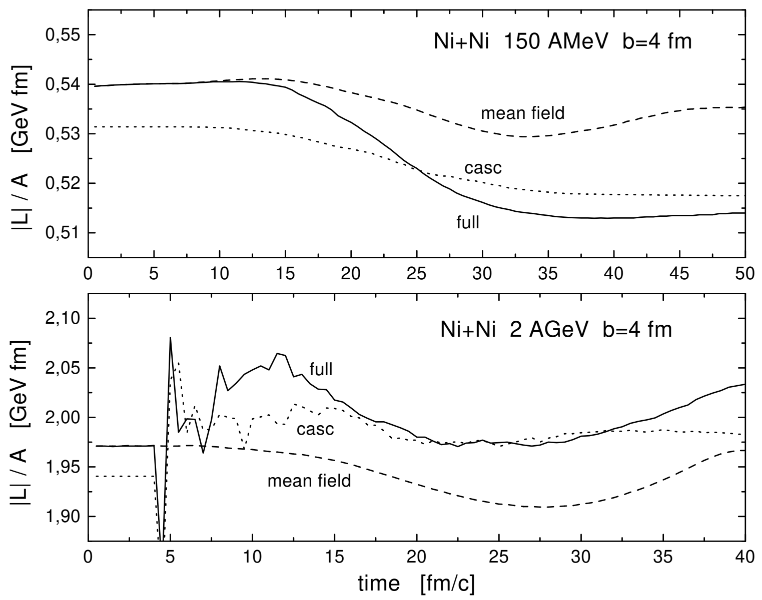


Abb. 2.11: Drehimpuls pro Nukleon für eine semizentrale Ni+Ni - Kollision bei verschiedenen Energien. Gepunktete Linie jeweils Kaskadenmodus, gestrichelte Linie nur Propagation im mittleren Feld und durchgezogene Linie mittleres Feld plus Kollisionen.

$b = \sqrt{\sigma}/\pi$ ergeben, da die Testteilchen zum Zeitpunkt der Kollision einen endlichen Abstand voneinander haben. Speziell bei niedrigen Energien ergibt sich daraus eine andere Ortsraumverteilung bei der Wahl repulsiver oder attraktiver Orbits.

Abbildung 2.11 zeigt den Betrag des totalen Drehimpulses pro Nukleon $|L|$, gemittelt über die Ensembles, für eine Ni+Ni - Kollision:

$$|L| = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |l_j| \; , \quad |l_j| = \left(l_{jx}^2 + l_{jy}^2 + l_{jz}^2\right)^{1/2} \; , \tag{2.68}$$

mit

$$l_{jx} = \frac{1}{A}\sum_{i\in j}(r_z p_y - r_y p_z) \; , \; l_{jy} = \ldots \; , \; l_{jz} = \ldots \; , \tag{2.69}$$

wobei n die Zahl der Testteilchen pro Nukleon und A die Massenzahl des Systems ist. Die Summe i in Gleichung (2.69) läuft über alle Hadronen (Baryonen und Mesonen) des Ensembles j.

Bei 150 AMeV ist der Drehimpuls im Kaskadenmodus im Bereich von 2.5 % erhalten. Wenn man Anfangs- und Endwert vergleicht, erhält die Propagation alleine den Drehimpuls bis auf 0.2 %, im Verlauf der Kollision ist eine vorübergehende Verletzung um ca. 1 % vorhanden. Diese kommt durch das Abstoppen und die Abstoßung der Kerne durch die Repulsion des Potentials zustande. Im vollen BUU-Modus mit Kollisionen scheint sich der Drehimpulsverlust durch das mittlere Feld in der Hochdichtephase und der durch die Kollisionen zu addieren, es ergibt sich eine Gesamtabweichung von 4.7 %. Bei 2 AGeV ist die Situation etwas anders: Zwar ergibt der Kaskadenmodus auch hier eine Abweichung von 2.7 % und der MF-Modus eine temporäre Abweichung um 1 %, doch folgt der Verlauf der vollen BUU-Rechnung eher der MF-Rechnung und endet mit einer Gesamtabweichung von 3.8 %.

Diese geringen Abweichungswerte von einer vollständigen Drehimpulserhaltung implizieren bereits einen nur geringen Einfluß einer anderen numerischen Behandlung des Stoßterms. Darüberhinaus haben die Abweichungen bei 150 AMeV und 2 AGeV verschiedene Vorzeichen, so daß offensichtlich elastische und inelastische Kollisionen verschieden wirken.

2.6.1 Modifikation des Stoßterms

Wie in Abschnitt 2.3.3 beschrieben, wird das BUU-Gleichungssystem mit Hilfe der Testteilchenmethode im Parallel-Ensemble-Algorithmus gelöst. Jedes Testteilchen kann mit allen anderen Testteilchen innerhalb des *gleichen* Ensembles kollidieren. Das Kriterium für eine Kollision ist dabei, daß sich die Testteilchen im Ortsraum bis auf eine Distanz

$$b_{\text{max}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \tag{2.70}$$

genähert haben, wobei für σ in einer ersten Näherung der maximal überhaupt mögliche Wirkungsquerschnitt, 80 mb für Baryon-Baryon-Kollisionen und 200 mb für Meson-Baryon-Kollisionen, angesetzt wird. Dann wird geprüft, ob die beiden Teilchen in dem gegebenen Zeitschritt den Punkt ihrer nächsten Annäherung erreichen. Dies geschieht mit dem Kodama- Kriterium [45], das im Anhang A.2 genauer dargestellt wird. Falls ja, wird das Kriterium (2.70) ein zweites mal mit dem maximalen Wirkungsquerschnitt bei dem für dieses Teilchenpaar gegebenen $\sqrt{s}$ überprüft. σ ist dabei die Summe der Wirkungsquerschnitte für alle Reaktionen, die bei der gegebenen Energie möglich sind. Ist der tatsächliche Abstand b kleiner b_{max}, so reagieren die Teilchen, wobei der Reaktionskanal (elastische Streuung, Erzeugung der jeweiligen Resonanzen, direkte Pionproduktion) gemäß des Verhältnises der Einzelwirkungsquerschnitte zum Gesamtwirkungsquerschnitt zufällig gewählt wird.

Üblicherweise wird nun im CBUU-Modell der Polarwinkel der Impulse im Endzustand einer elastischen Streuung analog der experimentell gemessenen Winkelverteilung gewählt, für den $NN \to N\Delta$–Prozeß parametrisiert man ihn anhand der gemessenen Pionenwinkelverteilung und für alle übrigen Streuprozesse setzt man ihn isotrop an. Der Azimuthalwinkel wird zufällig gewählt. Mit dieser Vorgehensweise zerstört man jedoch die Drehimpulserhaltung in den individuellen Teilchen-Teilchen-Kollisionen aus zwei Gründen:

1. Durch die zufällige Wahl des Azimuthalwinkels wird die Richtung des Drehimpulsvektors geändert (Abbildung 2.12 links).
2. Wenn zu einer bestimmten Zeit mit einer gegebenen räumlichen Konfiguration

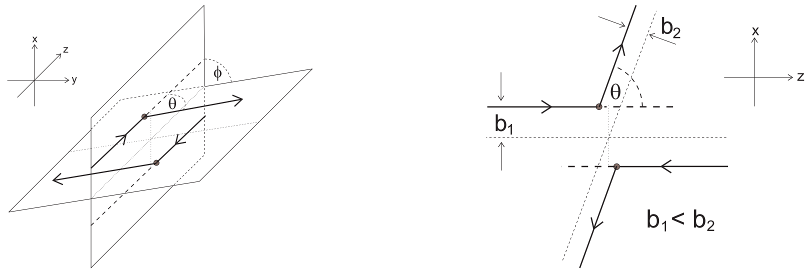


Abb. 2.12: Mögliche Kollisionsgeometrie und Lage der Endimpulsvektoren in einer Teilchen-Teilchen - Kollision. In beiden Fällen kommt es zu einer Verletzung der Drehimpulserhaltung.

innerhalb der Reaktionsebene die Impulsrichtung geändert wird, ändert sich der Betrag des Drehimpuls (Abbildung 2.12 rechts).

Einfach zu realisieren ist eine Erhaltung der Reaktionsebene für die elastische NN-Streuung. Bei inelastischen Kollisionen hingegen kann man lediglich die Ebene z.B. für das $N\Delta$-System erhalten; zerfällt das Δ später, "weiß" es nichts mehr von seiner Herkunft und die Impulsrichtungen des auslaufenden Pions und Nukleons werden zufällig gewählt. Damit ist eine Erhaltung der Reaktionsebene für beide Endzustands-*Nukleonen* im Rahmen des Resonanzmodells nicht möglich.

Eine explizite Erhaltung des Drehimpulses in den elastischen Teilchen-Teilchen-Kollisionen in einem BUU-Modell wurde bereits in [43] untersucht. Sie stößt jedoch auf konzeptionelle Probleme: Energie und Drehimpuls legen zusammen entweder den Reaktionszeitpunkt oder die Impulswinkel des Endzustandes vollständig fest, vergleiche Abbildung 2.12 rechts. Die Reaktionszeit ist nun im BUU-Modell durch den Zeitpunkt der nächsten Annäherung gegeben und darüberhinaus durch die Zeitschritte von üblicherweise 0.5 fm/c beschränkt. Die Winkelverteilung ist hingegen dem Experiment entnommen und sollte nicht zugunsten einer zufälligen Kollisionsgeometrie geändert werden. Daher wurden in [43] die Reaktionspartner nach der Kollision im Orts- oder Impulsraum verschoben, was jedoch eine künstliche Bewegung der Teilchen hervorruft und die zeitliche Entwicklung der Phasenraumdichte der Nukleonen stört.

Diese Arbeit beschränkt sich daher auf die Erhaltung der Reaktionsebene, wobei ähnlich zu der relativistischen Kaskade in [44] wahlweise eine Erzwingung attraktiver oder repulsiver Streutrajektorien erfolgen konnte. Die sich ergebenden Unterschiede sind jedoch in allen Fällen minimal. Dies zeigt Abbildung 2.13 im oberen Teil mit einen Vergleich der Drehimpulserhaltung einer semizentralen Ni+Ni - Kollision bei 150 AMeV, einmal im "normalen" Modus mit zufälliger Wahl der Azimuthalwinkel, und zum anderen mit Erhaltung der Reaktionsebene.

Eine möglicherweise sensitivere Größe ist die Azimuthalwinkelverteilung $dN/d\phi$ der in die Vorwärtshemisphäre gestreuten Teilchen einer semizentralen Schwerionenkollision. Abbildung 2.14 zeigt die Azimuthalwinkelverteilung für Kollisionen verschieden schwerer Systeme, simuliert im Kaskadenmodus mit dem normalen Stoßterm und mit

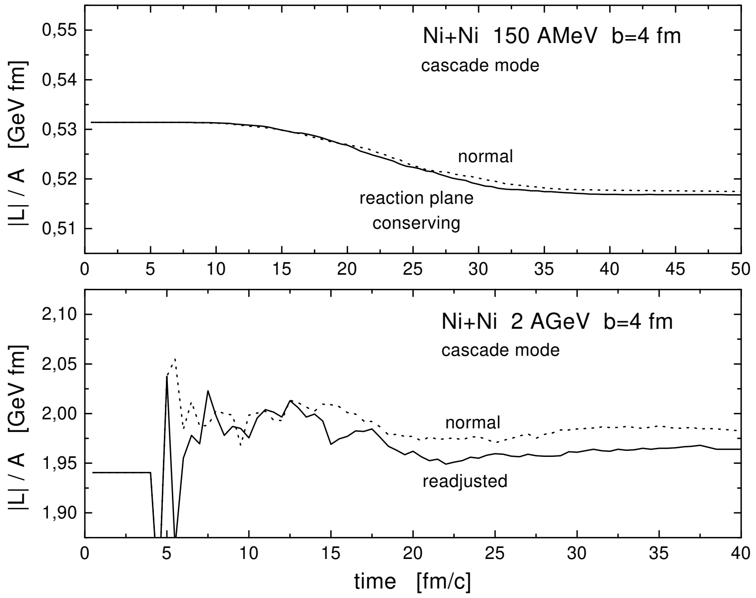


Abb. 2.13: Drehimpuls pro Nukleon für eine semizentrale Ni+Ni - Kollision bei verschiedenen Energien. Oberes Bild: Rechnung mit Erhalt der Reaktionsebene in den individuellen Teilchen-Teilchen-Kollisionen (durchgezogene Linie) im Vergleich zur normalen Rechnung mit zufälliger Wahl der Azimuthalwinkel (gepunktete Linie). Unteres Bild: Rechnung mit Verschiebung des absorbierenden Baryons in einer $\pi N \to R$-Reaktion in den Schwerpunkt des πN-Systems (durchgezogene Linie) im Vergleich zu einer normalen Rechnung (gepunktete Linie).

Erhalt der Reaktionsebene. Erwartungsgemäß sind die Effekte für einen *pp*–Stoß dramatisch. Bereits in einer *dd*–Kollision jedoch sind die Unterschiede weit kleiner, da die Reaktionsebenen der individuellen Teilchen-Teilchen-Kollisionen nicht in der Reaktionsebene des Systems, sondern mehr oder weniger zufällig liegen. Konsequenterweise nimmt die Bedeutung einer Reaktionsebenenerhaltung mit zunehmender Systemmasse rasch ab, vergleiche Tabelle 2.2. Bei zunehmender Einschußenergie nimmt darüberhinaus die Zahl der inelastischen Kollisionen zu, für die – wie oben dargelegt – eine Erhaltung der Reaktionsebene nicht sinnvoll festgelegt werden kann.

Einen deutlicheren Effekt als die Reaktionsebenerhaltung auf die Erhaltung des Drehimpulses zeigt hingegen eine Modifikation der Mesonabsorption: Möglichkeit und Zeitpunkt z. B. einer Pion-Absorption werden im CBUU-Modell wie bei den Baryon-Baryon-Kollisionen mit dem Kodama-Kriterium festgelegt. Wird das Pion absorbiert, so entsteht am Ort $\vec{r}_N$ des Nukleons eine Resonanz mit Impuls $\vec{p} = \vec{p}_N + \vec{p}_\pi$; das Pion ist quasi in die Resonanz "hineingesprungen". Alternativ dazu bietet sich an, die Resonanz im gemeinsamen Schwerpunkt von Pion und Nukleon entstehen zu lassen. Dieses Verfahren erhält den Pion-Nukleon-Drehimpuls relativ zum Laborsystem zwar auch nicht exakt, doch ist zu erwarten, daß die Drehimpulsverletzung im Mittel kleiner ist als die des normalen Verfahrens. Das Ergebnis dieser Modifikation des Stoßterms zeigt Abbildung 2.13 im unteren Teil. Die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses verbessert sich

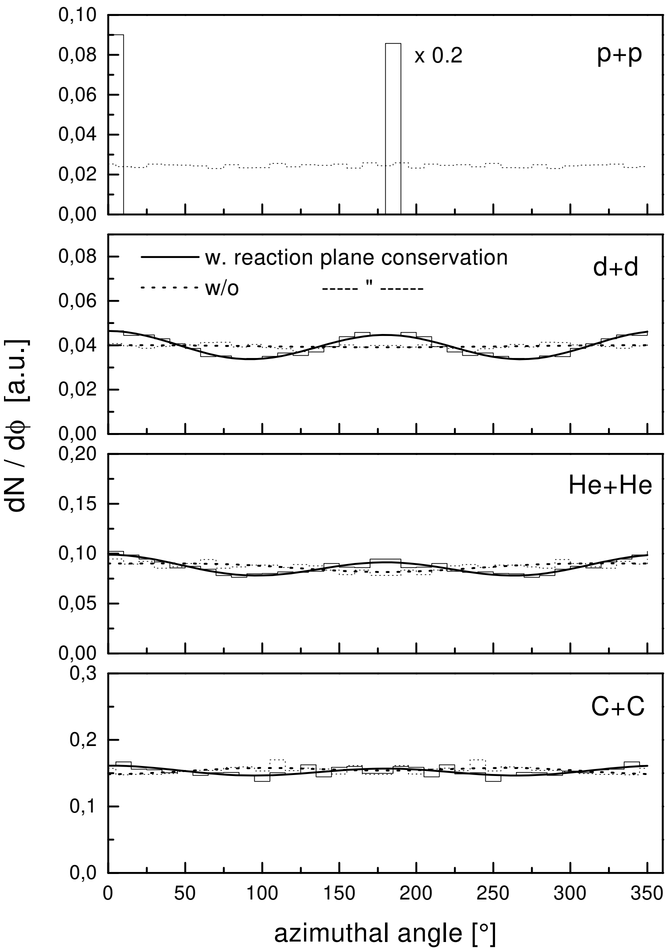


Abb. 2.14: Azimuthalwinkelverteilung aller in die Vorwärtshemisphäre gestreuten Teilchen für semizentrale Kollisionen bei 150 AMeV und verschiedene Systemmassen, jeweils mit (durchgezogene Histogramme) und ohne Konstanthaltung der Reaktionsebene (gepunktete Histogramme). Ab der *dd*-Kollision sind die Ergebnisse mit einem Cosinus-Polynom gefittet (Linien).

von 2.2 % auf 1.2 %.

Ein Nachteil dieser Modifikation ist, wie in den in [43] besprochenen Verfahren zu Energie- und Drehimpulserhaltung, die Erzeugung einer künstlichen Baryonenbewegung durch die Relokalisierung, aufgrund der in der vollen BUU-Rechnung dann möglicherweise die mittleren Felder mit den tatsächlichen Nukleonendichten nicht mehr übereinstimmen. Daher wurde für alle folgenden Untersuchungen auf den normalen CBUU-Stoßterm zurückgegriffen, zumal bei beiden in diesem Abschnitt besprochenen Modifikationen, Reaktionsebenenerhalt und Änderung der Pionabsorption, im Rahmen der statistischen Fehler keine Änderung des transversalen Flusses $F = \frac{d\langle p_x \rangle}{dy}$, $-0.5 \leq y/y_0 \leq 0.5$ festgestellt werden konnte, sowohl für Ni+Ni wie auch für Au+Au bei 150 AMeV und 2 AGeV.

System	b [fm]	R_{with}	$R_{\text{w/o}}$	av. coll. number
pp	0.2	∞	1.02 ± 0.02	1
dd	1	1.35 ± 0.02	1.00 ± 0.01	1,24
^{4}He ^{4}He	1	1.22 ± 0.02	0.97 ± 0.02	1,41
^{12}C ^{12}C	1.5	1.09 ± 0.02	0.96 ± 0.02	1,48
^{16}O ^{16}O	1.7	1.05 ± 0.01	1.00 ± 0.01	2,35
^{40}Ca ^{40}Ca	2.3	1.03 ± 0.01	0.98 ± 0.01	2,95

Tab. 2.2: Azimuthale Anisotropie $R = N_0/N_{90}$ für semizentrale Kollisionen bei 150 AMeV Einschußenergie für Teilchen mit $y_{cm} > 0$. N_0 und N_{90} wurden mit einem $cos\phi + cos^2\phi$ - Fit an die Ergebnisse von Abbildung 2.14 gewonnen.

Kapitel 3

Dispersionsrelationen

Wie in Kapitel 2 dargelegt, geht bei der Ableitung der BUU-Gleichung aus der quantenmechanischen Vielteilchen-Schrödingergleichung der Zusammenhang zwischen dem mittleren Feld und dem Kollisionsterm verloren. Während beide aus der gleichen Zweiteilchenwechselwirkung v_{ij} herrühren, werden das mittlere Feld üblicherweise gemäß mikroskopischen Rechnungen parametrisiert und die Kollisionsquerschnitte aus Messungen freier NN-Stöße gewonnen. Dies ist auch bei dem in dieser Arbeit verwendeten CBUU - Modell der Fall.

In diesem Kapitel soll daher untersucht werden, inwieweit die Parametrisierungen des mittleren Feldes und der Streuquerschnitte im Widerspruch stehen oder übereinstimmen. Dazu wird eine Beziehung zwischen dem mittleren Feld als Realteil und dem Kollisionsterm als Imaginärteil eines optischen Potentials, in dem sich die Nukleonen bewegen, hergestellt. Real- und Imaginärteil werden mittels Dispersionsrelationen zueinander in Beziehung gesetzt. Da sich diese Beziehung nur für niedrige Dichten ableiten läßt, ist dieser Vergleich jedoch nur als Hinweis auf ungefähre Übereinstimmung bei normaler oder erhöhter Kerndichte zu betrachten. Keinesfalls kann daraus auf die Notwendigkeit und Art einer dichteabhängigen Modifikation z. B. der NN-Wirkungsquerschnitte geschlossen werden.

3.1 Ableitung der Dispersionsrelation

3.1.1 Bedeutung des Imaginärteils eines optischen Potentials

Die (nichtrelativistische) Bewegung eines Teilchens mit der Wellenfunktion Ψ wird durch die Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t\Psi = \left\{-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + U\right\}\Psi \tag{3.1}$$

beschrieben, wobei das Potential U komplex sein kann:

$$U = V + iW \; . \tag{3.2}$$

Multipliziert man Gleichung (3.1) mit Ψ^*, ihre komplex konjugierte mit Ψ und subtrahiert sie voneinander, so erhält man

$$i\hbar\partial_t \left\{\Psi^*\Psi\right\} = -\frac{\hbar^2\vec{\nabla}}{2m}\left\{\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right\} + 2iW\Psi^*\Psi \; . \tag{3.3}$$

Mit $\rho = \Psi^*\Psi$ und $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left\{\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right\}$ ergibt sich eine Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t\rho + \vec{\nabla}\vec{j} = \frac{2W\rho}{\hbar} \; , \tag{3.4}$$

an der sich die Bedeutung des Imaginärteils W des optischen Potentials zeigt: Der Imaginärteil führt zu einem Verlust an Teilchen, z. B. durch Streuung, aus dem ursprünglichen Zustand Ψ.

3.1.2 Imaginärteil und Wirkungsquerschnitt

Die Energie eines Teilchens, das sich gemäß Gleichung (3.1) bewegt, ist durch

$$E = \frac{k^2}{2m} + U \tag{3.5}$$

gegeben, wodurch sich sein Impuls zu

$$\frac{k^2}{2m} = E - V - iW \tag{3.6}$$

ergibt. Dieser Impuls k ist komplex:

$$k = k_r + ik_i \quad , \qquad k^2 = k_r^2 + 2ik_rk_i - k_i^2 \; . \tag{3.7}$$

Für niedrige Dichten oder große Teilchenenergien, wenn $|W| \ll |E - V|$ gilt, ist $k_i \ll k_r$ und man kann

$$E \; \simeq \; \frac{k_r^2}{2m} + V \tag{3.8}$$

setzen. Damit gilt

$$\frac{k_r^2}{2m} + \frac{2ik_rk_i}{2m} \; \simeq \; E - V - iW \quad \text{und} \qquad k_i \; \simeq \; -\frac{m}{k_r}W \; . \tag{3.9}$$

Die mittlere freie Weglänge ist nun definiert als die Strecke, nach der die Norm $\int dx\, \Psi^* \Psi$ auf $1/e$ gesunken ist. Für eine Wellenfunktion mit komplexem Impuls folgt daraus

$$\begin{aligned} \int dx \Psi^* \Psi &= \int dx e^{-i(k^* x - Et)}\, e^{+i(kx-Et)} \\ &= \int dx e^{-2k_i x} \\ \Rightarrow \quad \lambda &= (2k_i)^{-1}\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Es gilt also zum einen

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{2m}{k_r} W = -\frac{2}{v} W \tag{3.11}$$

und zum anderen

$$\sigma^{\mathrm{tot}} = \frac{1}{\lambda \rho}\,, \tag{3.12}$$

womit sich ein Zusammenhang zwischen dem Reaktionswirkungsquerschnitt und dem Imaginärteil eines optischen Potentials ergibt:

$$W = -\frac{1}{2}\,\rho\, v\, \sigma^{\mathrm{tot}}\,. \tag{3.13}$$

3.1.3 Ableitung einer *onshell*–Dispersionsrelation

Aus der Forderung der Kausalität einer Wechselwirkung kann man direkt die Dispersionsrelation

$$\mathrm{Re}\, U(\omega) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, U(\omega')}{\omega' - \omega}\, d\omega' \tag{3.14}$$

ableiten; dies wird im Detail in Anhang B besprochen. Die Energie ω', über die integriert wird, ist dabei jedoch nicht die onshell-Energie $E = \frac{k^2}{2m}$, sondern eine unabhängige Variable. Dies ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

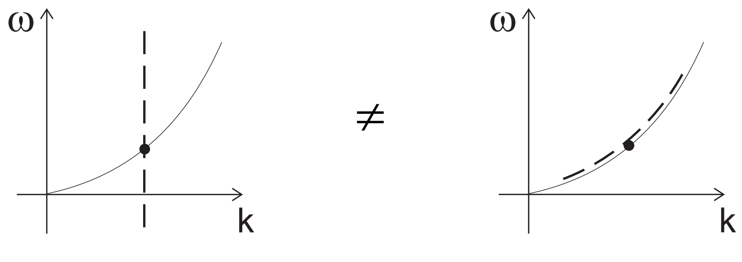


Abb. 3.1: Impuls-Energie-Ebene, in der die Dispersionsrelation (3.14) auszuwerten ist. Die zu einem Impuls $|\vec{k}|$ gehörende onshell-Energie ω_k ist als durchgezogene Kurve dargestellt. Der nach Gleichung (3.14) zu einem festen Impuls $|\vec{k}|$ ($\bullet$) gehörende Integrationsweg ist im linken Bild als gestrichelte Linie eingezeichnet. Demgegenüber führt die Integration in den Gleichungen (3.28) und (3.29) entlang des gestrichelten Weges im rechten Bild.

Energie- und Impulsabhängigkeit des Potentials U sind also genau zu unterscheiden. Erstere folgt aus der zeitlichen, letztere aus der räumlichen Nichtlokalität der Wechselwirkung. Man kann das Potential U untergliedern in [46, 47, 37, 48]

$$U(\vec{k},\omega) = V_0(\vec{k}) + \Delta V(\vec{k},\omega) + iW(\vec{k},\omega) \tag{3.15}$$

wobei die Dispersionsrelation (3.14) nur die echt energieabhängigen Terme ΔV und W miteinander verknüpft.

Zu jedem Impulswert $|\vec{k}|$ gehört eine andere Energieabhängigkeit des Potentials. Folglich muß man zur Berechnung des Realteils $V = \mathrm{Re}\, U$ das Verhalten von $\mathrm{Im}\, U = W$ für alle Energien $\omega \neq \frac{k^2}{2m}$ kennen. Dies ist im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich, da in das CBUU-Modell nur die im freien NN-Stoß gemessenen Wirkungsquerschnitte eingehen, die offshell-Abhängigkeit der Streudaten ist nicht bekannt. Nach Gleichung (3.13) ist W so nur onshell berechenbar. Ebensowenig sind die experimentell aus Nukleon-Kern-Streuung extrahierten optischen Potentiale oder das von Wiringa et al. angegebene Nukleonenpotential für offshell-Energien bekannt bzw. parametrisiert. Um eine für das CBUU-Modell mit seinem Konzept klassischer Quasiteilchen brauchbare Relation zu erhalten, muß man daher eine andere Form der Dispersionsrelation finden, in die nur die onshell-Energie $E_k = \frac{k^2}{2m}$ eingeht. Dies soll im folgenden beschrieben werden:

Nach Gleichung (3.13) ist der Imaginärteil des Potentials mit dem totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot} verknüpft. Dieser ist wiederum proportional zum Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude $f(k)$

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\, f(k,\Theta=0)\ . \tag{3.16}$$

Die Streuamplitude für den in Abbildung 3.2 gezeigten Streuprozeß ist durch

$$\begin{aligned} f(k,\Delta) &= f_{B1} + f_{B2} + \dots && (3.17)\\ &= -\frac{1}{4\pi}\Big[\int d^3r\; e^{i\vec{\Delta}\vec{r}}\, U(\vec{r}) && (3.18)\\ &\quad + \iint d^3r\, d^3r'\; e^{-i\vec{k}_f\vec{r}}\, U(\vec{r})\, G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,',k)\, U(\vec{r}\,')\, e^{i\vec{k}_i\vec{r}\,'} && (3.19)\\ &\quad + \dots\Big] \end{aligned}$$

gegeben. Für eine Vorwärtsstreuung $\Delta = 0$, $\vec{k} = \vec{k}_f = \vec{k}_i$ ergibt die erste Born-Näherung f_{B1} (3.18) lediglich eine Konstante und wird im folgenden nicht betrachtet. In der

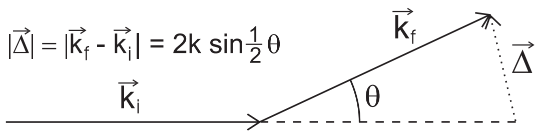


Abb. 3.2: In Gleichung (3.17) eingehende Impulsverhältnisse einer elastischen Kollision mit $|\vec{k}_f| = |\vec{k}_i| = |\vec{k}|$.

zweiten Born-Näherung (3.19) sei vorerst die Ortsintegration vernachlässigt; d. h. die zu untersuchende Funktion ist [49]

$$\widetilde{F}(\vec{r},\vec{r}\,',\vec{k}) = -\frac{1}{4\pi}\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\, U(\vec{r})\, G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,',k)\, U(\vec{r}\,')\, e^{i\vec{k}\vec{r}\,'} \;. \tag{3.20}$$

$\widetilde{F}$ wird nun in die komplexe k-Ebene fortgesetzt, ein komplexer Impuls sei dabei mit ζ bezeichnet. Die Greenfunktion G in Gleichung (3.20) ist gegeben durch

$$G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,',\zeta) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int d^3k\, \frac{\Psi_k(r)\Psi_k^*(r')}{\zeta^2 - k^2 + i\epsilon\zeta} \;, \tag{3.21}$$

was man sich anhand der Tatsache, daß G die formale Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} (E-H)\,G &= 1 = \sum_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| && (3.22)\\ \Rightarrow\quad G &= \sum_n \frac{|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|}{E-E_n} && (3.23) \end{aligned}$$

ist, klarmachen kann. Aus Gleichung (3.21) folgt, daß $\widetilde{F}$ singulär entlang der positiven k-Achse, aber analytisch in der OHE ist. Damit kann man Cauchys Theorem anwenden

$$\widetilde{F}(\vec{r},\vec{r}\,',\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\widetilde{F}(\vec{r},\vec{r}\,',\zeta')}{\zeta'-\zeta}\, d\zeta' \;. \tag{3.24}$$

Dieses gilt auch für die Streuamplitude f_{B2}, wenn man annimmt, daß die Integrationen $\iint d^3r d^3r'$ und $\oint d\zeta'$ vertauschen [50, 49].

Mit der Annahme $\widetilde{F} \to 0$ für $|\zeta| \to \infty$ kann man sich auf die Integration entlang der reellen k-Achse beschränken, für $\zeta = k + i\epsilon$, $\epsilon \to 0^+$ gilt dann

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(\vec{r},\vec{r}\,',k) &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{F}(\vec{r},\vec{r}\,',k')}{k'-(k+i\epsilon)}\, dk' \\ &= \frac{\mathcal{P}}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{F}(\vec{r},\vec{r}\,',k')}{k'-k}\, dk' \;. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Die Voraussetzung $\widetilde{F} \to 0$ ist dabei erfüllt für Potentiale, die die Bedingungen

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha r}|V(\vec{r})|\, d^3r \;&\le\; L_\alpha \;<\; \infty\,,\; \alpha > 0\,, && (3.26)\\ \max(\vec{r}\,')\int \frac{|V(\vec{r})|}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r \;&\le\; M \;\le\; \infty && (3.27) \end{aligned}$$

erfüllen, wobei $\max(\vec{r}\,')$ das Maximum bezüglich einer Variation von $\vec{r}\,'$ bezeichnet [50]. Diese Bedingungen bedeuten physikalisch, daß das Potential, das zur Streuung führt, zum einen räumlich begrenzt ist und zum anderen bei kleinen Abständen bzw. hohen Energien nicht stärker als $1/r$ divergiert. Dies ist z. B. für Walecka-/OBE-Potentiale der Fall.

Nun ist $G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,',k) = G^{(+)*}(\vec{r}\,',\vec{r},-k)$ und damit $f(k) = f^*(-k)$, es gilt $\mathrm{Re}\,\widetilde{F}(k) = \mathrm{Re}\,\widetilde{F}(-k)$ und $\mathrm{Im}\,\widetilde{F}(k) = -\mathrm{Im}\,\widetilde{F}(-k)$. Schreibt man Gleichung (3.25) auf den physikalischen Impulsbereich $k \geq 0$ um, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{F}(k')}{k'-k}\,dk' &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\widetilde{F}(k')}{k'-k}\,dk' + \int_{0}^{\infty} \frac{\widetilde{F}(k')}{k'-k}\,dk' \\ &= \int_{0}^{\infty} \frac{\widetilde{F}(-k')}{-k'-k}\,dk' + \int_{0}^{\infty} \frac{\widetilde{F}(k')}{k'-k}\,dk'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,\widetilde{F}(k) &= \frac{\mathcal{P}}{\pi i}\int_0^\infty \left(-\frac{i\mathrm{Im}\,\widetilde{F}(-k')}{k'+k} + \frac{i\mathrm{Im}\,\widetilde{F}(k')}{k'-k}\right)dk' \\ &= \frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_0^\infty \left(+\frac{\mathrm{Im}\,\widetilde{F}(k')}{k'+k} + \frac{\mathrm{Im}\,\widetilde{F}(k')}{k'-k}\right)dk' \\ &= \frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_0^\infty \frac{2k'\,\mathrm{Im}\,\widetilde{F}(k')}{k'^2-k^2}\,dk' \qquad (3.28)\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\widetilde{F}(k) &= \frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_0^\infty \left(-\frac{\mathrm{Re}\,\widetilde{F}(-k')}{k'+k} + \frac{\mathrm{Re}\,\widetilde{F}(k')}{k'-k}\right)dk' \\ &= -\frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_0^\infty \frac{2k\,\mathrm{Re}\,\widetilde{F}(k')}{k'^2-k^2}\,dk' \qquad (3.29)\end{aligned}$$

Die Integrationen über k in (3.28) und (3.29) kann man mit $E = \frac{k^2}{2m}$ in eine Integration über die onshell-Energie E_k umschreiben. Damit folgen die gesuchten Dispersionsrelationen:

$$\mathrm{Re}\,U(E_k) = \frac{\mathcal{P}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,U(E')}{E'-E_k}\,dE' \qquad (3.30)$$

$$\mathrm{Im}\,U(E_k) = -\frac{\mathcal{P}}{\pi}\sqrt{E_k}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{E'}}\,\frac{\mathrm{Re}\,U(E')}{E'-E_k}\,dE'\,. \qquad (3.31)$$

Hier wurde bereits ausgenutzt, daß die Gleichungen (3.28) und (3.29) auch für die Streuamplitude f und wegen $U = -\frac{2\pi}{m}\rho f$ auch für das Potential U gelten. Diese Dispersionsrelationen umgehen mit der Integration über die onshell-Energie auch das Problem der negativen Energien in Gleichung (3.14) [51].

3.1.4 Approximative Berechnung der Dispersionsrelation

Das Integral in Gleichung (3.30) läßt sich, wenn man zur Berechnung des Imaginärteils des Potentials mittels Gleichung (3.13) einen nur stückweise parametrisierten Wirkungsquerschnitt verwendet, nicht analytisch lösen. Daher wurde in dieser Arbeit generell eine approximative Lösung verwendet, bei der die im Zähler des Integranden

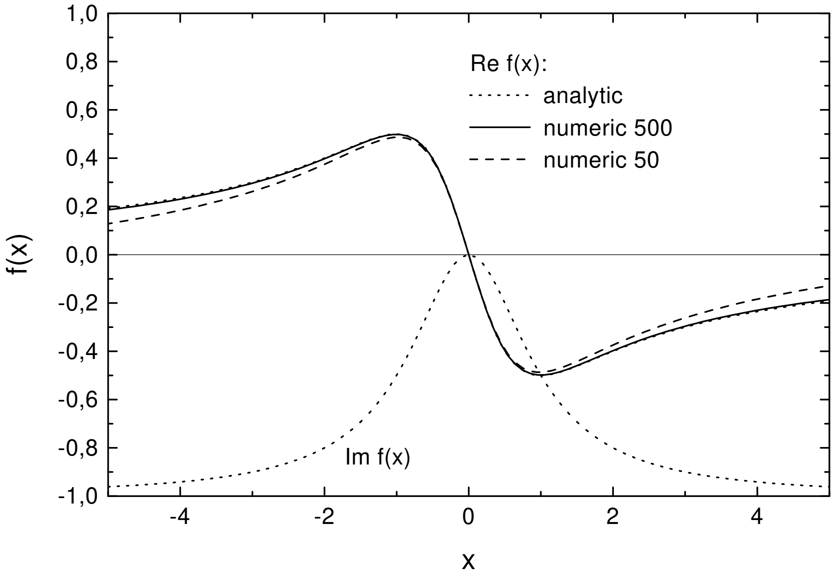


Abb. 3.3: Qualität der approximativen Berechnung des Dispersionsintegrals (3.14) am Beispiel der Funktion $W(x) = \frac{W_0(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2+1}$ [51, 37] (untere gepunktete Linie). Analytisches Ergebnis (gepunktete Linie, kaum sichtbar neben der durchgezogenen), Ergebnis einer Integration bis ± 50 (gestrichelte Linie) und bis ± 500 (durchgezogene Linie).

stehende Funktion durch eine stückweise lineare Funktion genähert wurde [46, 51]. Das Integral über ein Intervall $[c, d]$ ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} \int_c^d \frac{ax+b}{x-x_0} dx &= \lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_c^{x_0-\epsilon} \cdots + \int_{x_0+\epsilon}^d \cdots \right] \\ &= a(d-c) + (ax_0+b) \ln \left| \frac{d-x_0}{c-x_0} \right| \; . \end{aligned} \tag{3.32}$$

Diese Methode liefert sehr gute Ergebnisse, wie in Abbildung 3.3 gezeigt wird, speziell wenn man die Intervalllänge lokal an die Schwankung der zu nähernden Funktion anpaßt. Jedoch ist darauf zu achten, daß die obere Integrationsgrenze groß genug gewählt ist, da sonst zwar die lokale Struktur des dispersiv berechneten Realteils gut wiedergegeben wird, sich aber insgesamt schleichende Abweichungen von dem analytischen Resultat ergeben.

Abbildung 3.3 zeigt sehr gut auch eine generelle Eigenschaft der Dispersionsintegrale: Lokale Änderungen des Imaginärteils der Funktion werden immer auf lokale Änderungen des Realteils abgebildet und beeinflussen nur wenig dessen Wert an anderen Stellen. Dies ist eine einfache Konsequenz der Tatsache, daß die Funktion im Zähler des Integranden im Bereich der Singularität, der Nullstelle des Nenners, wesentlich stärker gewichtet ist. Das bedeutet wiederum, daß Unsicherheiten in der Parametrisierung des Wirkungsquerschnittes bei hohen Energien das Dispersionspotential in dem für diese Arbeit interessanten Energiebereich von $E \leq 2$ GeV kaum beeinflussen.

Die Dispersionsrelation (3.31) ergibt, wiederum bei Näherung der zu integrierenden

Funktion $\mathrm{Re}\,U(E)$ durch eine stückweise stetige Funktion $ax+b$, etwas kompliziertere Ausdrücke für den Imaginärteil. Man muß zudem eine Fallunterscheidung treffen, ob sich der Wert E_k, an dem der Imaginärteil berechnet werden soll, innerhalb des Intervalls befindet oder nicht. Für $E_k \in [c,d]$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \sqrt{x_0}\int_c^d \frac{ax+b}{x-x_0}\frac{dx}{\sqrt{x}} &= 2a\sqrt{x_0}(\sqrt{d}-\sqrt{c}) \\ &+ (ax_0+b)\ln\frac{-(\sqrt{cd}+\sqrt{x_0}(\sqrt{d}-\sqrt{c})-x_0)}{\sqrt{cd}+\sqrt{x_0}(\sqrt{c}-\sqrt{d})-x_0}\,, \end{aligned} \tag{3.33}$$

und für $E_k \notin [c,d]$

$$\begin{aligned} \sqrt{x_0}\int_c^d \frac{ax+b}{x-x_0}\frac{dx}{\sqrt{x}} &= 2a\sqrt{x_0}(\sqrt{d}-\sqrt{c}) \\ &+ (ax_0+b)\ln\frac{+(\sqrt{cd}+\sqrt{x_0}(\sqrt{d}-\sqrt{c})-x_0)}{\sqrt{cd}+\sqrt{x_0}(\sqrt{c}-\sqrt{d})-x_0}\,. \end{aligned} \tag{3.34}$$

3.2 Potentiale aus der Dispersionsrelation

3.2.1 Berechnung eines reellen Potentials

Mit der Dispersionsrelation (3.30) soll nun das Verhältnis zwischen dem Mittlere-Feld-Potential und den Wirkungsquerschnitten des CBUU-Stoßterms untersucht werden. Die Wirkungsquerschnitte werden dabei gemäß Gleichung (3.13) in den Imaginärteil eines Potentials umgerechnet. Dieser Imaginärteil wird in die Dispersionsrelation eingesetzt und der daraus gewonnene Realteil mit dem parametrisierten Potential des CBUU-Modells verglichen. Da der Absolutbetrag des reellen Dispersionspotentials nach Gleichung (3.15) nicht festgelegt ist, sondern mindestens um eine Konstante verschoben werden kann, wird im folgenden immer $V_{\mathrm{disp}} = U_{\mathrm{BUU}}$ bei $E = 280$ MeV gefordert. Dies ist die Energie, bei der das BUU-Potential bei normaler Kerndichte die Nulllinie durchquert und dient der Vereinfachung des Vergleichs, auch wenn die folgenden Rechnungen zumeist bei $\rho = 0.1 \times \rho_0$ durchgeführt wurden.

Abbildung 3.4 zeigt das prinzipielle Verhalten von Imaginär- und Realteil eines Dispersionspotentials anhand eines als konstant angenommenen totalen Wirkungsquerschnittes. Gemäß der relativistischen Formel $v = \frac{p}{E}$ steigt der Absolutbetrag des Imaginärteils zunächst linear von Null an, um später gegen einen konstanten Wert zu streben. Der Realteil ist dann eine streng monoton wachsende Funktion. Er steigt von einem gewissen negativen Wert an und übertrifft sehr bald das CBUU-Potential, wobei die Differenz mit zunehmender Energie immer größer wird. Daraus lassen sich, ausgehend vom Vergleich der Realteile, zwei Forderungen an den Verlauf des Imaginärteils ableiten: Zum einen muß er zu niedrigen Energien hin stärker anwachsen, da lokale Änderungen des Imaginärteils immer auch auf lokale Änderungen des Realteils abgebildet werden. Dies wiederum erfordert einen bei kleinen Energien wesentlich größeren

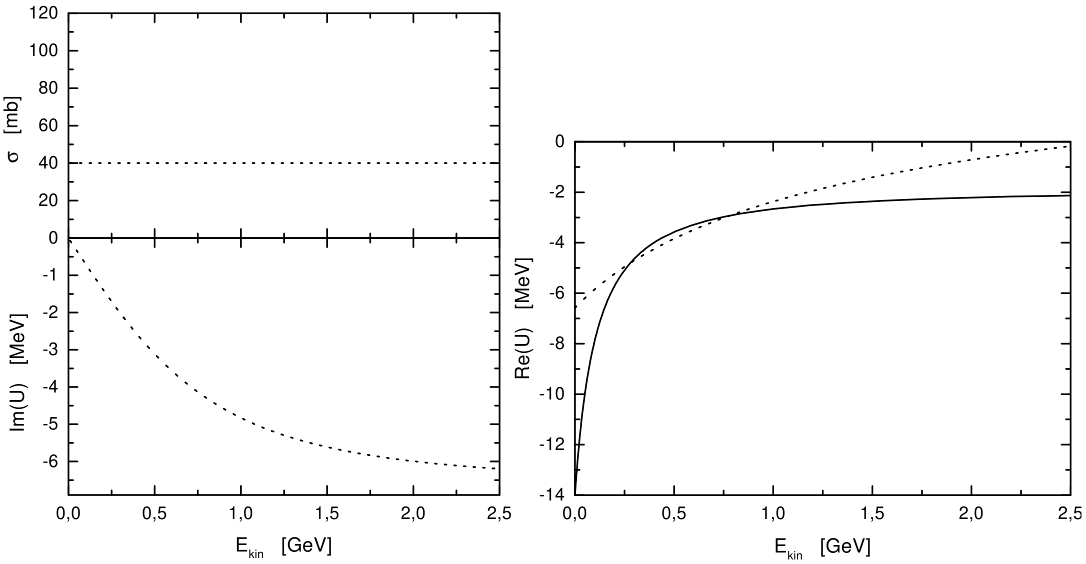


Abb. 3.4: Konstanter Wirkungsquerschnitt (oben) mit nach $W = -\frac{1}{2}\rho v \sigma$ zugehörigem Imaginär- (Mitte) und Realteil (unten) eines optischen Potentials. Rechnung für eine Kerndichte von $0.1 \times \rho_0$. Realteil im Vergleich zum CBUU-Potential bei dieser Kerndichte (durchgezogene Linie), wobei die beiden Potentiale bei $E = 280$ MeV auf den gleichen Wert gesetzt wurden.

Wirkungsquerschnitt. Zum anderen sollte der Imaginärteil des Potentials zu großen Energien hin wieder abnehmen, da sonst der Realteil nicht wie das CBUU-Potential saturiert.

Diese Forderungen sind für realistische Parametrisierungen des elastischen Wirkungsquerschnittes erfüllt. Abbildung 3.5 zeigt den Verlauf von Wirkungsquerschnitt, Imaginär- und Realteil des Potentials für die neueren Parametrisierungen des elastischen *pp*- und des *pn*-Wirkungsquerschnitts von Cugnon et al. [52]. Beide steigen zu kleinen Energien hin an und fallen zu großen Energien hin ab. Während nun aus dem elastischen *pn*-Wirkungsquerschnitt ein reelles Potential resultiert, das sowohl im Verlauf, d. h. der Krümmung der Kurve, wie auch im absoluten Betrag der Impulsabhängigkeit eine sehr gute Übereinstimmung mit dem CBUU-Potential aufweist, zeigt der *pp*-Wirkungsquerschnitt eine zu starke Struktur im Bereich von $E \sim 200$ MeV, die sich in einem entsprecheden “Knick” im Imaginär- und damit auch im Realteil des Potentials äußert.

Nun geht in Gleichung (3.13) korrekterweise nicht der elastische, sondern der totale NN-Reaktionswirkungsquerschnitt ein. Dieser wurde, dem Mittel der Daten aus [53] folgend, stückweise stetig parametrisiert. Die sich daraus ergebenden Potentiale sind in Abbildung 3.6 gezeigt. Es ergeben sich, bedingt durch die starke Änderung des Wirkungsquerschnittes im Bereich der Pionenschwelle, extreme Strukturen in Imaginär- und Realteil des Potentials, die nicht mit dem CBUU-Potential – allerdings auch nicht mit einem aus Proton-Kern-Stößen extrahierten optischen Potential [25] – in Übereinstimmung zu bringen sind. Diese starken Strukturen bleiben auch bestehen, wenn man

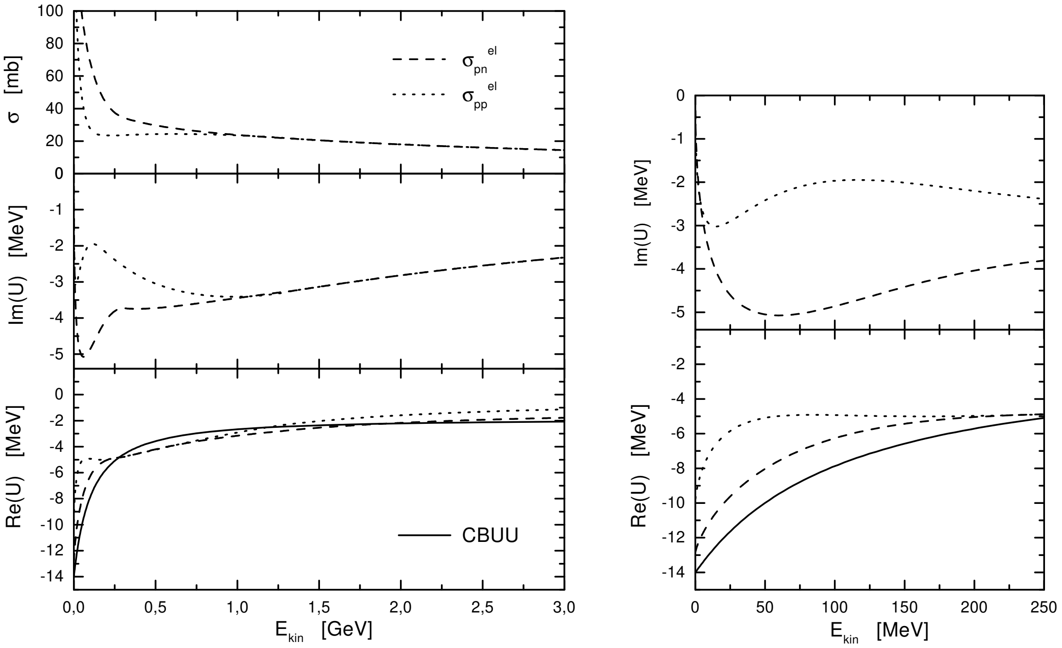


Abb. 3.5: Wirkungsquerschnitte, Imaginär- und Realteile eines optischen Potentials für die Cugnon-Parametrisierungen der elastischen *pp*- und *pn*-Streuung [52]. In der rechten Hälfte der Abbildung sind Ausschnittvergrößerungen des Imaginär- und Realteils der Potentiale gezeigt. Rechnung für eine Kerndichte von $0.1 \times \rho_0$.

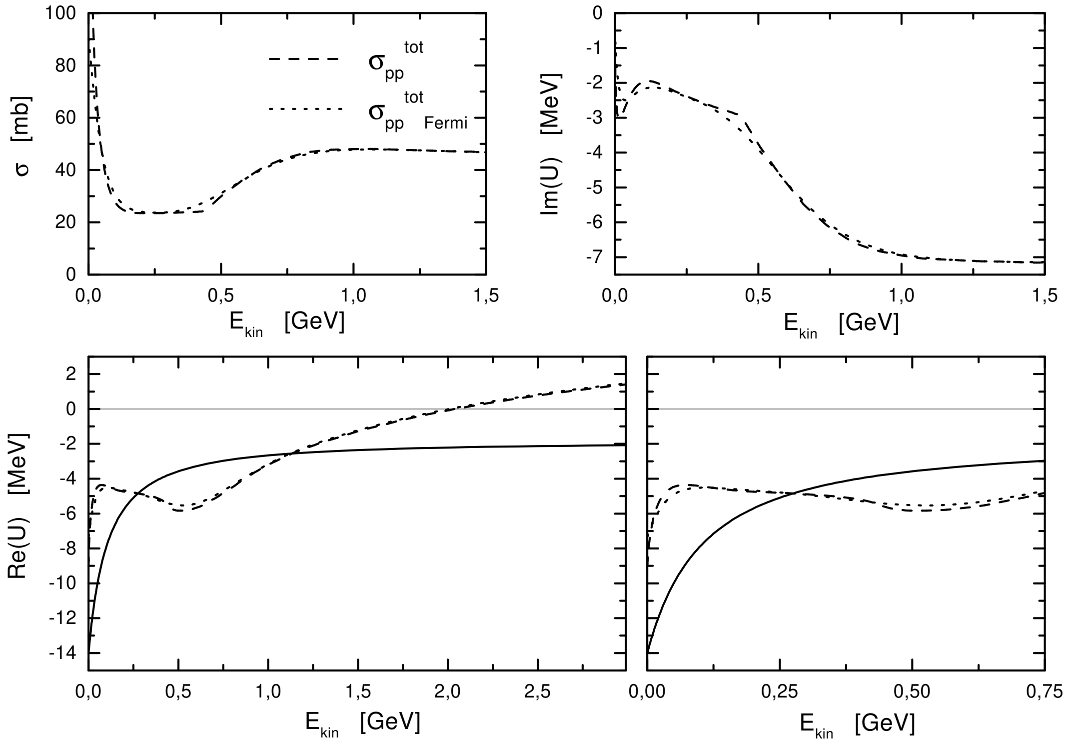


Abb. 3.6: Imaginärteil (oben rechts) und Realteil (untere Reihe) eines optischen Potentials aus dem totalen *pp*-Wirkungsquerschnitt mit und ohne Fermi-Bewegung der Nukleonen. Rechnung für eine Kerndichte von $0.1 \times \rho_0$.

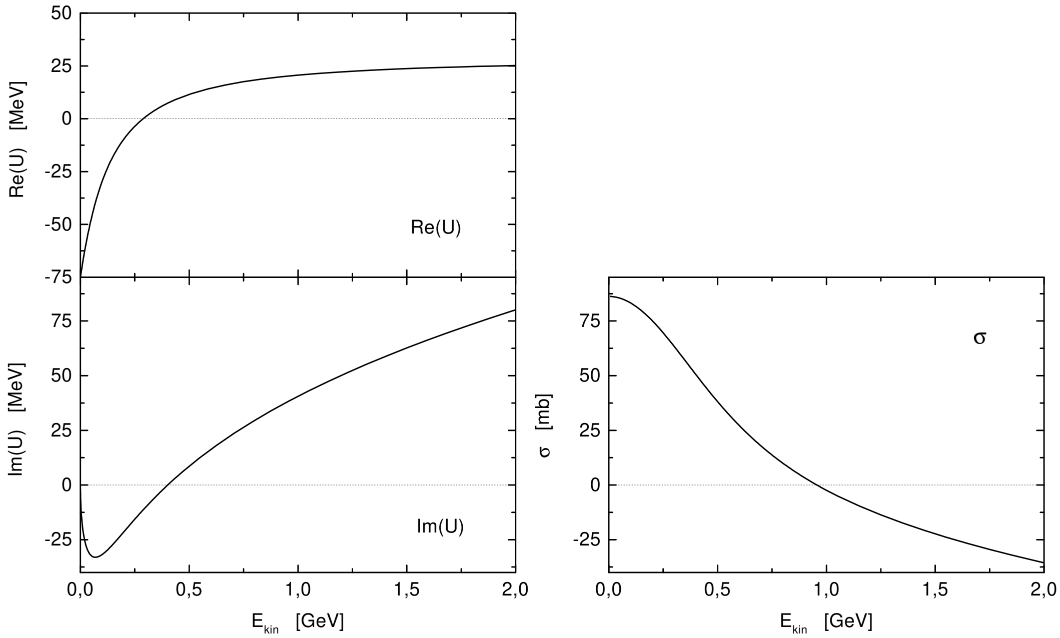


Abb. 3.7: Reelles CBUU-Potential bei normaler Kerndichte, daraus gewonnener Imaginärteil eines Dispersionspotentiales und zugehöriger Wirkungsquerschnitt.

über die Fermibewegung der Nukleonen im Kern mittelt, was ebenfalls in Abbildung 3.6 dargestellt ist.

3.2.2 Berechnung des Imaginär- aus dem Realteil

Gemäß Gleichung (3.31) kann man umgekehrt auch den Imaginärteil des optischen Potentials aus einem vorgegebenen Realteil berechnen. Mit Gleichung (3.13) ergibt sich daraus ein totaler Nukleon-Streuwirkungsquerschnitt bzw. eine Übergangsrate für den BUU-Stoßterm. Dies stößt jedoch auf das Problem, daß der Absolutbetrag des in die Dispersionsrelation eingehenden Realteils $\Delta V(E)$ gemäß Gleichung (3.15) nicht festgelegt ist und der resultierende Imaginärteil $W(E)$ von der Wahl von $V_0 = V_0(k)$ abhängt.

In Abbildung 3.7 sind die Ergebnisse der Rechnungen für $V_0 = 0$ dargestellt. Es zeigt sich, daß der dispersiv berechnete Imaginärteil des Potentials ein Minimum um $E = 150$ MeV aufweist und bereits bei 400 MeV das Vorzeichen zu positiven Werten hin wechselt. Zudem divergiert er wegen der Konstanz des Realteiles mit zunehmender Energie. Daraus resultiert ein Wirkungsquerschnitt, der bei $E = 0$ einen Wert von 85 mb hat und bei $E \simeq 1$ GeV ebenfalls das Vorzeichen wechselt. Dieses Verhalten ist extrem unphysikalisch und hängt nur wenig von der Wahl des Wertes für ein konstantes V_0 ab.

3.2.3 Subtrahierte Dispersionsrelationen

Der Begriff "subtrahierte Dispersionsrelation" bedeutet im anschaulichen Fall der 1. Subtraktion, daß man den Wert des Imaginärteils eines Potentials relativ zu einem ebenfalls dispersiv berechneten Wert bei einer festen Referenzenergie berechnet. Allgemeiner für eine beliebige analytische Funktion f geschrieben:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{i\pi} \int \left[\frac{f(x')}{x'-x} - \frac{f(x')}{x'-x_0} \right] dx' \\ &= (x-x_0) \frac{1}{i\pi} \int \frac{f(x')}{(x'-x)(x'-x_0)} \, dx' \, . \end{aligned} \tag{3.35}$$

Dies kann man noch verallgemeinern zu höheren Subtraktionen, denn es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{i\pi} \int \frac{f(x')}{x'-x} \, dx' \right] \\ &= -\frac{1}{i\pi} \int \frac{f(x')}{(x'-x)^2} \, dx' \, , \end{aligned} \tag{3.36}$$

woraus sich eine Art Taylor-Reihe für die Dispersionsintegrale ergibt:

$$f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-x_0)^j}{j!} \left(\frac{d^j f(x)}{dx^j} \right)_{x=x_0} = (x-x_0)^{n+1} \frac{1}{i\pi} \int \frac{f(x')}{(x'-x)(x'-x_0)^{n+1}} \, dx' \, . \tag{3.37}$$

Der unmittelbare Vorteil der Gleichungen (3.35) und (3.37) liegt darin, daß die vom Referenzwert x_0 weiter entfernten Teile der Funktion $f(x)$ kaum beitragen, da der Integrand in einer höheren Potenz als in Gleichung (3.14) gegen Null strebt. Dadurch konvergieren die Integrale auch, wenn $f(x)$ konstant ist oder sogar anwächst. Speziell Gleichung (3.35) ist eine mögliche Lösung des Problems, daß das Dispersionsintegral (3.30) bei Berechnung des Imaginärteils des Potentials aus dem totalen NN-Wirkungsquerschnitt divergiert, da dieser Wirkungsquerschnitt, und damit der Imaginärteil des Potentials, zu hohen Energien hin nicht verschwindet. Jedoch muß weiterhin zum Vergleich mit dem CBUU-Potential der Wert des reellen Dispersionspotentials für eine bestimmte Energie vorgegeben werden. Damit ist kein Vorteil gegenüber der in Kapitel 3.2.1 angewandten Methode, bei der nur bis zu einem (genügend großen) endlichen Wert integriert und damit lediglich die lokale Struktur des reellen Potentials berechnet wurde, gegeben. Darüberhinaus tritt in den den Gleichungen (3.35) und (3.37) das Problem von Polen höherer Ordnung auf, die bei einer analytisch nicht bekannten zu integrierenden Funktion $f(x)$ wesentlich schwerer zu handhaben sind.

3.2.4 Zusammenfassung

Der Vergleich des mittleren Feldes des CBUU-Modells mit Realteilen von Potentialen, die mittels Dispersionsrelationen speziell aus Parametrisierungen des pp- und pn-Wirkungsquerschnittes gewonnen wurden, hat gezeigt, daß die Energieabhängigkeit des

CBUU-Potentials in der richtigen Größenordnung liegt. So ist die Differenz der Potentialwerte bei $E = 2$ GeV und $E = 0$ für diese Potentiale ungefähr gleich groß; der Verlauf der Energieabhängigkeit ist dagegen im allgemeinen unterschiedlich. Dies ist an sich ein erstaunliches Ergebnis, da das CBUU-Potential eigentlich aus der räumlichen Nichtlokalität als impulsabhängig motiviert wurde. Die der CBUU-Parametrisierung zugrundeliegenden Rechnungen von Wiringa et al. trennen ebenfalls nicht nach Impuls- und Energieabhängigkeit. Gemäß Gleichung (3.15) ist daher nicht klar, ob gegebenenfalls nur ein gewisser Anteil des CBUU-Potentials mit dem Dispersionspotential zu vergleichen ist [38, 48].

Hingegen weisen alle auf dem totalen NN-Streuquerschnitt basierenden Dispersionspotentiale sehr starke Strukturen auf, in denen sich vor allem die Pionenproduktionsschwelle bei $E = 286$ MeV wiederspiegelt. Dies führt zu mehreren Extrema im reellen Potential, eine Eigenschaft, die das CBUU-Potential nicht aufweist. Allerdings zeigen auch die experimentell gewonnenen optischen Nukleonenpotentiale keine Strukturen im Bereich der Pionenschwelle, obwohl sie über Dispersionsrelationen eigentlich mit dem totalen Wirkungsquerschnitt verknüpft sein müßten. Ein Versuch, das mit Gleichung (3.30) aus dem totalen Wirkungsquerschnitt gewonnene reelle Dispersionspotential in einer CBUU-Rechnung zu verwenden, scheiterte an den erwähnten Extrema, da sich keine gebundenen Kerne realisieren ließen.

Der umgekehrte Weg, aus dem CBUU-Potential einen totalen Reaktionswirkungsquerschnitt für den CBUU-Stoßterm zu erhalten, führt zu einem Wirkungsquerschnitt, der ein vollkommen unphysikalisches Verhalten zeigt. Er ist eine monoton fallende Funktion der Energie, ohne Struktur und mit einem Wechsel des Vorzeichens. Ein derartiger Querschnitt ist nicht einmal prinzipiell für eine Transportrechnung verwendbar, abgesehen davon, daß seine Aufspaltung in die einzelnen Kanäle des Resonanzmodells vollkommen willkürlich wäre.

Positiv zu werten ist hingegen, daß mit den Dispersionsrelationen gezeigt werden kann, daß die Stärke der Impuls- bzw. Energieabhängigkeit des CBUU-Potentials mit der Dichte in gleichem Maße zunimmt wie die des reellen Dispersionspotentials, nämlich linear. Für das Dispersionspotential folgt dies direkt aus den Gleichungen (3.13) und (3.30). Abbildung 3.8 zeigt den Verlauf des CBUU-Potentials für Kerndichten von $0.1 \times \rho_0$ und ρ_0 im Vergleich zu den Potentialen, die sich bei der Verwendung der Parametrisierungen des pp- und pn-Wirkungsquerschnittes aus [52] ergeben. Die Übereinstimmung ist bei beiden Dichten gut. Leider kann der Absolutwert des Potentials, mithin die Tatsache, daß das CBUU-Potential bei niedrigen Dichten wie $0.1 \times \rho_0$ immer negativ ist und damit stets zu einer Verlangsamung der Expansionsbewegung nach einer Schwerionenkollision führt, nicht überprüft werden.

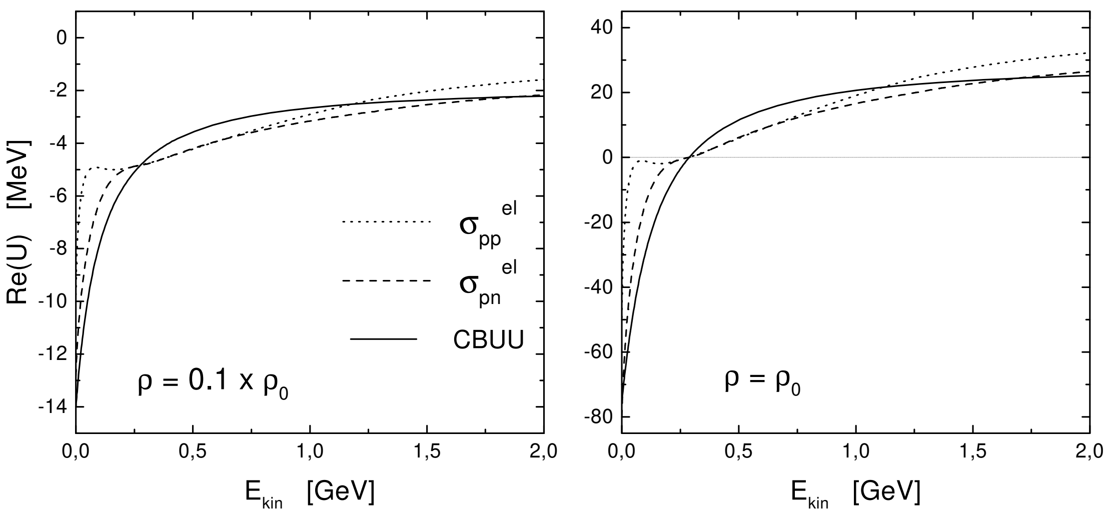


Abb. 3.8: Realteil eines optischen Potentials aus den elastischen Wirkungsquerschnitt-Parametrisierungen σ_{pp}^{el} und σ_{pn}^{el} wie in Abbildung 3.5 für eine Kerndichte von $0.1 \times \rho_0$ (links) und für ρ_0 (rechts) im Vergleich zu dem CBUU-Potential bei diesen Dichten.

Kapitel 4

Ablauf einer Kern-Kern-Kollision

In diesem Kapitel soll der grundlegende Ablauf einer Kern-Kern-Kollision beschrieben werden. Aufbauend auf einem einfachen Partizipanten-Spektatoren-Bild wird der raumzeitliche Ablauf einer semizentralen und einer zentralen Kern-Kern-Kollision vermittelt und auf die Resonanz- und Mesonendynamik eingegangen. In Abschnitt 4.4 wird anschließend die Frage der Projektil/Target-Durchmischung bzw. Isospin-Equilibrierung in Schwerionenreaktionen untersucht, da sie in engem Zusammenhang mit dem "Stopping" und dem Expansionsverhalten im Verlauf einer Reaktion steht. Experimente dazu finden gegenwärtig bei der Gesellschaft für Schwerionenforschung in Darmstadt (GSI) in Zusammenarbeit mit der Universität Heidelberg statt [54].

4.1 Partizipanten-Spektatoren-Bild

Kollidieren zwei Kerne, so bildet sich in der Reaktionszone ein Bereich hoher Dichte und Temperatur aus, anschaulich Feuerball genannt. Treffen die Kerne nicht mit voller Überdeckung aufeinander (sogenannter semizentraler Stoß), so ist dieser Feuerball von Zuschauermaterie, die nicht an der Reaktion beteiligt ist, umgeben. Dies ist in Abbildung 4.1 für eine späte Reaktionsphase, bei der sich die Zuschauermaterie bereits vom Kollisionsort wegbewegt, schematisch wiedergegeben. Dieses sogenannte Partizipanten-Spektatoren-Bild mit strikter Trennung zwischen Teilnehmer- und Zuschauermaterie liegt Reaktionsklassifikationsgrößen wie A_{part} (siehe Abschnitt 5.1) zugrunde.

In der Realität ist dieses Bild zu einfach. Wohl findet der hauptsächliche Ablauf der Reaktion in einer dichten und heißen Zone statt, doch ist diese nicht scharf abgegrenzt. Auch "fliegen" die Spektatorennukleonen nicht unbeteiligt vorbei. Die Schockfronten des expandierenden Feuerballs durcheilen auch sie. Sie prallen dadurch einmal am Feuerball ab und werden abgelenkt, zum anderen absorbieren sie einen Teil der aus der Reaktionszone entweichenden Mesonen und werden angeregt.

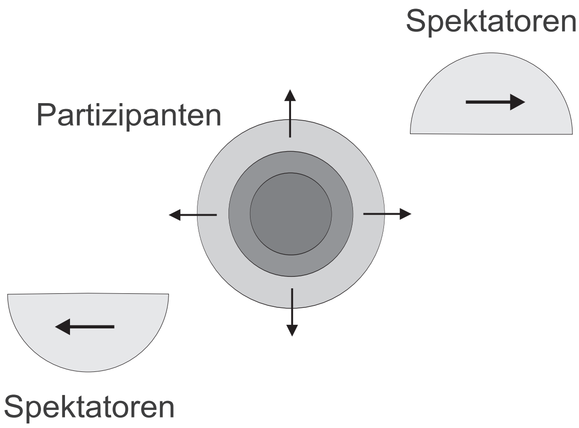


Abb. 4.1: Schematisches Bild einer semizentralen Kern-Kern-Kollision, bei der die Kerne nicht mit voller Überdeckung aufeinander treffen. Ein Teil der Materie, die Partizipanten, bildet den sogenannten Feuerball, in dem die eigentliche Reaktion abläuft, während die "Zuschauer", die Spektatoren, unbeteiligt vorbeifliegen.

4.2 Die Kollision in einem Transportmodell

4.2.1 Semizentrale Kollision

Abbildung 4.2 zeigt den zeitlichen Ablauf einer semizentralen Kollision ($b = 6$ fm) für das System Au+Au bei 1 AGeV Einschußenergie im Ortsraum, wie er sich im CBUU-Transportmodell darstellt. Dargestellt ist ein Schnitt in der x-z-Ebene, wobei die Kerne in z-Richtung aufeinander zufliegen. Die Dichte ist als Kontur dargestellt, die Bewegung der Teilchen als Pfeile, deren Betrag dem mittleren Impuls pro Nukleon in jeweils 8 fm^3 ($2 \times 2 \times 2$ fm) großen Ortsraumzellen entspricht.

Man erkennt im Bild links oben die aufeinander zufliegenden Kerne, durch die Lorentzkontraktion in Flugrichtung gestaucht. Nach 5 fm/c erfolgt die Kollision. Nach 7.5 fm/c bildet sich in der Mitte ein gestoppter Bereich hoher Dichte aus, besonders deutlich ist dies in den Bildern nach 10 und 12.5 fm/c zu sehen. Bereits nach 12.5 fm/c versucht Materie, der Reaktionszone zu entkommen. Man erkennt dies an den nach oben rechts und unten links zeigenden Pfeilen; die Flußrichtung der Nukleonen hat sich in diesen Bereichen umgekehrt. Jedoch strömt in der Kollisionsachse immer noch Materie in die Reaktionszone hinein und hält so den Druck und die Dichte aufrecht. Erst zwischen 15 und 17.5 fm/c dreht sich auch hier die Flußrichtung der Nukleonen um und der Feuerball expandiert.

Im Bild nach 20 fm/c zeigen sich zwei interessante Effekte: Zum einen erkennt man, daß die Hochdichtezone der Reaktion bis weit in die Spektatoren hineinreicht. Es liegt also keine eindeutige Trennung von Spektatoren und Partizipanten vor. Zum anderen beginnt die expandierende Materie aus dem Feuerball die Spektatoren auf ihrer Rückseite zu umströmen, durch das bei normaler Kerndichte attraktive Nukleonenpotential angezogen.

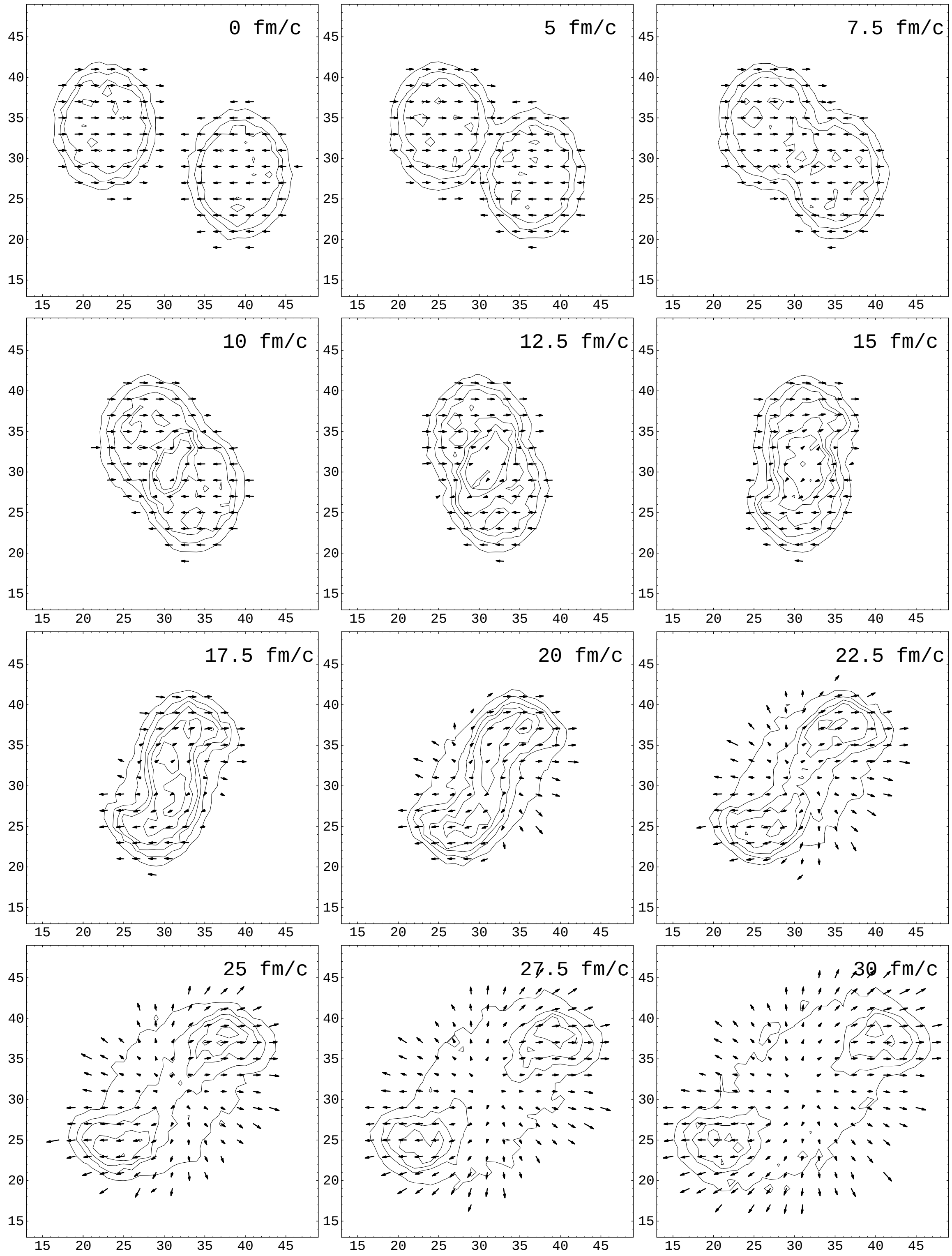


Abb. 4.2: Ablauf einer semizentralen Au+Au - Kollision mit Stoßparameter $b = 6$ fm bei 1AGeV Einschußenergie. Dargestellt ist ein Schnitt in der x-z–Ebene von 2 fm Dicke. Die Länge der Pfeile ist proportional zum Impuls pro Nukleon in jeweils 8 fm^3 großen Zellen, die Konturlinien geben die Dichteverteilung wieder und liegen bei 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 und 2.5ρ_0. Die Achsenbezeichnung ist in fm gegeben.

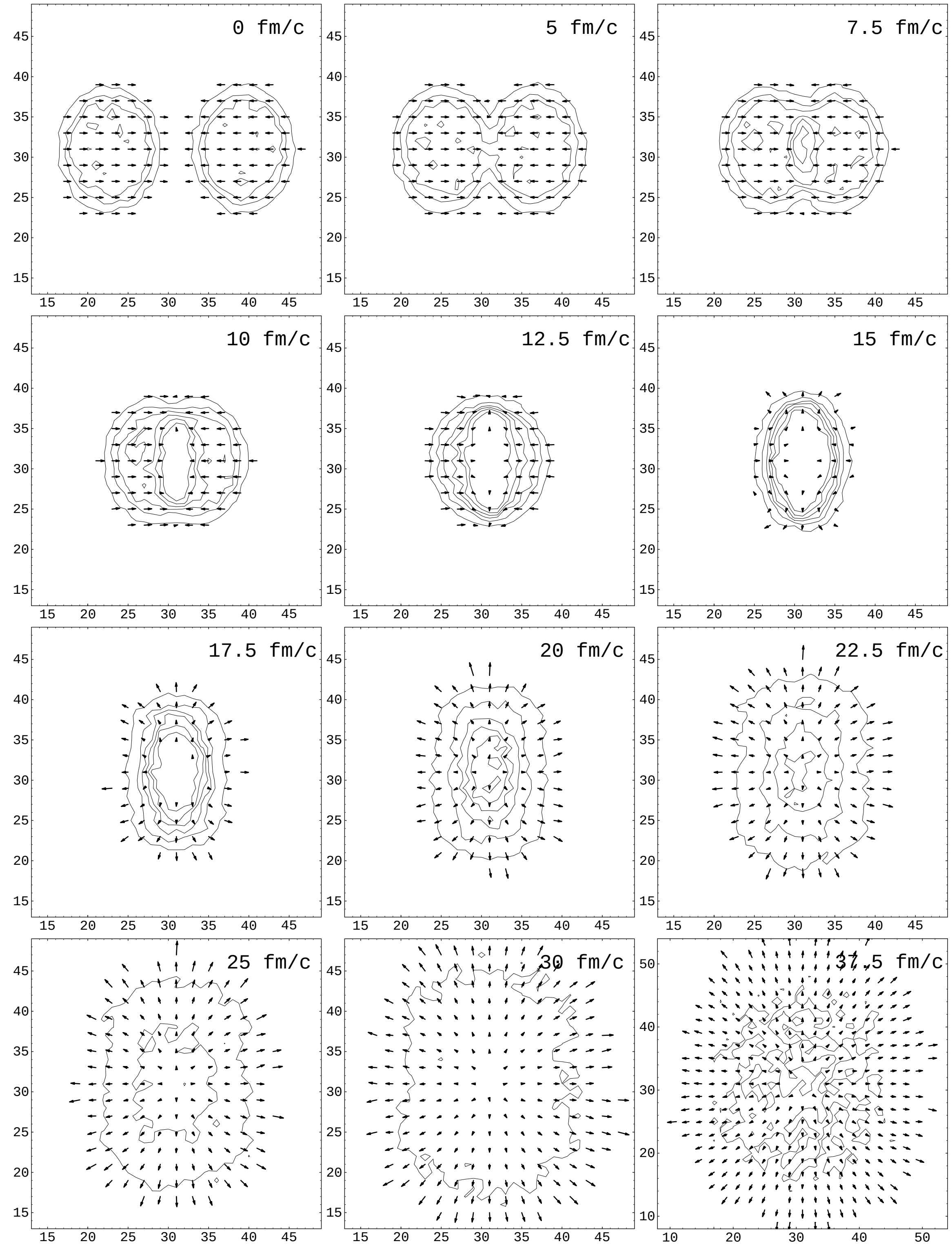


Abb. 4.3: Ablauf einer zentralen Au+Au - Kollision bei 1AGeV. Wie in Abbildung 4.2 ist die Länge der Pfeile proportional zum Impuls pro Nukleon, die Achsenbezeichnung in fm gegeben und grenzen die Konturlinien die Dichtebereiche von 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 und 2.5ρ_0 voneinander ab.

Eine radial nach außen gerichtete Expansion der Feuerballmaterie ist erst nach etwa 22.5 fm/c möglich. Dabei nimmt die radiale Expansionsgeschwindigkeit mit der Entfernung von der Reaktionszone zu.

Nach etwa 27.5 fm/c ist die Dichte im Reaktionsbereich auf unter $0.5\rho_0$ gefallen und die Reaktionsrate sinkt gegen Null, die Reaktion ist beendet. Man erkennt, daß die Reaktionszone radial nach außen expandiert, während die Spektatoren ihre Richtung nur wenig geändert haben. Diese geringe Seitwärtsbewegung der Spektatoren erzeugt, zusammen mit der Partizipantenmaterie, die die Spektatoren umströmt hat, den sogenannten transversalen (gerichteten) Fluß.

4.2.2 Zentrale Kollision

Abbildung 4.3 zeigt eine zentrale Kollision ($b = 0$ fm), wie zuvor für das System Au+Au bei 1 AGeV. Auch hier beginnt die Kollision nach 5 fm/c. Die Kerne werden – bei diesem schweren System – vollkommen abgestoppt, es bildet sich, zusammengedrückt durch die nachdrängende Materie, eine Zone sehr hoher Dichte aus, die nach 15 fm/c einen Großteil des gesamten mit Materie erfüllten Volumens ausmacht. Maximale Dichten über $2\rho_0$ sind bis 22.5 fm/c vorhanden, fallen dann aber sehr schnell ab. Bei 27.5 fm/c ist auch hier die eigentliche Reaktion abgeschlossen. Anschließend expandiert das System isotrop in radiale Richtung, wobei es sich immer mehr der Kugelgestalt nähert.

Bei einem solchen zentralen Stoß wird eine großer Anteil der Einschuß- und Kompressionsenergie in radiale kinetische Energie umgesetzt. Der sogenannte radiale Fluß transportiert bis zu 70 % der Einschußenergie.

4.2.3 Asymmetrische Systeme

Bei Kollisionen asymmetrischer Systeme scheint das Partizipanten-Spektatoren - Bild eher Gültigkeit zu besitzen. Abbildung 4.4 zeigt die Kollision eines ^{40}Ca-Kernes mit einem ^{197}Au-Kern bei einem Stoßparameter von lediglich 4 fm, wodurch der Ca-Kern noch vollständig mit dem Au-Kern überdeckt. Noch bei $t = 15$ fm/c ist der Ca-Kern deutlich als abgegrenzte Zone hoher Dichte im Au-Kern zu erkennen; erst bei $t = 20$ fm/c, wenn der obere Teil der Au-Kernes "explodiert", wird der untere Teil des Au etwas komprimiert, wobei die Dichte jedoch nicht wesentlich über $1.5\rho_0$ hinausgeht. Auch nach 27.5 fm/c ist dieser Teil des Au-Kernes als kompaktes Objekt zu erkennen, ein Zuschauer, von dem sich der Reaktionsbereich ablöst.

Bei einer zentralen Ca-Au-Kollision hingegen wird der Ca-Kern im Au bei 1 AGeV vollständig abgebremst und absorbiert, wie Abbildung 4.5 im Teilbild nach $t = 20$ fm/c zeigt. Zwischen 12.5 und 17.5 fm/c läuft ein Bereich hoher Dichte längs durch den Au-Kern hindurch, der dann auch für die transversale Expansion des Systems, erkennbar im den Teilbildern $t > 25$ fm/c, verantwortlich ist. Es bleibt kein weitgehend unbeteiligter

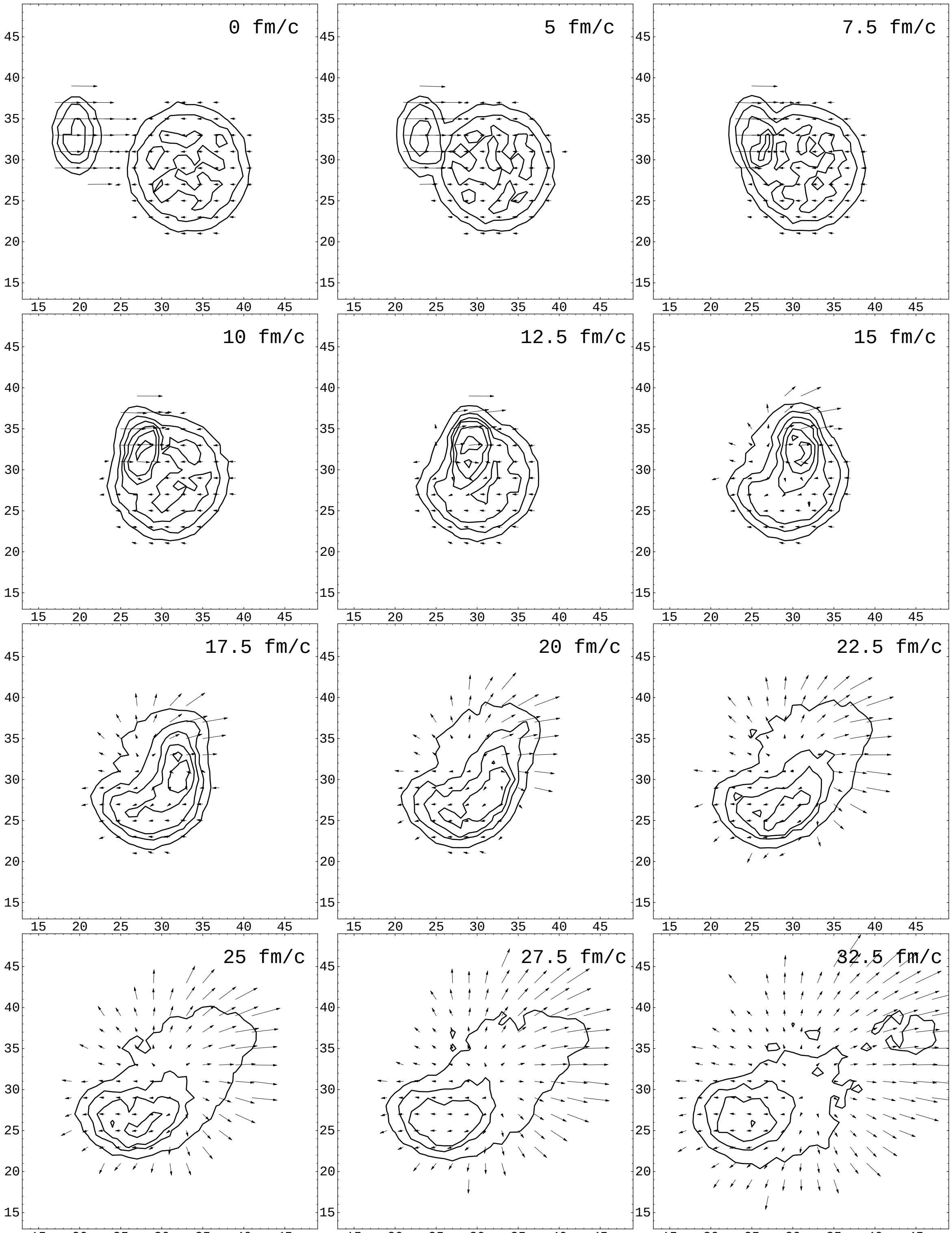


Abb. 4.4: Ablauf einer semizentralen Ca+Au - Kollision bei 1AGeV und Stoßparameter b=4 fm. Die Konturlinien liegen wieder bei 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 und 2.5ρ_0.

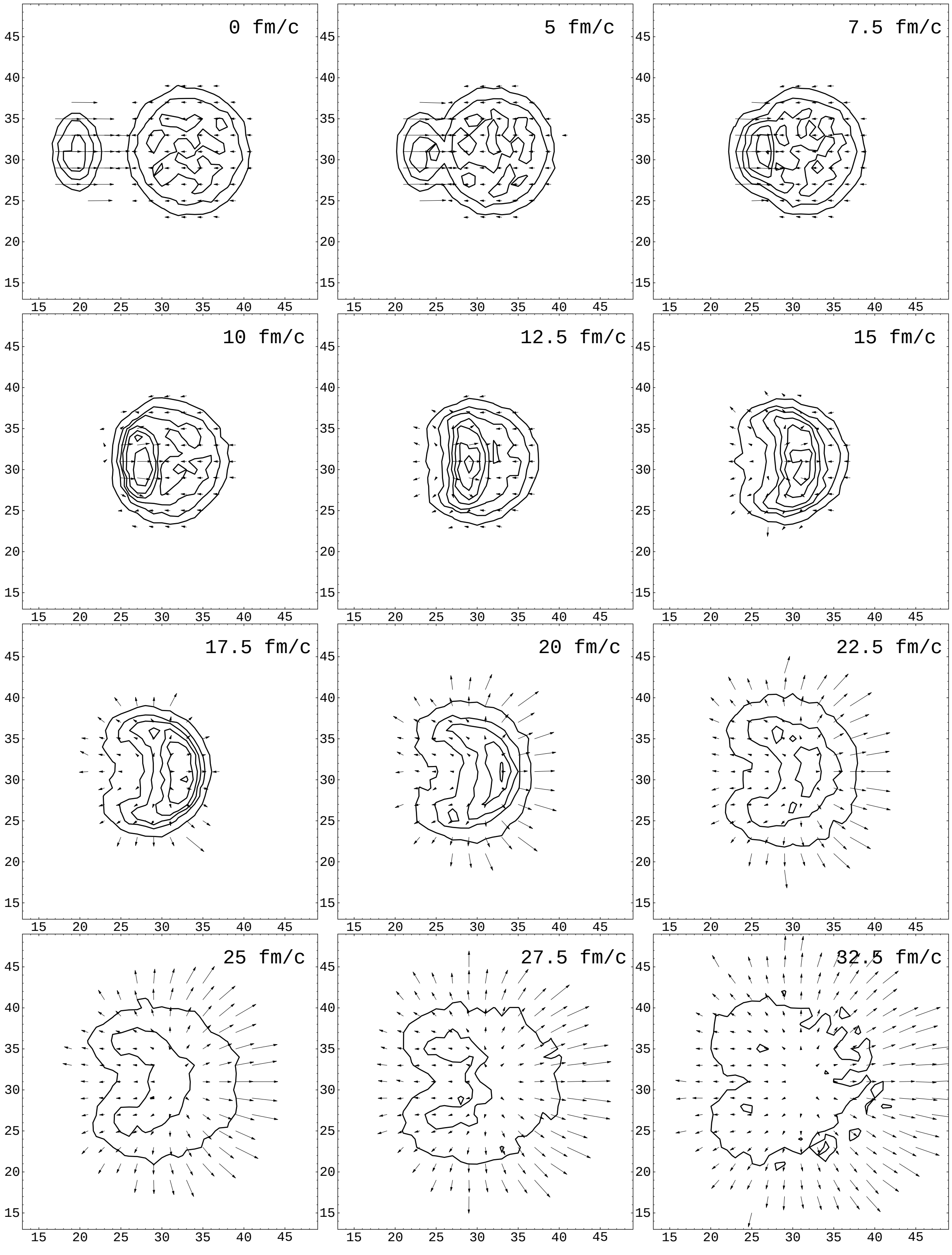


Abb. 4.5: Ablauf einer zentralen Ca+Au - Kollision bei 1AGeV.

Spektator zurück, das gesamte System ist instabil geworden. Jedoch zeigt sich zwischen 12.5 und 20 fm/c ein deutlicher Einschußkanal, erkennbar als Bereich niedriger Dichte, was ein einfaches geometrisches Bild zur Berechnung der an der Zahl teilnehmenden Nukleonen (A_{part} in Kapitel 5.1, vergleiche auch [55]) unterstüzt.

Den Öffnungswinkel des Einschußkanals kann man als Mach-Winkel interpretieren. Die Geschwindigkeit des mit 1 AGeV eingeschossenen Kernes beträgt $\beta = 0.87$ c. Die Schallgeschwindigkeit c_S in Kernmaterie kann man in einer ersten Näherung abschätzen zu:

$$\text{Energiedichte} \quad \epsilon \sim \rho_0 \cdot m_N \,, \quad \text{Druck} \quad P = \rho^2 \frac{\partial(\epsilon/\rho)}{\partial \rho} \;=\; \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} - \epsilon \,,$$

$$\text{Kompressibilität} \quad K = 9 \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho_0}$$

$$\Rightarrow \quad c_S^2 \;=\; \left. \frac{\partial P}{\partial \epsilon} \right|_{\rho_0} \;=\; \frac{\partial P}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}} \;=\; \frac{K}{9 \;\; \epsilon/\rho} \;\simeq\; (0.19 \text{ c})^2 \tag{4.1}$$

bei der hier verwendeten Kompressibilität von 290 MeV. Damit ergibt sich ein Öffnungswinkel des Mach-Kegels von 13^o, der kleiner ist als der in der Abbildung nach $t = 20$ fm/c augenscheinlich sichtbare Winkel von $25 - 30^o$. Bei diesem Vergleich muß man jedoch berücksichtigen, daß

1) der Projektilkern bei $t = 20$ fm/c schon stark abgebremst ist, was den Öffnungswinkel des Kegels vergrößert,

2) obige Abschätzung nur für kalte Kernmaterie (T $= 0$, $\rho = \rho_0$) gilt, in Wirklichkeit jedoch die kinetische Energie des Projektils in Anregungsenergie umgesetzt wird,

3) sich starke Kompressionen mit steilen Gradienten (Schockwellen) mit einer größeren Geschwindigkeit als der nuklearen Schallgeschwindigkeit ausbreiten [56, 57, 58] und diese Schockgeschwindigkeit der Berechnung des Öffnungswinkels des Mach-Kegels zugrundegelegt werden muß. Eine grobe Abschätzung der Schockgeschwindigkeit nach [56] mit einer angenommenen Kompression von $2\rho_0$ ergibt $v_{\text{Schock}} \simeq 0.47$ und damit $\Theta_{\text{Mach}} = 32^o$.

4.3 Dichte, Teilchenraten und Expansionsverhalten

In Abbildung 4.6 ist der Verlauf der zentralen Nukleonendichte, die Anzahl der Kollisionen im gesamten Reaktionsvolumen sowie die Anzahl der Pionen und der gesamten pionischen Freiheitsgrade, Resonanzen plus Pionen, für die zentrale Au+Au - Reaktion bei 1 AGeV gezeigt. Bevor die Kerne aufeinander treffen, ist die Dichte gleich Null. Bei 5 fm/c beginnen die Kerne zu überlappen. Die Dichte steigt in den nächsten 5

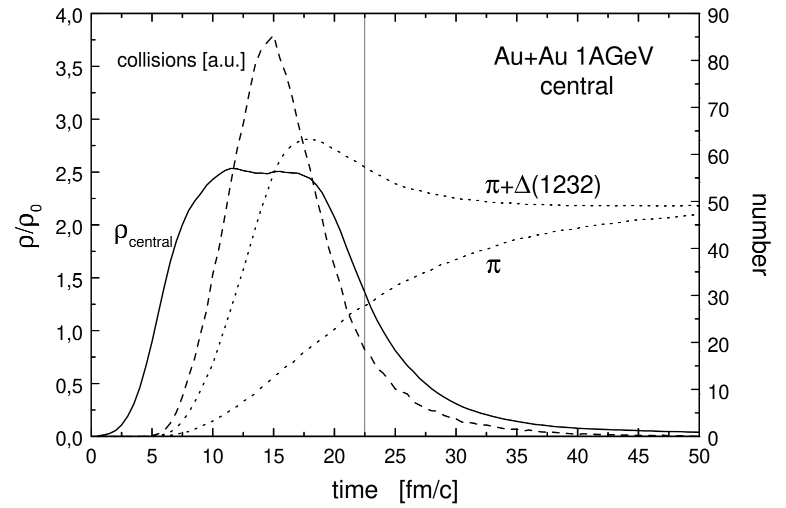


Abb. 4.6: Zeitlicher Verlauf der Dichte in der zentralen Zelle des Reaktionsvolumens ("ρ_{central}"), der Zahl der Kollisionen ("collisions") und der Anzahl von Pionen sowie der Summe von Deltas und Pionen bei einer zentralen Au+Au - Kollision mit einer Einschuß-energie von 1AGeV. Die dünne senkrechte Linie markiert die Zeit t = 22.5 fm/c. Zur Anzahl der Pionen am Reaktionsende vergleiche die Diskussion in Kapitel 5.

fm/c bis auf $2.5\rho_0$ an und bleibt plateauartig konstant bis 17.5 fm/c. Bei 27.5 fm/c fällt die zentrale Dichte auf unter $0.5\rho_0$ ab. Spätestens ab 35 fm/c ist die Anzahl der $\pi + \Delta \simeq$ const., d. h. die Zahl der gesamten pionische Freiheitsgrade ist konstant. Den Bereich von 30 bis 35 fm/c kann man daher ungefähr mit dem Reaktionsende bezüglich der Teilchenproduktion gleichsetzen. Es frieren in der Folgezeit lediglich noch niederenergetische Pionen aus massearmen Delta-Resonanzen bei geringer Dichte aus. Eine detaillierte Analyse der Mesonenproduktion und -dynamik in Schwerionenkollisionen mit dem CBUU-Modell erfolgte in einer anderen Arbeit [3].

Schaut man lediglich auf die globalen (Fluß-)Eigenschaften, so ist die Reaktion bereits nach 22.5 fm/c beendet. Dies ist im Vergleich zur Teilchenproduktion, siehe oben, sehr früh; es existieren noch Dichten von ca. $2\rho_0$ in der zentralen Zelle. Doch sind bis t = 22.5 fm/c bereits 90 % aller Kollisionen passiert, die Kollisionsrate ist auf 20 % des Maximalwertes gefallen. Es können noch einzelne niederenergetische Teilchen wie leichte Delta-Resonanzen entstehen, auch finden noch Absorptionsprozesse der Form $N\Delta \to NN$ statt, doch ist die gesamte kollisionsbedingte Reaktionsdynamik bereits zum Abschluß gekommen, wie im folgenden gezeigt werden soll:

Für eine genauere Analyse der Reaktionsdynamik wurden im Reaktionsvolumen Systemachsen definiert, die ihren Ursprung im Zentrum der der Reaktion, d. h. im gemeinsamen Schwerpunkt der kollidierenden Kerne haben, siehe Abbildung 4.7. In Kegeln um diese Achsen mit 10 Grad Öffnungswinkel wurden dann jeweils die Teilchengeschwindigkeiten, die Geschwindigkeitsprofile, die Ausrichtung der Expansion u.s.f. bestimmt.

Es zeigt sich, daß nach t = 22.5 fm/c die maximale Expansionsgeschwindigkeit in

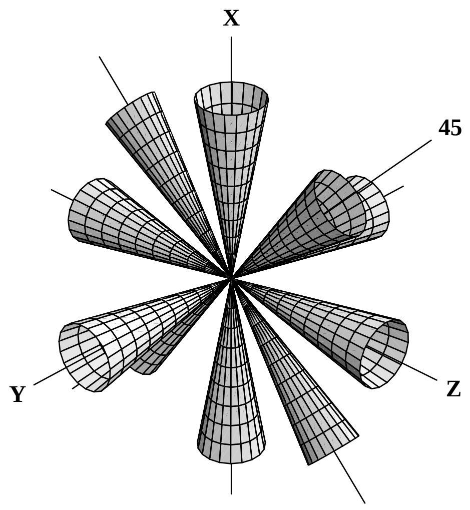


Abb. 4.7: Anordnung der Kegelschnitte im Reaktionsvolumen zur Analyse des Expansionsverhaltens und später der Frage der Equilibrierung. Die z-Achse entspricht der Einschußrichtung der Kerne, bei einem semizentralen Stoß sind sie in x-Richtung gegeneinander versetzt.

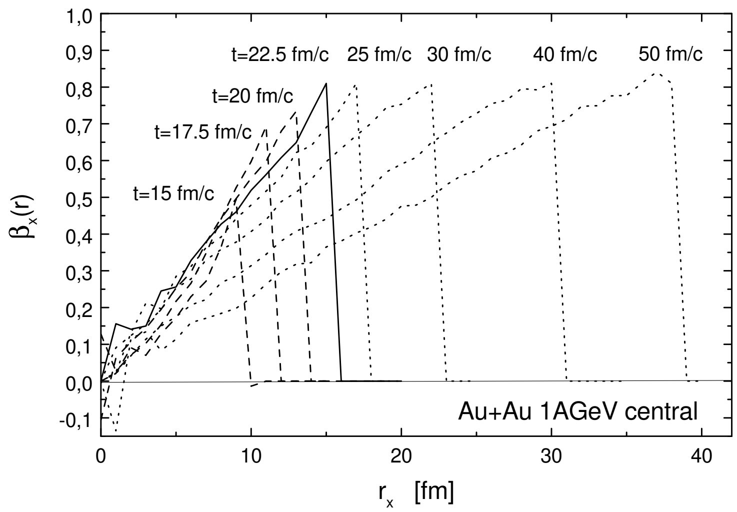


Abb. 4.8: Transversales Geschwindigkeitsprofil zu verschiedenen Zeiten für eine zentrale Au+Au - Kollision bei 1AGeV. Die endgültige Form ist bereits nach t = 22.5 fm/c erreicht (durchgezogenen Linie), im Verlauf der weiteren Expansion wird das Profil lediglich gestreckt.

transversaler Richtung erreicht ist. Das bis zu dieser Zeit entstandene radiale Geschwindigkeitsprofil wird im weiteren Verlauf der Reaktion durch die Expansion des Systems gestreckt, im Aussehen jedoch nicht mehr verändert, vergleiche Abbildung 4.8. Ebenso haben sich die mittleren radialen Geschwindigkeiten $\langle \beta_{\mathrm{radial}} \rangle$ in allen Richtungen des Systems einander angeglichen, wie in Abbildung 4.9 gezeigt ist; das System hat eine gewisse Isotropie erreicht. Diese mittleren radialen Geschwindigkeiten nehmen in der Folgezeit noch etwas zu, da mit zunehmender Expansion des Systems die Kollinearität von Teilchenimpuls und -ort zunimmt.

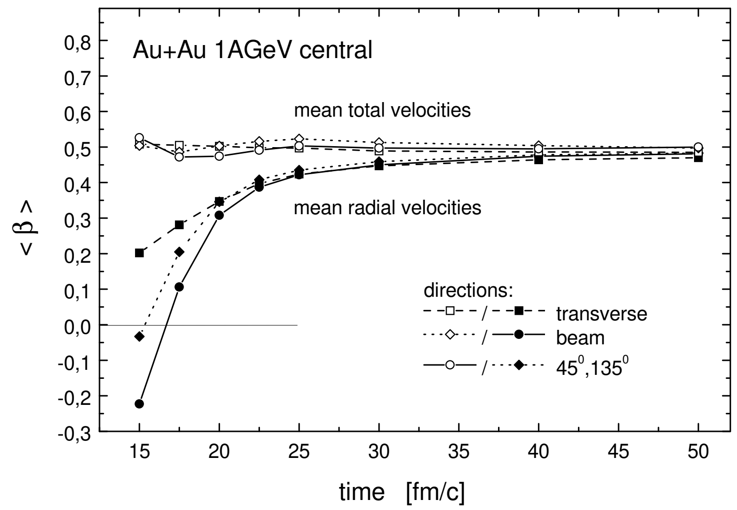


Abb. 4.9: Mittelwerte der Teilchengeschwindigkeiten und Mittelwerte der radialen Expansionsgeschwindigkeiten entlang verschiedener Systemachsen als Funktion der Zeit.

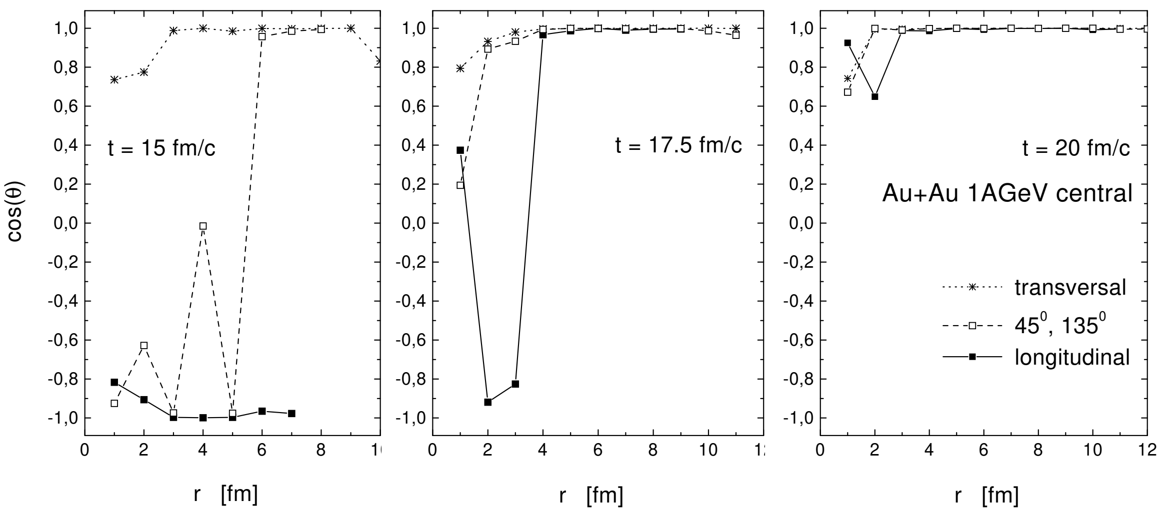


Abb. 4.10: Abweichung der Richtung des mittleren Flusses entlang der verschiedenen Systemachsen von der Richtung der Systemachse nach 15, 17.5 und 20 fm/c.

Interessant ist in diesem Zusammenhang, daß die Expansion bereits sehr früh in hohem Maße gleichmäßig radial nach außen gerichtet ist, wie aus Abbildung 4.10 hervorgeht. Noch während der Hochdichtephase, bei 17.5 fm/c, ist sogar in der 45^0- bzw. 135^0-Richtung eine hohe Kollinearität von Flußrichtung und Systemachse erreicht, obwohl in z-Richtung noch Materie in das Reaktionsvolumen hineinströmt. Man erkennt zu diesem Zeitpunkt auch das Umschlagen der Strömungsrichtung entlang der z-Achse des Systems. Ab 20 fm/c sind dann die mittleren Impulse in allen Zellen nach außen gerichtet.

4.4 Transparenz, Mischung und Abprallen

Eine der gegenwärtig bei der Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI) in Darmstadt und der Universität Heidelberg untersuchten Problemstellungen ist die Frage: Was geschieht eigentlich im Verlauf einer Kern-Kern-Kollision? Es bestehen mehrere Möglichkeiten: 1) Die Kerne prallen mehr oder weniger voneinander ab und die Energie überträgt sich nur durch Stöße ins gesamte Reaktionsvolumen. Dies wäre ähnlich dem Wärme- und Schalltransport in Festkörpern, bei dem die einzelnen Atome auch ihre jeweiligen Gitterplätze beibehalten. 2) Es findet eine Durchmischung der Materie von Target und Projektil hin zu einem homogenen Feuerball statt. 3) Die Kerne "fliegen" durcheinander hindurch. Die verschiedenen Möglichkeiten sind in Abbildung 4.11 schematisch dargestellt.

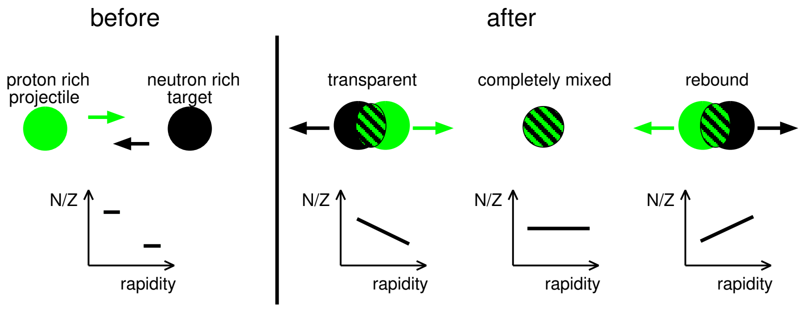


Abb. 4.11: Schematische Darstellung der verschiedenen möglichen Mischungsszenarien bei einer Schwerionenkollision (obere Reihe) und der sich daraus ergebenden Isospinverteilung (untere Reihe): Transparenz, Mischung oder Repulsion (rechte Seite links, mitte bzw. rechts) sowie die Verhältnisse vor der Kollision (linke Seite). Abbildung aus [54].

Experimentell ist dies eine extrem schwierige Fragestellung, da es nicht möglich ist, Nukleonen aus dem Projektil von denen aus dem Target zu unterscheiden. Man versucht daher, bei Kollisionen von Kernen mit verschiedenem Isospinverhältnis Z/N aus dem Ladungsverhältnis bei verschiedenen Rapiditäten, bzw. aus dem ^{3}He/t - Verhältnis Rückschlüsse auf die Reaktionsdynamik zu ziehen [54]. Im Rahmen eines Transportmodells wie dem CBUU-Modell ist der Grad der Durchmischung sehr viel einfacher zu untersuchen, da direkt die Herkunft der Testteilchen bzw. Nukleonen feststellbar ist. Somit kann man dies für eine große Varietät von Massen, auch für Systeme mit gleichem Z/N, und Energien prüfen. Die Ergebnisse aus dem letzten Kapitel 4.3 deuten dabei auf ein voneinander Abprallen der Kerne hin, da sich, wie speziell in Abbildung 4.10 zu erkennen, die Flußrichtung der Teilchen im Kegel um die z-Achse im *Außen*bereich zuerst umdreht.

Wie sich bei genauerer Untersuchung zeigt, ist der Grad der Durchdringung extrem von der Einschußenergie der Kollision und der Masse des Gesamtsystems abhängig. Interessanterweise sind Systeme bei *niedriger* Einschußenergie "transparent", während sie sich mit zunehmender Energie mehr und mehr mischen, wohingegen man naiverweise erwarten würde, daß das Eindringen in den jeweils anderen Kern bei niedriger Energie früher gestoppt wird. Das vorliegende Verhalten liegt zum einen darin begründet, daß

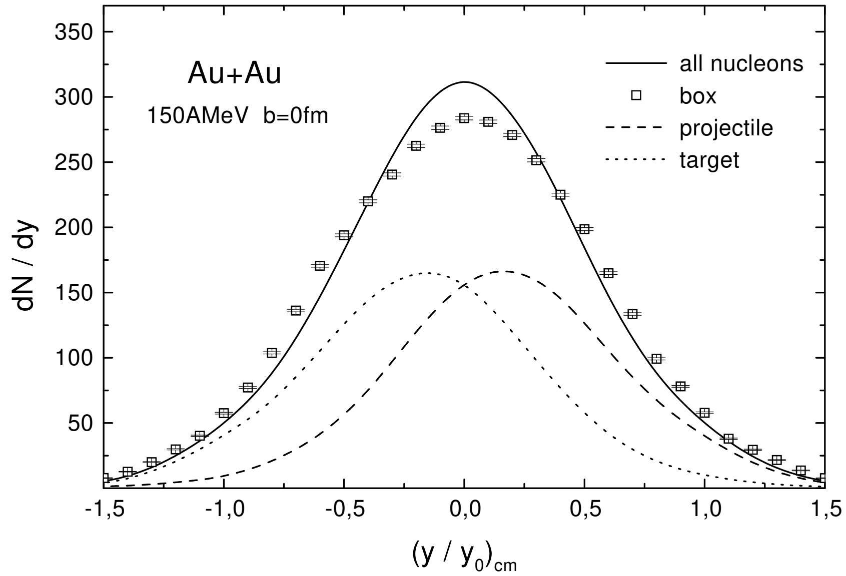


Abb. 4.12: Rapiditätsverteilung der Nukleonen im Endzustand einer zentralen Au+Au - Kollision (durchgezogene Linie) im Vergleich zur Gleichgewichts-Verteilung derselben Reaktion, berechnet in einer Box mit periodischen Randbedingungen (Quadrate). Ebenso eingezeichnet: Verteilung der Projektil- und der Targetnukleonen nach der freien Reaktion (gestrichelte und gepunktete Linie).

bei Energien von $E_{kin} < 300$ MeV das Nukleonenpotential bei normaler Kerndichte noch attraktiv, und zum anderen die Zahl der inelastischen Kollisionen gering ist. Elastische Kollisionen, die auch bei niedrigen Energien in großer Zahl auftreten, sind vorwärts-rückwärts - gepeakt und stoppen daher nicht.

Abbildung 4.12 zeigt die Rapiditätsverteilung der Nukleonen im Endzustand einer Au+Au - Kollision bei 150 AMeV Einschußenergie im Vergleich zu einer thermischen Verteilung, sowie separat die Verteilungen für die Target- und Projektilnukleonen. Die thermische Verteilung wurde dabei ebenfalls mit dem CBUU-Modell generiert, indem die gleiche Reaktion in einer Box mit periodischen Randbedingungen simuliert wurde, was nach genügend großer Zeit zu einer vollständigen thermischen und chemischen Equilibrierung führt. Obwohl die gesamte Rapiditätsverteilung der freien Kollision der thermischen Verteilung stark ähnelt[1], sind die Verteilungen der Target- und Projektilnukleonen noch klar getrennt. Bei 1 AGeV Einschußenergie hingegen hat eine weitgehende Durchmischung von Target und Projektil stattgefunden. Dies geht aus Abbildung 4.13 hervor, in der wiederum die Rapiditätsverteilungen von Target- und Projektilnukleonen, sowie die Verteilung aller Nukleonen im Vergleich zu den experimentellen Daten aus [59] gezeigt sind.

Man muß allerdings an dieser Stelle anmerken, daß diese Separierung der Nukleonen nach Herkunft nur im Rahmen eines klassischen Transportmodells möglich ist; quanten-

[1] Die Breite der thermischen dN/dy-Verteilung ist von der Größe der Box abhängig, siehe Kapitel 4.4.1

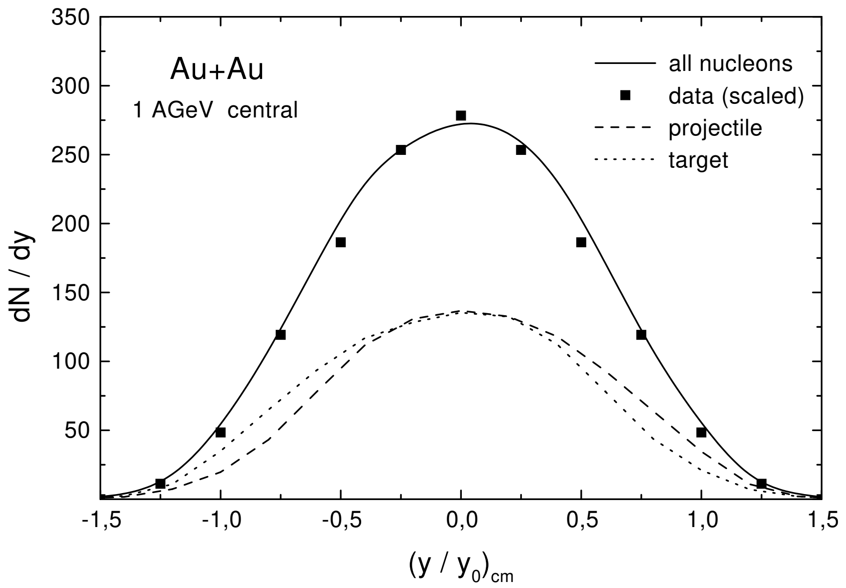


Abb. 4.13: Rapiditätsverteilung der Testteilchen des CBUU-Modells am Ende einer zentralen Au+Au - Kollision bei 1 AGeV Einschußenergie (durchgezogene Linie) im Vergleich zu experimentellen Proton-Rapiditätsverteilungen aus [59] (Quadrate). Die gemessene Verteilung wurde dabei so skaliert, daß sich integral die gleiche Anzahl von Nukleonen ergibt. Ebenso eingezeichnet: Die Verteilung der Target- und Projektilnukleonen des CBUU-Modells (gestrichelte bzw. gepunktete Linie).

mechanisch handelt es sich um ununterscheidbare Teilchen. Trotzdem soll im weiteren das Target- zu Projektilverhältnis stellvertretend für das Z/N-Ratio isospinasymmetrischer Systeme untersucht werden, da es die numerisch weit stabilere Größe darstellt. Die Ergebnisse zur Equilibrierung als Funktion der Systemmasse und Einschußenergie sind dabei qualitativ direkt übertragbar; für den quantitativen Vergleich mit dem Experiment wird das Ladungsverhältnis für ausgewählte Systeme und Energien dann in Kapitel 4.4.4 separat berechnet.

4.4.1 Massen- und Energieabhängigkeit

Um Oberflächeneffekte zu vermeiden, wurde das Target/Projektil-Ratio R

$$R = \frac{N_{\text{Projektil}} - N_{\text{Target}}}{N_{\text{Projektil}} + N_{\text{Target}}} \tag{4.2}$$

in den folgenden Abbildungen nur für die Teilchen in dem Kegel entlang der z-Achse aus Abbildung 4.7 für positive Rapiditäten berechnet. "+1" bedeutet dabei, daß sich Projektil und Target einander durchdrungen haben, "-1" entspricht einem Abprallen, "0" perfekter Durchmischung.

Abbildung 4.14, links, zeigt den Grad der Durchmischung in Abhängigkeit von der Einschußenergie für das System Au+Au. In Bereich um $y = 0$, also in der direkten

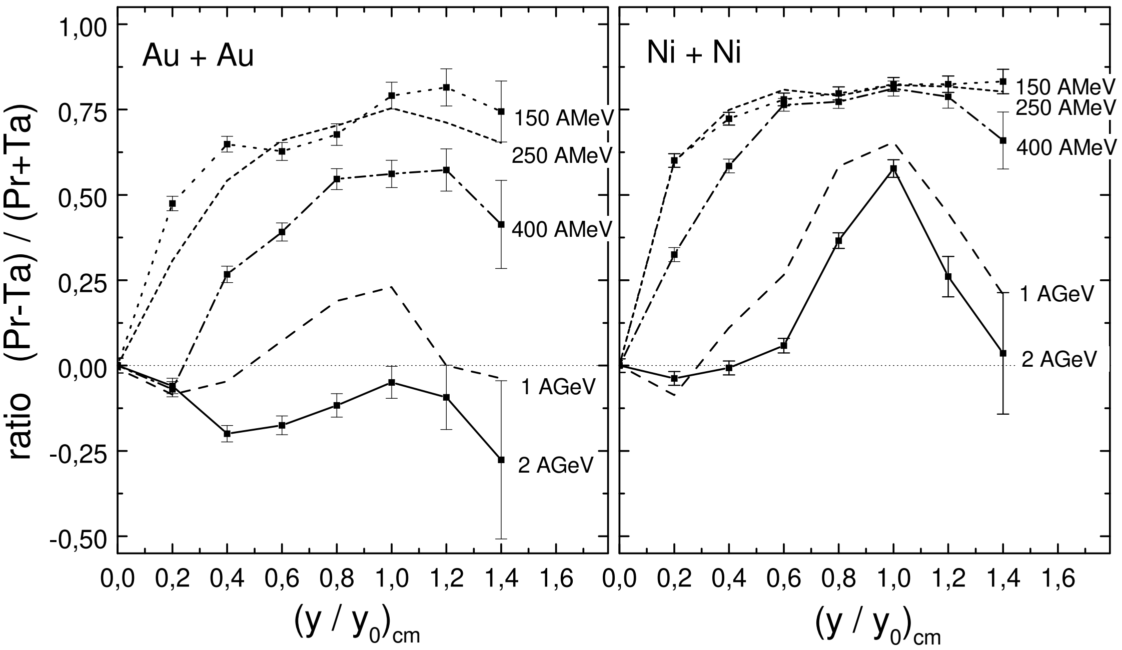


Abb. 4.14: Target/Projektil-Ratio R aus Gleichung (4.2) als Funktion der normalisierten Rapidität für die Systeme Au+Au und Ni+Ni bei verschiedenen Einschußenergien.

Reaktionszone, ist sie immer gegeben. Im Bereich der Projektilrapidität $y \simeq 1$ zeigen sich dagegen erhebliche Differenzen. Bei 150 und 250 AMeV erweisen sich die Kerne mit einem Ratio R um 0.75 als praktisch transparent. Erst bei 1 AGeV Einschußenergie tritt eine nennenswerte Durchmischung im gesamten Systemvolumen auf. Bei 2 AGeV wird R sogar negativ, d. h. die kollidierenden Kerne dringen nicht mehr vollständig ineinander ein.

Ein ähnlicher Zusammenhang ergibt sich für das leichte Ni+Ni - System, das in Abbildung 4.14 rechts dargestellt ist. Der Unterschied zu Au+Au besteht darin, daß es hier selbst bei der höchsten untersuchten Energie, 2 AGeV, im Bereich von $y > 0.6$ nicht zu einer vollständigen Mischung kommt. Aufgrund der Größe des Systems reicht die Zahl der inelastischen Kollisionen hierfür nicht aus.

Es ist wichtig, festzuhalten, das die zunehmende Durchmischung von Target und Projektil mit zunehmender Einschußenergie kein trivialer Effekt eines zunehmenden Abstoppens der Kerne ist. Als Charakteristikum des "Stopping" von Kernen bei einer Schwerionenreaktion wird üblicherweise [59, 60, 61] die Größe E_{RAT} verwendet. Sie ist gegeben durch das Verhältnis (Ratio) von transversaler zu longitudinaler Energie

$$E_{\mathrm{RAT}} = \frac{E_t}{E_l} = \frac{\sum_i \left(p_x^2 + p_y^2\right)}{\sum_i p_z^2} \, , \tag{4.3}$$

wobei die Energien der Teilchen i nichtrelativistisch als $p^2/2m$ angesetzt sind. Für eine Schwerionenkollision bei festem Stoßparameter ergibt sich eine gewisse E_{RAT}-

E_{kin}/A [MeV]	$\langle E_{\mathrm{RAT}} \rangle$	ΔE_{RAT}
150	1.71	0.49
250	1.74	0.50
400	1.92	0.51
1000	1.50	0.36
2000	1.22	0.33

Tab. 4.1: Mittelwerte der E_{RAT}-Verteilungen zentraler Au+Au - Kollisionen bei verschiedenen Einschußenergien aus einem gaußförmigen Fit an diese Verteilungen.

Verteilung. Für die zentralen Au+Au - Kollisionen aus Abbildung 4.14 wurden diese Verteilungen mit einer Gauß-Kurve gefittet, deren Mittelwert und Breite jeweils in Tabelle 4.1 angegeben ist. Das Abstoppen der Kerne erreicht demzufolge bereits bei einer Energie von 400 AMeV sein Maximum, eine weitgehende Target/Projektil-Durchmischung findet dagegen erst bei 1 AGeV statt. Bei niedrigen Energien bzw. Relativimpulsen wirken ein auch bei doppelter Kerndichte noch attraktives Nukleonenpotential (vergleich Abbildung 2.2 in Kapitel 2.3.2) und lediglich elastische Kollisionen, die nicht stoppen. Bei hohen Energien hingegen ist das Nukleonenpotential vernachlässigbar, die stoppende Wirkung geht hier von den inelastischen Kollisionen aus.

Um den Einfluß von Feuerballgröße, -temperatur und -lebensdauer auf die Target/Projektil-Durchmischung detaillierter zu untersuchen, wurde im folgenden ein globaler Equilibrierung-Index für Reaktionen in einer Box mit periodischen Randbedingungen als Funktion der Zeit für verschiedene Systeme und Energien berechnet. Die Größe dieser Box wurde dabei so gewählt, daß die mittlere Dichte für $t \to \infty$ bei $0.9 \times \rho_0$ für Au+Au bzw. $0.7 \times \rho_0$ für Ni+Ni liegt. Diese Dichte entspricht in etwa der zentralen Dichte am Ende einer Schwerionenreaktion (vergleiche Abbildung 4.6 und zugehörige Diskussion) und die daraus resultierenden Abmessungen der Box sind groß genug, um die Reaktion in ihr weitgehend analog zur freien Kollision, ohne Schockfrontenbildung durch zu kleine transversale Ausdehnung der Box, ablaufen zu lassen. Ein kleineres Volumen ist daher nicht sinnvoll, eine Vergrößerung würde aufgrund der geringeren Energiedichte und Kollisionsrate zu einer schmaleren Rapiditätsverteilung in Abbildung 4.12 und längeren Equilibrierungszeiten führen. Die Kerne werden wie für eine freie Kollision im Orts- und Impulsraum intitialisiert, vergleiche Anhang A.2, und anschließend in der Box aufeinander geschoben.

Als globaler Equilibrierung-Index wurde der Durchschnitt der Target/Projektil-Ratios wie in Abbildung 4.14 im Rapiditätsbereich von $-0.9\,y_0$ bis $+0.9\,y_0$ genommen, gewichtet mit $\mathrm{sgn}(y)$. Die freien Feuerballebensdauern, mit denen verglichen wird, sind definiert als die Zeitspanne vom Anstieg der zentralen Dichte über ρ_0 bis zum Abfall unter $0.5\rho_0$ in einer freien Kollision. Dies entspricht in etwa dem Zeitrahmen, in dem praktische alle NN-Kollisionen stattfinden, wie im letzten Abschnitt beschrieben.

Es zeigt sich, daß kleine Systeme nicht wesentlich schneller Isospin-equilibrieren

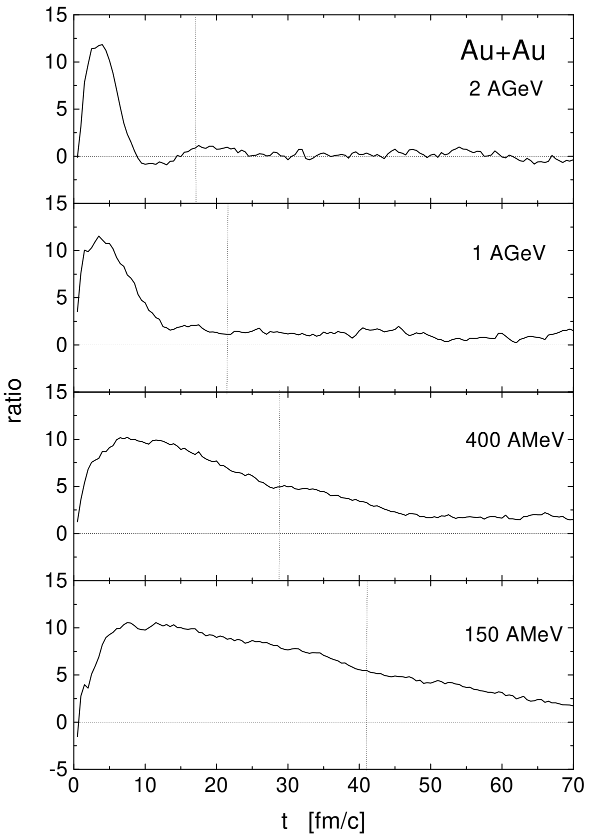


Abb. 4.15: Globaler Projektil/Target-Equilibrierungs-Index wie im Text beschrieben als Funktion der Zeit für Systeme in einer Box mit periodischen Randbedingungen. Links: Au+Au, rechts: Ni+Ni. Die zum Vergleich markierten Zeiten sind die Lebensdauern des Feuerballs in der entsprechenden freien Reaktion.

als schwere, ihnen dafür aber weit weniger Zeit zur Verfügung steht. Dies geht aus Abbildung 4.15 hervor. Definiert man das Erreichen einer globalen Durchmischung als das Absinken des globalen Equilibrierungs-Index unter 10 % seines Maximalwertes, so zeigt sich, daß bei 150 und 250 AMeV Einschußenergie die dafür benötigte Zeit die verfügbare bei beiden Systemen, ^{58}Ni+^{58}Ni und ^{197}Au+^{197}Au, deutlich übersteigt. Bei 1 AGeV erreicht das Au+Au - System einen vollständig durchmischten Zustand, nicht aber das Ni+Ni - System. Bei 2 AGeV kann in beiden Systemen globale Equilibrierung erreicht werden; es zeigt sich sogar vorübergehend ein negativer Wert des globalen Index, der darauf zurückzuführen ist, daß bei dieser Energie eine starke Repulsion vom Feuerball ausgeht, die Materie in der Box aber nicht zur Seite ausweichen kann. Es läuft dann eine Schockfront der einströmenden Materie entgegen, die die Bewegungsrichtung der Nukleonen umkehrt. Dies ist – in weniger ausgeprägter Form – auch für die freien Kollisionen der Fall, wie in Abbildung 4.14 für das Au+Au - System erkennbar.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die entscheidende Größe für die Isospin-Equilibrierung eines Systems die Zahl der inelastischen NN-Stöße pro Volumeneinheit ist. Diese ist beschränkt durch die Lebensdauer des Feuerballs, die wiederum durch die

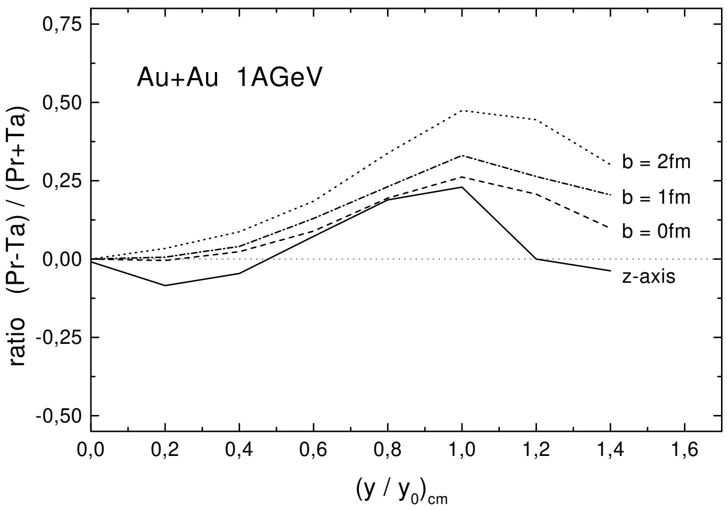


Abb. 4.16: Abhängigkeit des Mischungssignals von der Zentralität einer Reaktion. Gezeigt ist das Projektil/Target-Ratio, gemittelt über das gesamte Reaktionsvolumen, jeweils für verschiedene Stoßparamter (Linien "b=0fm", "b=1fm" und "b=2fm") im Vergleich zum "wahren" Ratio in einem Kegel entlang der z-Achse des Systems ("z-axis").

Größe des kollidierenden Systems gegeben ist. Dabei wiegt die Abnahme der Größe des Feuerballs mit abnehmender Masse die Verkürzung der Lebensdauer nicht auf.

4.4.2 Oberflächeneffekte und Zentralitätsabhängigkeit

Will man aus den Ergebnissen des letzten Kapitels Rückschlüsse auf mögliche experimentelle Signaturen schließen, so muß man Oberflächeneffekte sowie die Zentralitätsabhängigkeit des Mischungssignals berücksichtigen. Im Gegensatz zum letzten Kapitel, in dem die Durchmischung der Kerne nur entlang eines Kegels um die z-Achse des Systems untersucht wurde, ist experimentell immer nur ein Signal des gesamten Systems, einschließlich der wesentlich dünneren Oberflächen, erhältlich. Man muß daher untersuchen, inwieweit eine Transparenz der Oberflächen, ein sogenannter Koronareffekt, das "wahre" Mischungssignal verfälscht. Ebenso ist es experimentell außerordentlich schwierig, wirklich zentrale Reaktionen zu selektieren.

Abbildung 4.16 zeigt das "wahre" Target/Projektil - Ratio, wie in Abbildung 4.15 entlang der z-Achse des Systems, im Vergleich zu einem über das ganze Volumen gemittelten Ratio für verschiedene Stoßparameter. Für $b = 0$ ist die Übereinstimmung sehr gut, vor allem in dem experimentell untersuchten Bereich $0.75 < y/y_0 < 1$; daraus ergibt sich eine Vernachlässigbarkeit von Koronareffekten. Für $b = 1$ fm liegt ebenfalls noch gute Übereinstimmung vor, für $b \geq 2$ fm treten jedoch sehr schnell größere Abweichungen auf. Der kritische Punkt ist also in der Tat, inwieweit man zentrale Ereignisse filtern kann; bei guter Zentralitätsselektion ($b \leq 1$ fm) ist die "wahre" Durchmischung gut meßbar.

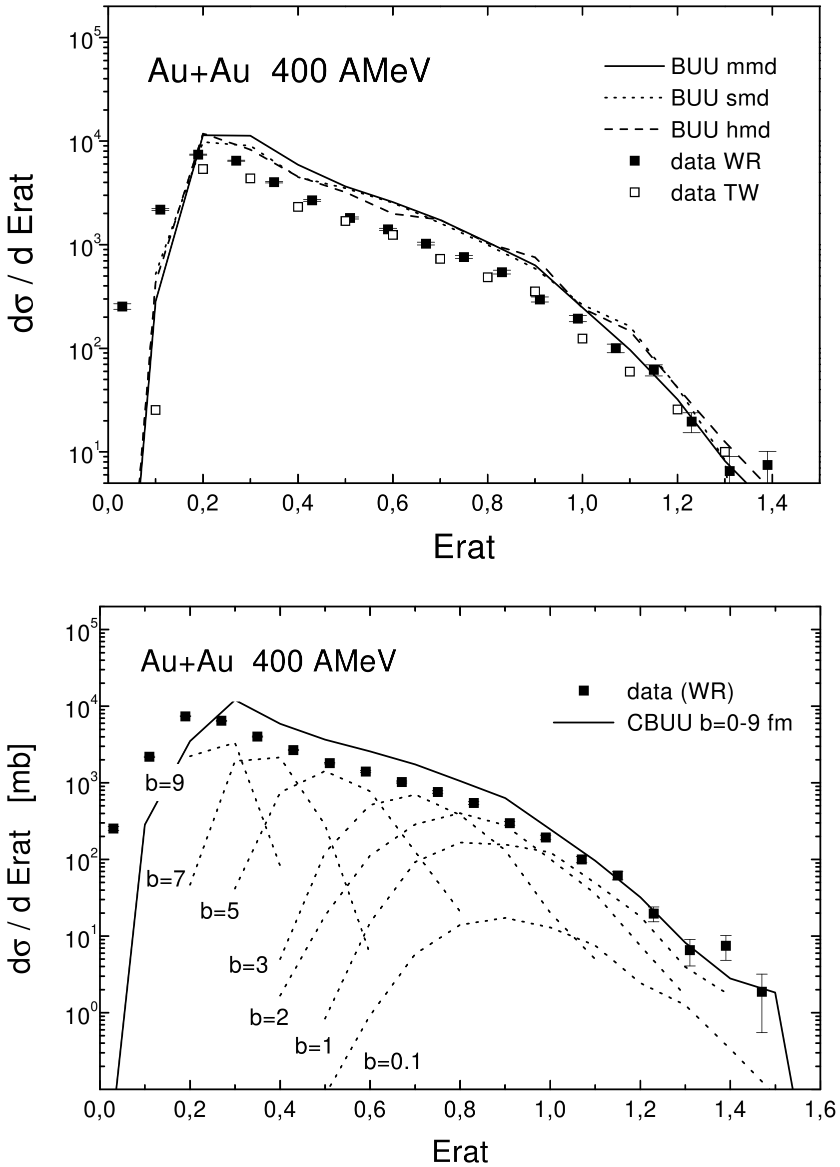


Abb. 4.17: Oben: Mit dem CBUU-Modell berechnete E_{RAT}-Verteilung für eine Au+Au - Kollision bei 400 AMeV Einschußenergie und Stoßparameter $b = 0 - 9$ fm (entsprechend den Multiplizitätsbins PM3-PM5). Weiche EoS ("smd"), mittlere ("mmd") und harte ("hmd") im Vergleich zu den Daten aus [60, 62] ("data TW", "data WR"). Unten: Abhängigkeit der E_{RAT}-Verteilung vom Stoßparameter, wie sie sich mit dem CBUU-Modell ergibt.

4.4.3 Experimentelle Zentralitätsbestimmung

Wie in Kapitel 4.4.1 beschrieben, wird die Größe E_{RAT} (4.3) zur Charakterisierung des Abstoppens der Kerne bei einer Schwerionenreaktion herangezogen. Dieses Abstoppen der Kerne ist für zentrale Reaktionen am größten, für einen isotrop expandierenden

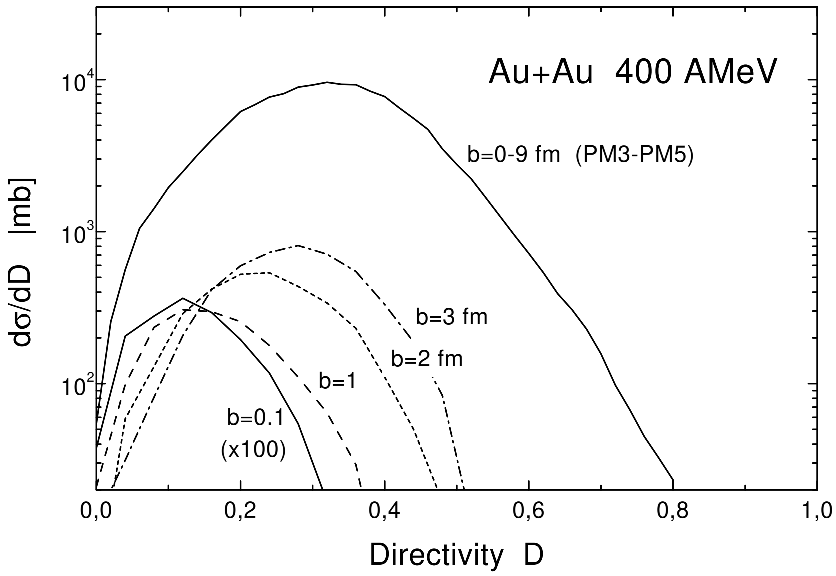


Abb. 4.18: Directivity D im Stoßparameterbereich $b = 0 - 9$ fm, berechnet mit dem CBUU-Modell.

Feuerball ergibt sich dabei ein maximales E_{RAT} von 4:

$$
\begin{aligned}
n(\theta) \sim \sin\theta\ , \quad p_z = p\cos\theta\ , \quad p_t = p\sin\theta \\
\Rightarrow \quad E_{\mathrm{RAT}} \;=\; \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta} = 4\ .
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Berücksichtigt man die geometrische Akzeptanz im Falle des FOPI-Detektors von $7 - 30^o$ [60], so ergibt sich ein maximales Erat von 2.17.

Abbildung 4.17 zeigt im oberen Teil die E_{RAT}-Verteilung für eine Au+Au - Kollision bei 400 AMeV Einschußenergie, wie sie sich mit dem CBUU-Modell ergibt, im Vergleich zu experimentellen Daten [60, 62]. Der Verlauf wird bis hin zu kleinen E_{RAT} gut reproduziert und auch das maximale Stopping wird gut getroffen; dieses liegt deutlich unterhalb des theoretisch maximalen E_{RAT}. Insgesamt ergibt sich im CBUU-Modell ein zu starkes Abstoppen der Kerne bei mittleren Stoßparametern, entsprechend $E_{rat} = 0.4 - 0.8$, wo die Daten um einen Faktor Zwei überschätzt werden. Da E_{RAT} jedoch zur Klassifikation zentraler Ereignisse herangezogen wird, ist vor allem die Übereinstimmung bei großen Werten ausschlaggebend.

Im unteren Teil von Abbildung 4.17 ist die E_{RAT}-Verteilung für die verschiedenen Stoßparameter aufgeschlüsselt. Es zeigt sich, daß eine Beschränkung von E_{RAT} auf große Werte nur ein bedingt geeignetes Verfahren darstellt, zentrale Ereignisse auszuselektieren. So enthält eine Selektion, für die $E_{\mathrm{RAT}} > 1.2$ [60] gefordert wird, noch Beiträge von $b = 2$ fm und $b = 3$ fm - Kollisionen.

Ein als zusätzliches Kriterium herangezogene Größe ist die Directivity D [63], die die Isotropie der transversalen Impulsverteilung der Nukleonen im Endzustand einer

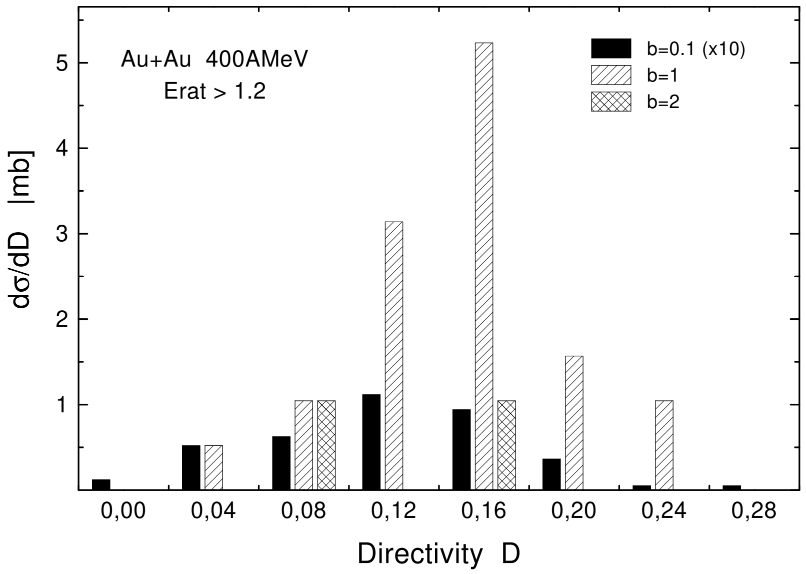


Abb. 4.19: Beiträge von Ereignissen mit Stoßparametern $b = 0.1$, 1 und 2 fm zu Ereignissen mit kleiner Directivity D bei einer Selektion der Ereignisse auf $E_{\mathrm{RAT}} > 1.2$.

Reaktion beschreibt:

$$D = \frac{|\sum \vec{p}_t|}{\sum |\vec{p}_t|} \quad , y > y_{cm} \ . \tag{4.5}$$

Die Directivity bestimmt den relativen Anteil des transversalen Impulses der Vorwärtshemisphäre, der in eine bestimmte Richtung zeigt, und liegt im Wertebereich von 0 bis 1. Die Verteilung von D für eine Au+Au - Kollision bei 400 AMeV mit Stoßparametern $b = 0 - 9$ fm zeigt Abbildung 4.18. Man erkennt, daß bereits semizentrale Ereignisse mit $b = 3$ fm signifikant zu Ereignissen mit isotroper Azimuthalverteilung beitragen.

Kombiniert man jedoch E_{RAT} und D, so kann man zentrale Ereignisse sehr gut selektieren. In Abbildung 4.19 wurden alle Ereignisse, die die Bedingung $E_{\mathrm{rat}} > 1.2$ erfüllen, in Directivity-Bins eingeordnet. Klarerweise selektiert nun ein genügend scharfer Cut in D zentrale Ereignisse, auch wenn Beiträge aus $b = 2$ fm - Reaktionen nicht vollständig ausgeschlossen werden können. Diese Cuts sind jedoch so stark, daß es nicht möglich war, genügend Ereignisse mit dem CBUU-Modell zu generieren, um hier einen klaren Prozentsatz angeben zu können.

4.4.4 Das System Ru+Zr

Experimentell untersucht man Target-Projektil-Kombinationen mit verschiedenem Isospinverhältnis Z/N, um aus dem Ladungsverhältnis bei verschiedenen Rapiditäten Rückschlüsse auf die Durchmischung des Gesamtsystems zu ziehen. Dafür wurde zum einen das ^{48}Ca+^{50}Cr - System vorgeschlagen [64], zum anderen wird gegenwärtig das $^{96}_{44}$Ru + $^{96}_{40}$Zr - System untersucht [54]. Abbildung 4.20 zeigt, daß die Ergebnisse zum

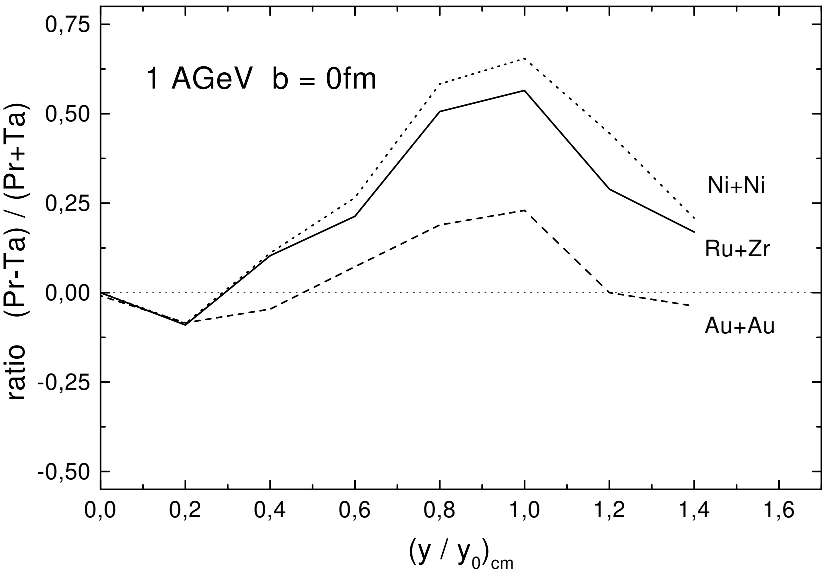


Abb. 4.20: Target/Projektil-Ratio als Funktion der normalisierten Rapidität für die Systeme Ni+Ni ($A_{\text{ges}} = 116$), Ru+Zr ($A_{\text{ges}} = 192$) und Au+Au ($A_{\text{ges}} = 394$).

Target/Projektil-Ratio für das Ru+Zr - System in der Nähe derer für das Ni+Ni - System liegen. Dies ist insofern vorteilhaft, da dadurch prinzipiell Unterschiede in der Parametrisierung des inelastischen in-Medium-Wirkungsquerschnittes meßbar werden, die für ein großes System wie Au+Au in der Anzahl der Kollisionen verschwinden. Zum anderen ist das System so groß, daß überhaupt mit einer Equilibrierung gerechnet werden kann. Das Ca+Cr - System hingegen würde noch weit weniger als das Ni+Ni - System equilibrieren, drüberhinaus wesentlich stärker durch Oberflächeneffekte beeinflußt werden.

Abbildung 4.21 zeigt das Target/Projektil-Ratio für das Ru+Zr - System bei den beiden experimentell untersuchten Energien, 400 AMeV und 1.5 AGeV, für je drei verschiedene EoS und angenommene Veränderungen des totalen in-medium-Wirkungsquerschnittes um ± 30 %. Es zeigt sich, daß bei der niedrigeren Energie die Änderung der EoS der dominierende Einflußfaktor ist: Wie beim Ni+Ni - System ist die Zahl der inelastischen Kollisionen bei 400 AMeV viel zu niedrig, um eine Durchmischung von Target und Projektil zu erreichen. Eine Erhöhung der Inkompressibilität K der EoS vermindert die Zahl der Kollisionen noch weiter und führt daher zu einer weiteren Erhöhung des Ratios und umgekehrt. Bei 1.5 AGeV hingegen wird eine weitgehende Durchmischung des Systems bis zu Rapiditäten von $y_0 \simeq 0.6$ erreicht, für eine weitergehende Equilibrierung ist die Lebensdauer des Feuerballs in diesem immer noch recht leichten System zu kurz. Die EoS spielt eine völlig untergeordnete Rolle, die wesentliche Einflußgröße ist der inelastische Wirkungsquerschnitt. Eine Änderung des Wirkungsquerschnittes um ± 30 % ändert die Durchmischung von Target und Projektil um ca. 10 %. Es ist daher denkbar, daß bei genügender Meßpräzision aus der Isospinverteilung getrennt Rückschlüsse auf die Zustandsgleichung der Kernmaterie einerseits und die Größe einer in-Medium-Modifikation der NN-Streuwirkungsquerschnitte andererseits

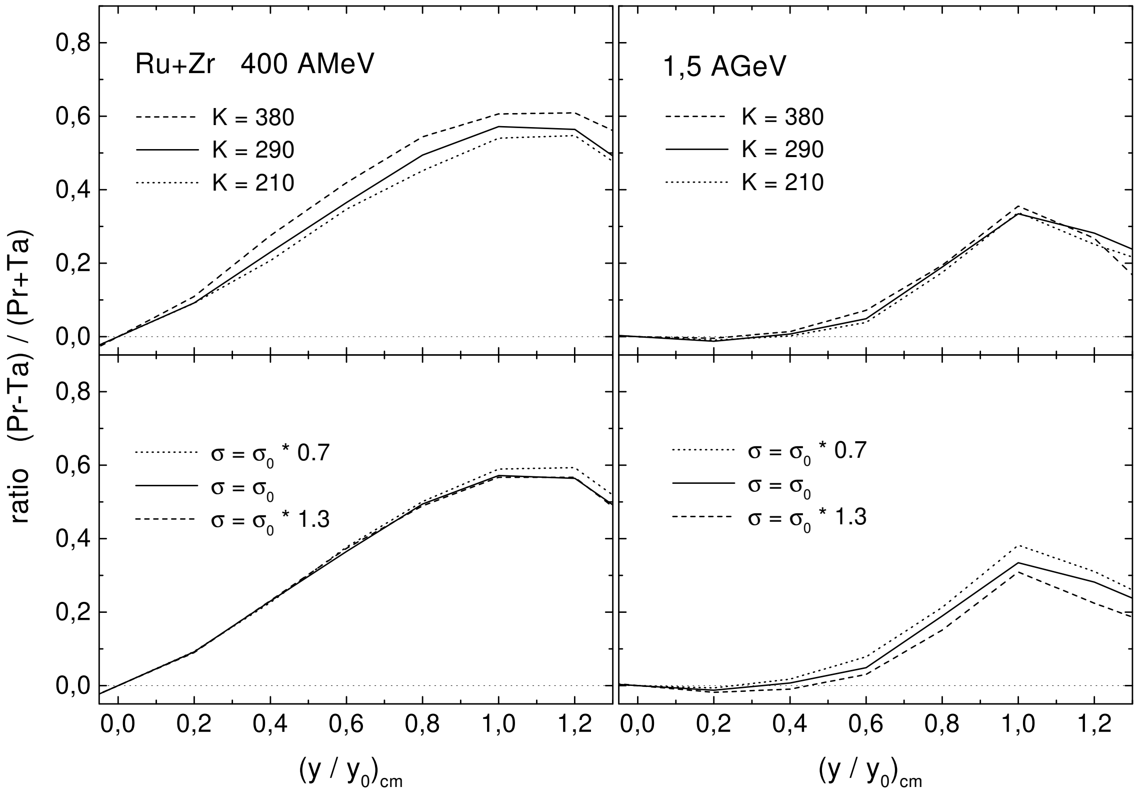


Abb. 4.21: Target/Projektil-Ratio als Funktion der normalisierten Rapidität für das System Ru+Zr bei 400 AMeV (links) und 1.5 AGeV (rechts). Die Ergebnisse wurden errechnet für verschiedene EoS mit K=210, 290 und 380 MeV (oben) und Variation des totalen in-Medium-Wirkungsquerschnittes um ±30 % (unten).

gezogen werden können.

Um Vergleiche mit zukünftigen experimentellen Daten zu ermöglichen, wurde für die folgenden Abbildungen das Ladungsverhältnis als Funktion der Rapidität für das Ru+Zr - System berechnet. Abbildung 4.22 zeigt die dabei erreichte statistische Genauigkeit anhand der symmetrischen Kombinationen Ru+Ru und Zr+Zr, deren Gesamtladungsverhältnis im Endzustand der Reaktion auf ±1 normiert wurde. Es ist gegeben durch

$$\langle R_{Z/N}^{\text{final}} \rangle \;=\; \frac{Z - \sum z_i^{(\pi)}}{A - Z + \sum z_i^{(\pi)}} \;, \tag{4.6}$$

wobei $\sum_i z_i^{(\pi)}$ die Summe über die Ladungen der emittierten Pionen ist, und nimmt die Werte 0.85 und 0.71 für Ru+Ru und Zr+Zr bei 400 AMeV bzw. 0.90 und 0.81 bei 1.5 AGeV an. Abbildung 4.23 zeigt das dann erwartete normierte Ladungsverhältnis als Funktion der Rapidität für das Ru+Zr - System bei beiden Energien.

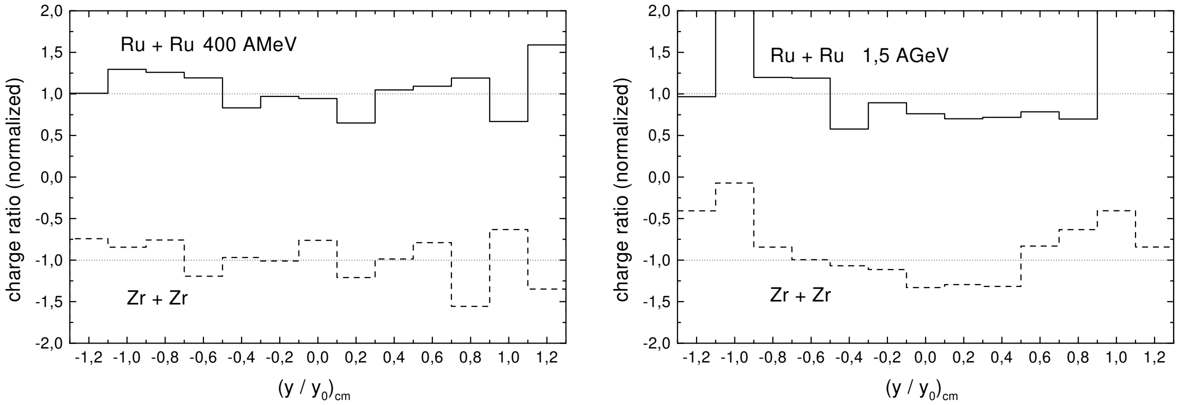


Abb. 4.22: Ladungsverhältnis als Funktion der Rapidität für die Systeme Ru+Ru und Zr+Zr, jeweils für Einschußenergien von 400 AMeV (links) und 1.5 AGeV (rechts). Die Rechnungen erfolgten mit 5000 Testteilchen pro Nukleon.

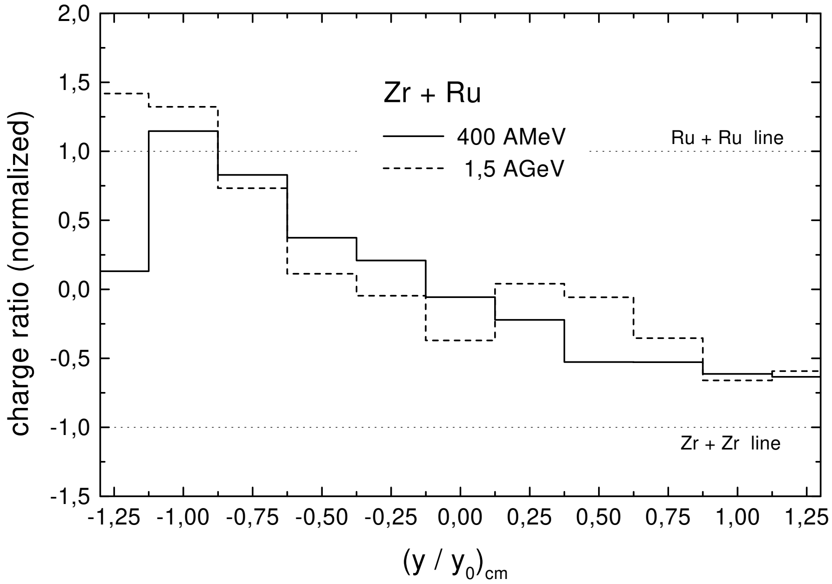


Abb. 4.23: Ladungsverhältnis als Funktion der normalisierten Rapidität für das Ru+Zr - System bei 400 AMeV und 1.5 AGeV Einschußenergie.

Kapitel 5

Teilchenproduktion

In diesem Kapitel sollen neuere Ergebnisse zur Mesonproduktion vorgestellt werden. Eine ausführliche Diskussion dieses Aspektes einer Schwerionenreaktion erfolgte in einer anderen Arbeit [3], doch sind zum einen neuere Daten der FOPI-, KaoS- und TAPS-Kollaborationen [65, 66, 67, 68] an der GSI verfügbar geworden, zum anderen zeigen einige dieser Observablen, wie sehr die Ereignisklassifikation die Resultate einer Transportrechnung im Vergleich zum Experiment beeinflußt. Darüberhinaus gibt die Berechnung der Anzahl und der Spektren der während der Reaktion produzierten Mesonen Aufschluß über die Richtigkeit der verwendeten Wirkungsquerschnitte bzw. ihre Aufschlüsselung in einen Resonanzerzeugungs- und einen -zerfallspart und die Dynamik der Resonanzen, was wiederum die Ergebnisse zum Nukleonenflow beeinflußt. So werden in diesem Kapitel einige kritische Aspekte des BUU-Stoßtermes sichtbar, die in Kapitel 2.2.1 angesprochen wurden.

5.1 Multiplizitäten

Als erster Punkt wurde die errechnete Pionenmultiplizität mit experimentellen Daten verglichen. Ein Problem dabei ist die experimentell nicht zugängliche Größe "Stoßparameter". Auch will man gerne die gemessenen oder errechneten Ergebnisse in Relation zur tatsächlich an der Reaktion teilnehmenden Nukleonen setzen, um Unterschiede zwischen verschieden schweren Systemen besser herausarbeiten zu können. Daher wird oft die Größe A_{part}, die Anzahl partizipierender Nukleonen, als Maß für die Zentralität der Reaktion verwendet.

A_{part} wird üblicherweise aus geometrischen Modellen berechnet; sie ergibt sich aus dem Volumen des geometrischen Überlapps, den zwei als kugelförmig angenommene Kerne bei einem gewissen Stoßparameter b während der Kollision haben haben. In einem Modell mit als harte Kugeln (scharf definierte Oberfläche) angenommenen Kernen ergibt sich A_{part} für ein symmetrisches System der Gesamtmasse $2A$ zu [55]

$$A_{part} = 2AF_1 \tag{5.1}$$

mit

$$F_1 = [1 - (1-\mu^2)^{2/3}][1 - (\beta/\nu)^2]^{1/2}, \tag{5.2}$$

$$\mu = \frac{R_2}{R_1}, \quad \nu = \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad \beta = \frac{b}{R_1 + R_2}, \tag{5.3}$$

wobei $R_1 = R_2 = r_0 A^{1/3}$, $r_0 = 1.2$ fm, die Radien der beiden Kerne sind. Aus dem Stoßparameter b in Gleichung (5.3) ergibt sich gemäß

$$\sigma = \pi b^2 \tag{5.4}$$

der zugehörige Wirkungsquerschnitt. Mit den Gleichungen (5.1)–(5.3) und (5.4) hat man eine Beziehung zwischen σ, b und A_{part}.

Experimentell geht man genau den umgekehrten Weg: Eine gemessene Multiplizitätsverteilung wird mit einer Funktion $d\sigma/dM$ parametrisiert, wobei

$$\sigma_{max} = \int_0^{M_{max}} \frac{d\sigma}{dM}\, dM \tag{5.5}$$

im einfachsten Fall die Bedingung

$$\sigma_{max} = \pi b_{max}^2 = \pi (R_1^{geo} + R_2^{geo})^2 \tag{5.6}$$

erfüllen muß. R^{geo} ist dabei der Radius der Kerne in einem Harte-Kugel-Modell. Von dieser Multiplizitätsverteilung nimmt man nun z. B. die oberen 100 mb, d. h. alle Events, deren Multiplizität oberhalb von M', berechnet aus

$$\sigma \;=\; 100\,\mathrm{mb} = \int_{M'}^{M_{max}} \frac{d\sigma}{dM}\, dM \tag{5.7}$$

liegt, berechnet daraus mit Gleichung (5.4) den Stoßparameter b der Reaktion und anschließend A_{part} [65].

Abbildung 5.1 zeigt nun die mit dem CBUU-Modell berechnete Pionenmultiplizität für eine Au+Au - Kollision bei 1 AGeV Einschußenergie im Vergleich zur experimentell gemessenen Multiplizität und zur sogenannten Harris-Systematik [69] als Vergleichsgröße. Das CBUU-Modell erzeugt offensichtlich zu viele Pionen und liegt insbesondere im Bereich mittlerer Multiplizitäten noch deutlich über der Harris-Systematik. Dies kann vielfältige Ursachen haben:

- Fehlerhafte Pionenproduktion,
- fehlerhaftes Absorptionsverhalten, oder
- die Berechnung von A_{part} mit Gleichung (5.1) weicht deutlich von der im CBUU-Modell an der Reaktion teilnehmenden Anzahl der Nukleonen ab.

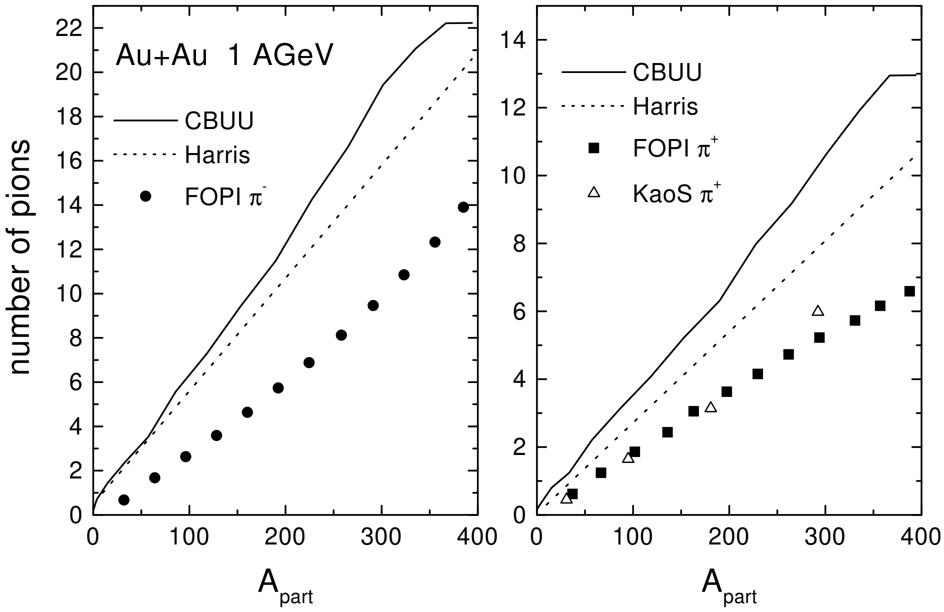


Abb. 5.1: Pionenmultiplizität in Abhängigkeit von der Zentralität der Reaktion, gemessen in A_{part}, für die Reaktion Au+Au bei 1 AGeV Einschußenergie. CBUU-Rechnungen im Vergleich zur Systematik von Harris et al. [69] und Daten der FOPI- und KaoS-Kollaboration [65, 70].

Bei den Daten handelt es sich dabei um auf 4π extrapolierte Werte, die Differenzen treten jedoch auch bei analog zur experimentellen Akzeptanz gefilterten Rechnungen auf, vergleiche Tabelle 5.1 auf Seite 89.

In einem ersten Schritt nun wurde mit dem CBUU-Modell für verschieden schwere Systeme die Zahl der Pionen pro beteiligtem Nukleon, π/A_{part}, berechnet. Sie ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Es zeigt sich ein extremer Anstieg der Pionenmultiplizität bei kleinen A_{part}, ebenso zeigt sich kein systematischer Unterschied zwischen leichten und schweren Systemen, bei denen eine zusätzliche Spektatorenabsorption zu erwarten wäre. Dies kann ein Hinweis auf eine fehlerhafte Behandlung der Absorption sein.

In Abbildung 5.3 ist das Verhältnis der produzierten zu den absorbierten Pionen im CBUU-Modell für verschieden schwere Systeme und verschiedene Stoßparameter gezeigt. Offensichtlich werden in schweren Systemen die Pionen stärker absorbiert, was zu erwarten ist und einen prinzipiellen Fehler in der Absoption im CBUU-Modell ausschließt. Daher wurde in einem nächsten Schritt die Berechnung von A_{part} überprüft:

Abbildung 5.4 zeigt den Vergleich von A_{part} aus Gleichung (5.1) und einem Modell, in das realistische Kernrandparameter eingehen [65]. Bei einem ^{12}C - Kern differiert A_{part} im Bereich semizentraler Stöße um bis zu 27 %, wobei das Modell mit realistischen Dichteverteilungen höhere Ergebnisse liefert. Für ^{197}Au beträgt der Unterschied noch ca. 9 % für $b = 5$ fm. Im Bereich sehr peripherer Kollisionen ist die Form der Oberfläche sogar noch entscheidender, wie Abbildung 5.4 für ^{12}C und Abbildung 5.6 für ^{197}Au zu entnehmen ist. Um derartige Abhängigkeiten von den geometrischen Modellen

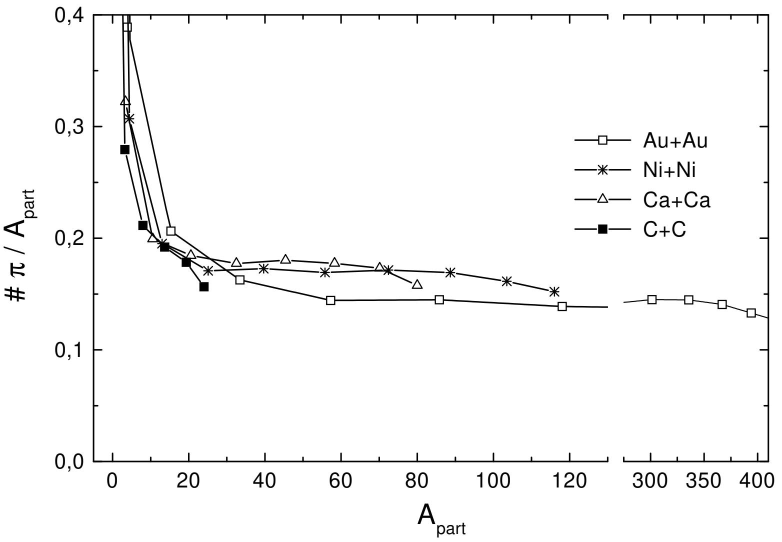


Abb. 5.2: Anzahl der Pionen pro teilnehmenden Nukleon, π/A_{part}, für verschieden schwere Systeme bei 1 AGeV Einschußenergie in Abhängigkeit von A_{part}

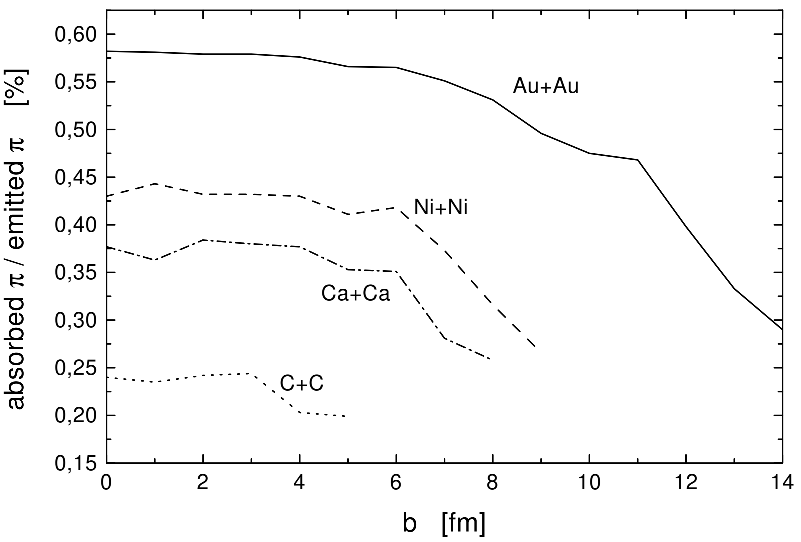


Abb. 5.3: Verhältnis der produzierten zu den absorbierten Pionen für die Systeme C+C, Ca+Ca, Ni+Ni und Au+Au bei 1 AGeV Einschußenergie und verschiedene Stoßparameter, wie es sich mit dem CBUU-Modell ergibt.

im weiteren auszuschließen, wurde versucht, A_{part} direkt aus dem CBUU-Modell zu erhalten. Die Methode, b bzw. σ analog zum Experiment aus der Multiplizitätsverteilung zu bestimmen, wurde Aufgrund der in Abschnitt 5.1 beschriebenen Problematik nicht angewandt. Statt dessen wurde die Zahl der Teilchen, die tatsächlich an einer Kollision teilgenommen haben, als Größe A_{part} herangezogen. Abbildung 5.5 zeigt die zeitliche Entwicklung folgender Größen: 1) Die Zahl der Teilchen, die eine erste Kollision mit einem Teilchen des anderen Kernes durchlaufen haben, 2) die Zahl der Teilchen, die mit Nukleonen des anderen Kernes – auch in einem zweiten Schritt – kollidiert haben, und

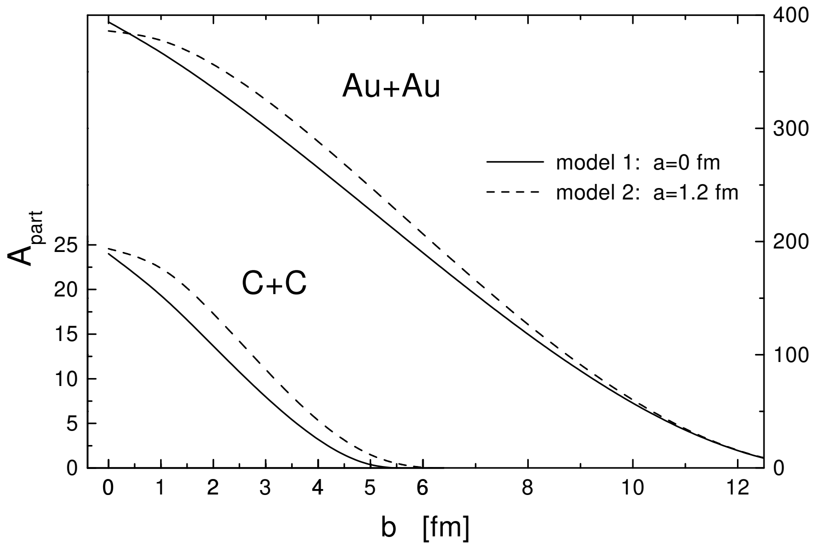


Abb. 5.4: Vergleich der Größe A_{part} aus verschiedenen Modellen für die Systeme $^{12}C+^{12}C$ und $^{197}Au+^{197}Au$. Modell mit harter Oberfläche aus [55] ("model 1") und Modell mit Woods-Saxon-Dichteverteilung mit Oberflächenparameter $a = 1.2$ fm aus [65] ("model 2").

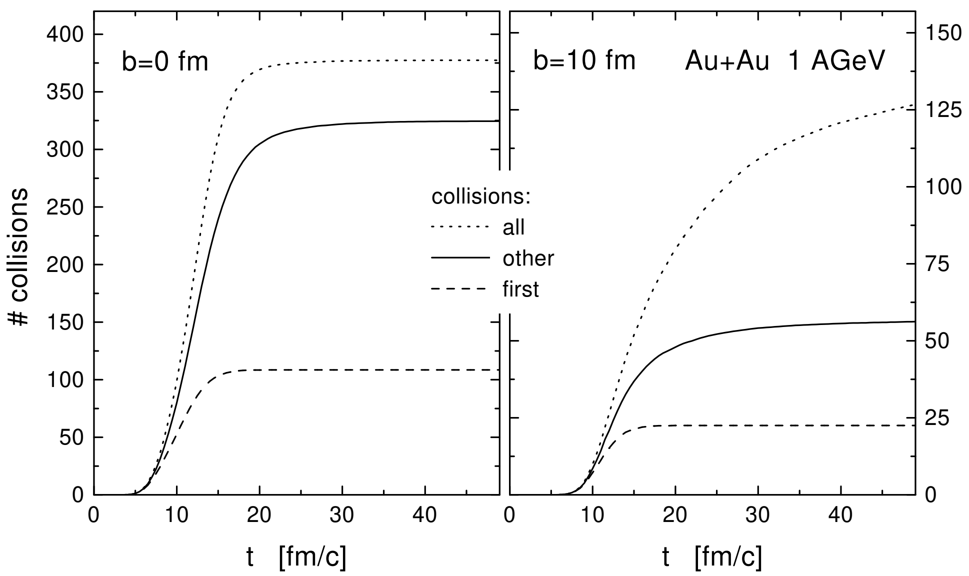


Abb. 5.5: Zeitliche Entwicklung verschiedener als A_{part} möglicher Größen im CBUU-Modell bei einer zentralen (linkes Bild) und einer peripheren (rechtes Bild) Au+Au-Kollision bei 1 AGeV: 1) Zahl der Nukleonen, die eine erste Kollision mit Nukleonen des anderen Kernes durchlaufen haben ("first", gestrichelte Linie), 2) Zahl der Nukleonen, die mit Nukleonen des anderen Kernes kollidiert sind ("other", durchgezogenen Linie), 3) Zahl der Nukleonen, die mindestens eine Kollision erfahren haben ("all", gepunktete Linie).

3) die Zahl der Teilchen, die überhaupt eine Kollision erfahren haben. Man erkennt, daß (1) nicht als Maß für A_{part} geeignet ist, da sie bei einer zentralen Kollision eines schweren Systems nur einen geringen Bruchteil der Gesamtzahl der Nukleonen umfaßt.

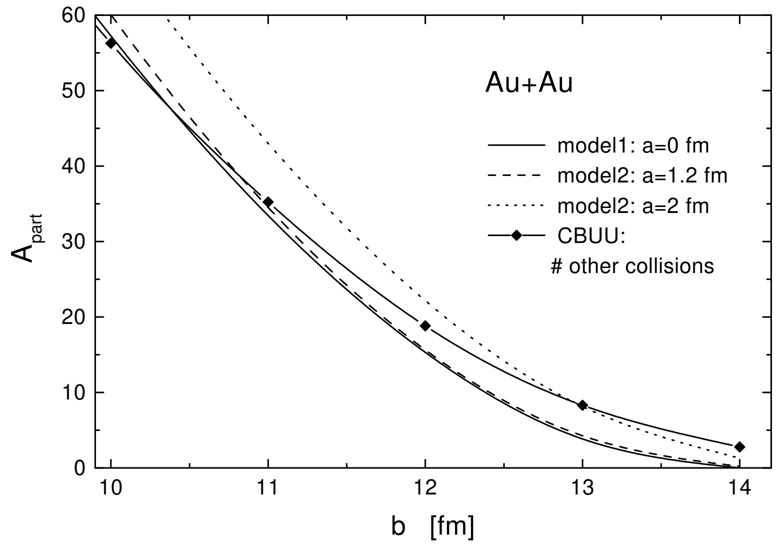


Abb. 5.6: Vergleich der Größe A_{part} aus verschiedenen geometrischen Modellen mit der Anzahl der Teilchen im CBUU-Modell, die mindestens einmal mit Teilchen aus dem jeweils anderen Kern gestoßen haben ("other" in Abbildung 5.5) für periphere Au+Au - Kollisionen. "model 1", "model 2" wie in Abbildung 5.4, sowie Modell mit weicher Oberfläche und größerer Randdicke ("model 2: a=2 fm").

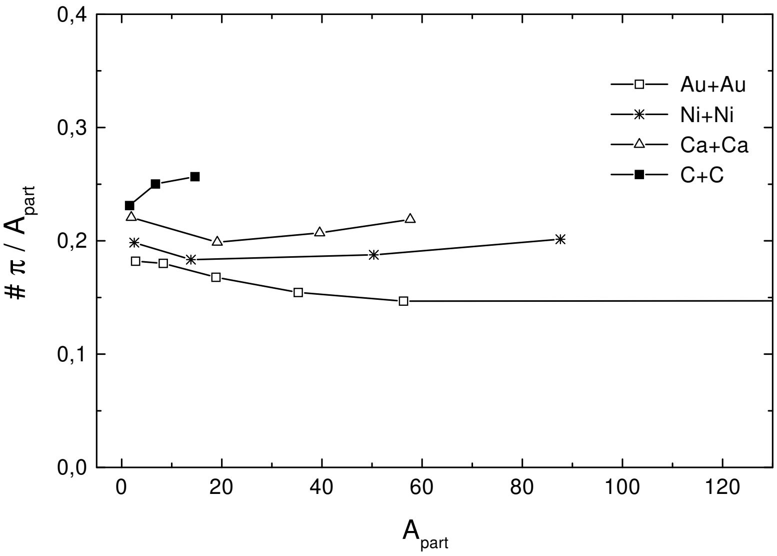


Abb. 5.7: Anzahl der Pionen pro teilnehmenden Nukleon (A_{part}) für verschieden schwere Systeme bei 1 AGeV in Abhängigkeit von A_{part} aus dem CBUU-Modell.

(3) hingegen ist bei peripheren Kollisionen stark zeitabhängig. Es bleibt daher nur (2) als Maß für A_{part}, auch wenn sie bei zentralen Stößen schwerer Systeme ebenfalls nur einen Teil der Gesamtzahl der Nukleonen umfaßt. Jedoch ergibt die Größe (2) speziell bei sehr peripheren Stößen immer größere A_{part}-Zahlen als die geometrischen Modelle, auch wenn bei diesen die Randparameter extrem vergrößert werden, wie Abbildung 5.6 zeigt.

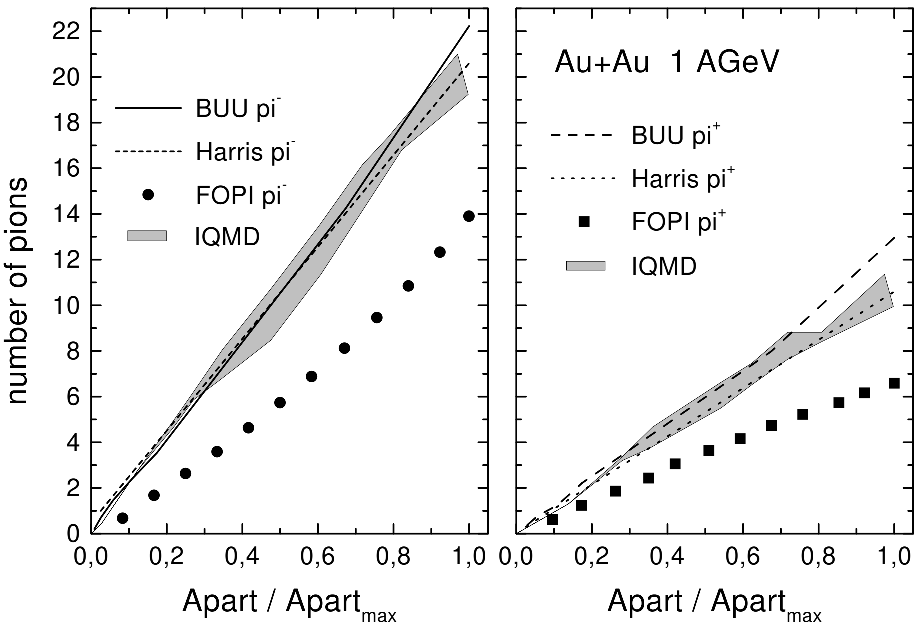


Abb. 5.8: Pionenmultiplizität in Abhängigkeit von der Zentralität der Reaktion, gemessen in A_{part}/A_{part}^{max}, für die Reaktion Au+Au bei 1 AGeV Einschußenergie. CBUU-Rechnungen im Vergleich zur Systematik von Harris et al. [69], den IQMD-Ergebnissen, und Daten der FOPI-Kollaboration [65].

Verwendet man die Zahl der Teilchen, die mit Nukleonen des anderen Kernes kollidiert haben ("other"), als A_{part}, so ergibt sich bei der Betrachtung der Pionmultiplizität pro A_{part} eine deutlichen Trennung zwischen leichten und schweren Systemen, wie in Abbildung 5.7 zu erkennen ist. Ebenso steigt die relative Zahl der Pionen bei kleinen A_{part} nicht mehr an. Berechnet man mit diesem CBUU-A_{part} die Pionenmultiplizität für die Au+Au - Reaktion bei 1 AGeV, so ergibt sich im Vergleich zu anderen Transportmodellen keine Abweichung mehr, siehe Abbildung 5.8. Jedoch liegen alle Transportrechnungen ca. 40 % über den experimentellen Daten im Bereich der Harris-Systematik, die für leichtere Systeme gilt. Damit kristallisiert sich ein prinzipielles Problem aller Transportmodelle in der quantitativen Beschreibung der Pionenabsorption heraus.

5.1.1 Einfluß der numerischen Behandlung der Pionenabsorption

Um zu überprüfen, inwieweit die Tatsache, daß bei massereichen Systemkombinationen nicht genügend Pionen absorbiert werden, auf die numerische Behandlung der Absorption zurückzuführen ist, wurde für diese eine alternative Realisierung entwickelt.

Im CBUU-Modell wird, wie in Kapitel 2 besprochen, eine geometrische Interpretation des Begriffs Wirkungsquerschnitt verwendet. Für ein Meson sind alle Nukleonen

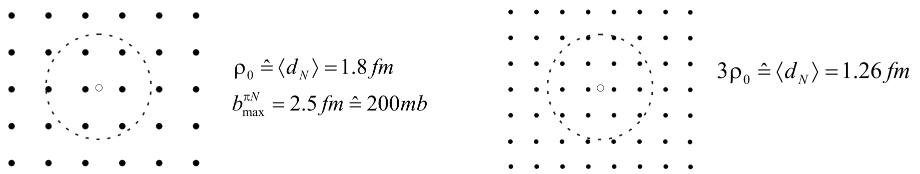


Abb. 5.9: Maximaler Pionenabsorptionsradius in Verhältnis zum mittleren Abstand der Nukleonen bei ρ_0 und $3\rho_0$. Das Pion (offener Punkt) wird selbst bei ρ_0 nicht notwendigerweise vom nächstgelegenen Nukleon (geschlossene Punkte) absorbiert.

potentielle Absorptionspartner, die innerhalb einer Distanz

$$b \leq \sqrt{\frac{\sigma_{\pi N}^{\mathrm{tot}}}{\pi}} \tag{5.8}$$

liegen. Für ein π^+ beträgt der maximale Wirkungsquerschnitt 200 mb für die π^+p-Reaktion, was sich in eine Distanz von 2.5 fm übersetzt. Dies führt dazu, daß ein Pion bei hohen Dichten "springen" kann, da es nicht notwendigerweise von dem nächstgelegenen Reaktionspartner absorbiert wird. Dies ist schematisch in Abbildung 5.9 dargestellt.

Es wurden daher zwei alternative Änderungen der Pionenabsorption eingeführt: Zum einen wurde die Suche nach einem Absorptionspartner für ein Pion nicht bei dem ersten möglichen abgebrochen, sondern alle möglichen Partner ermittelt und aus diesen der räumlich nächste ausgewählt. Zum anderen wurde der Absorptionswirkungsquerschnitt dichteabhängig modifiziert, in dem Sinne, daß

$$\sigma_{max} = \pi \langle d_{NN} \rangle^2 \tag{5.9}$$

gefordert wurde, was zu $b_{max} \simeq \langle d_{NN} \rangle$ für alle, also auch niedrigere, Dichten führt.

Ein Vergleich der Entwicklung der Pionenzahl im Verlauf einer Schwerionenreaktion ergab für ein leichtes System wie C+C keinerlei Änderung. Für Au+Au ändert sich durch beide Beschreibungen das Verhältnis von freien Pionen zu Δ-Resonanzen in der Hochdichtephase leicht. Die Pionenmultiplizitäten am Ende der Reaktion waren jedoch in allen Fällen im Rahmen der statistischen Fehler gleich.

Da der wesentliche Unterschied im Reaktionsverlauf zwischen einem leichten und einem schweren System die Dauer der Hochdichtephase ist, stellt sich die Frage, inwieweit hier ein Effekt der Vernachlässigung aller Dreikörperprozesse im Stoßterm beobachtet wird. Diese Prozesse werden bei hohen Dichten relativ zu den binären Prozessen wichtiger. Bei Vorliegen eines thermischen und chemischen Gleichgewichts führen sie zu gleichviel zusätzlicher Pionenproduktion wie -absorption; inwieweit dieses Gleichgewicht in einer Schwerionenreaktion erreicht wird, ist jedoch eine andere Frage. Eine Simulation zusätzlicher Dreikörperprozesse durch Modifikation des $NN \leftrightarrow N\Delta$-Wirkungsquerschnittes in Abhängigkeit von der Dichte

$$\sigma_{N\Delta} = \sigma_{N\Delta}^0 \left(1 + \alpha \frac{\rho}{\rho_0}\right) \tag{5.10}$$

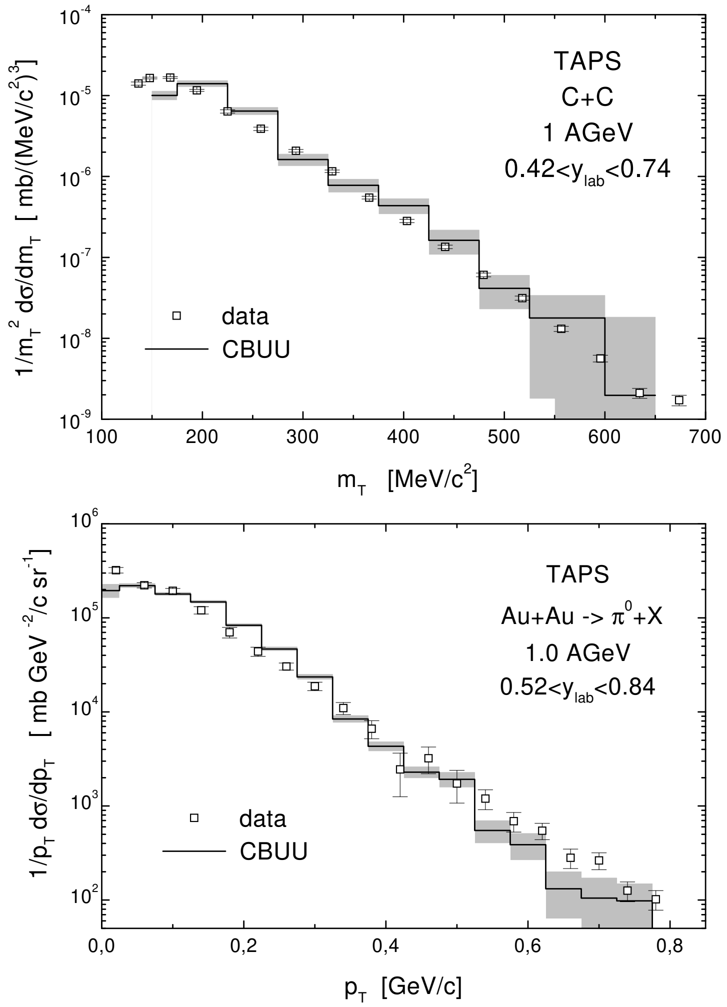


Abb. 5.10: Pionenspektrum für π^0-Mesonen bei mittleren Rapiditäten und Einschußenergien von 1 AGeV. CBUU-Ergebnisse im Vergleich zu Messungen der TAPS-Kollaboration [65, 67] für C+C und Au+Au. Die schattierte Fläche gibt die statistischen Unsicherheiten der CBUU-Rechnungen wieder.

in [3] erbrachte bei $\alpha = 1$ eine Reduktion der Pionenmultiplizität um 10 %.

5.2 Spektren

Zusätzlich zu den Pionenmultiplizitäten ist die Wiedergabe der Mesonenspektren von Bedeutung, läßt sie doch Rückschlüsse auf die Resonanzdynamik während der Reaktion zu. Abbildung 5.10 zeigt das inklusive Spektrum für π^0 im Bereich mittlerer Rapiditäten für die Systeme C+C und Au+Au bei 1 AGeV Einschußenergie, Abbildung 5.11 die inklusiven Spektren für π^0- und η-Mesonen für die Systeme C+C, Ca+Ca und Ni+Ni bei 2 AGeV.

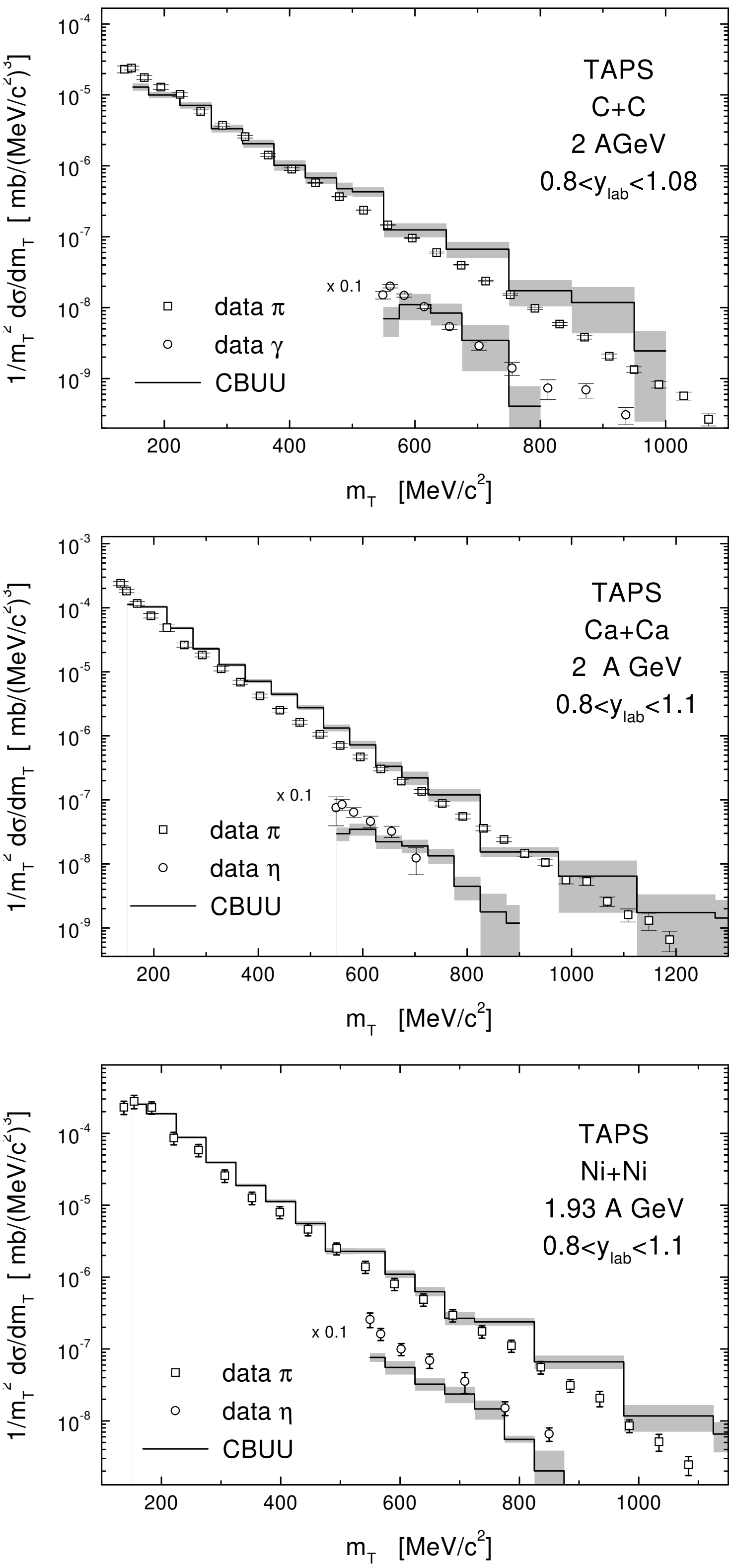


Abb. 5.11: Mesonenspektren wie in Abbildung 5.10 für 2 bzw. 1.93 AGeV für die Systeme C+C, Ca+Ca und Ni+Ni. Daten aus [68, 71]. Die Reaktion Au+Au bei 2 AGeV ist am SIS-Beschleuniger nicht realisierbar.

System	σ_{exp}^{int} [mb]	σ_{CBUU}^{int} [mb]	Differenz
C+C 1 AGeV	63.95	77.46	21 %
Au+Au 1 AGeV	4142.84	5839.44	41 %
C+C 2 AGeV	112.20	115.16	3 %
Ca+Ca 2 AGeV	604.72	852.75	41 %
Ni+Ni 1.93 AGeV	1112.38	1491.78	34 %

Tab. 5.1: Aus den Spektren der Abbildungen 5.10 und 5.11 gewonnene integreierte Wirkungsquerschnitte der Pionenproduktion. Experimentelle Werte im Vergleich zu den CBUU-Ergebnissen und relative Abweichung.

Bei 1 AGeV zeigt sich ein gewisser Mangel an "low-p_T"–Pionen. Für das leichte System ist davon abgesehen die Übereinstimmung des CBUU- mit dem experimentell gemessenen Spektrum exzellent, für das schwere System ergibt sich im Bereich von $p_T \sim 200 - 250$ MeV eine Überhöhung des CBUU-Pionenspektrums, die für die im letzten Kapitel diskutierten Differenzen in der Pionenmultiplizität verantwortlich ist.

Bei 2 AGeV ergibt sich systemunabhängig eine Überhöhung des Pionenspektrums bei hohen transversalen Massen, was auf eine zu starke Population massiver Resonanzen hindeutet. Auch zeigt sich wieder die Tendenz des CBUU-Modells, die Pionenmultiplizität für schwere Systeme zu überschätzen. Die Werte der integrierten Pionenspektren werden in Tabelle 5.1 verglichen. Das η-Spektrum wird im Rahmen der Statistik i. a. gut getroffen, wobei hier im Gegensatz zu den Pionen zu schweren Systemen hin eher zuviele η-Mesonen absorbiert werden.

Insgesamt kann man feststellen, daß die *Produktion* von Pionen, und damit der Resonanzen, durch das CBUU-Modell sehr gut beschrieben wird, abgesehen von einer etwas zu starken Population der schweren Resonanzen. Das zeigt die gute Übereinstimmung der C+C - Spektren mit den Daten. Die Beschreibung der Absorption scheint hingegen Schwächen aufzuweisen. Dieses Ergebnis ist für die folgenden Ergebnisse zum Nukleonenfluß wichtig, da dieser von der Population der Resonanzen abhängt, vergleiche Kapitel 6.5.

5.3 Rapiditätsverteilungen

Ein weiterer Aspekt der Resonanzdynamik erschließt sich beim Vergleich der Rapiditätsverteilungen der Pionen und Nukleonen mit experimentellen Daten. Er wird in diesem Kapitel für das System Ni+Ni bei 1.93 AGeV Einschußenergie und zentrale Ereignisse durchgeführt. Zusätzlich erlaubt dieser Vergleich eine Kontrolle des "Stopping" bei einem leichten System, für das keine E_{RAT}-Verteilungen vorliegen.

Abbildung 5.12 zeigt die Rapiditätsverteilung negativer Pionen, wie sie sich mit dem CBUU-Modell ergibt, im Vergleich zu den Daten aus [59], wobei diese mit einem Faktor 1.3 skaliert wurden, um die gleiche Pionenmultiplizität wie das CBUU-Modell

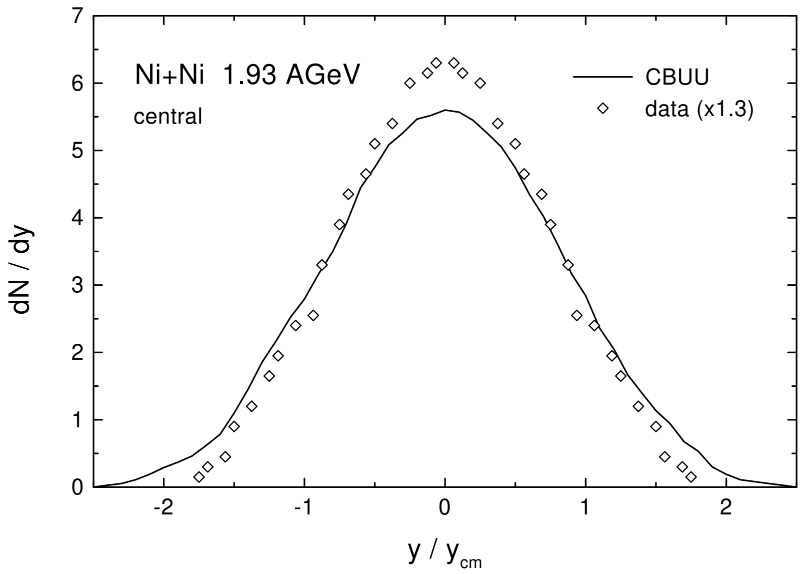


Abb. 5.12: Rapiditätsverteilung dN/dy negativer Pionen, wie sie sich mit dem CBUU-Modell ergibt, im Vergleich zu den experimentellen Daten aus [59]. Die Daten sind mit einem Faktor 1.3 skaliert, um den sich die Pionenmultiplizitäten des Experiments und der Rechnung unterscheiden.

zu erhalten. Die experimentelle Verteilung ist deutlich schmaler als die mit dem CBUU-Modell berechnete.

Da bei dem Ni+Ni - System aufgrund seiner Größe bereits einige quasieleastische $\pi N \rightarrow \pi N$ - Streuungen auftreten, wurde die Winkelverteilung dieser Prozesse geändert: Im Resonanzmodell bildet das Pion mit dem Nukleon eine Resonanz, die bei ihrem späteren Zerfall nichts mehr von ihrer Entstehung "weiß"; der Zerfall der Resonanz ist demzufolge isotrop. Abweichend davon wurde versuchsweise die Impulsgeometrie der $\Delta(1232)$-Entstehung gespeichert. Da damit eine ausgezeichnete Richtung existiert, erlaubt dies eine Winkelverteilung für die quasieleastische Streuung, die dem experimentell gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitt für den $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+p$ - Prozeß [72, 73] entspricht. Das Ergebnis der Modifikation der πN-Streuung zeigt Abbildung 5.13. Die Pionenrapiditätsverteilung ist etwas schmaler geworden. Die gleiche Breite wie die experimentell gemessene Verteilung erhält man jedoch erst, wenn man bei allen Energien und Resonanzen die maximale Winkelanisotropie einer $\pi N \rightarrow \Delta \rightarrow \pi N$ - Streuung ansetzt.

Ein Grund für die zu große Breite der Pionenrapiditätsverteilung ist das zu geringe Abstoppen der Kerne in einer Ni+Ni - Reaktion im CBUU-Modell. Abbildung 5.14 zeigt die Testteilchen-Rapiditätsverteilung des CBUU-Modells im Vergleich zur Summe der experimentell gemessenen Protonen- und Deuteronen-Verteilungen. Sie ist wesentlich zu breit, ein bemerkenswerter Widerspruch zu dem zu starken Abstoppen der Kerne in semizentralen Au+Au - Kollisionen, wie in Kapitel 4.4.2 beschrieben, und der korrekten Wiedergabe der Protonrapiditätsverteilung im Falle einer zentralen Au+Au - Kollision bei 1 AGeV Energie, siehe Abbildung 4.13.

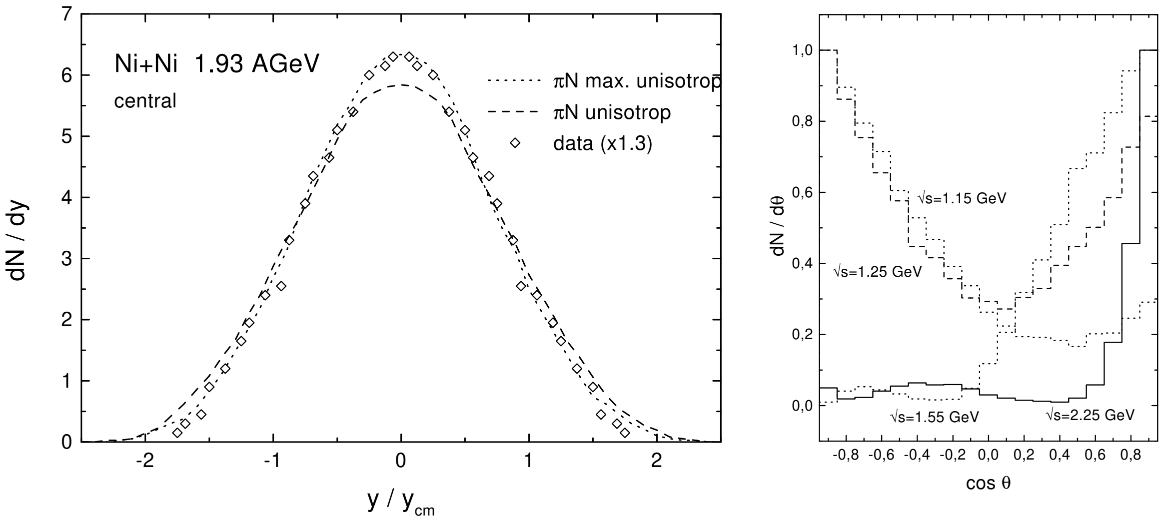


Abb. 5.13: Linkes Bild: Rapiditätsverteilung dN/dy negativer Pionen im Vergleich zu den skalierten experimentellen Daten wie in Abbildung 5.12. Die gestrichelte Linie entspricht einer Rechnung mit einem energieabhängig parametrisierten differentiellen Wirkungsquerschnitt für den $\pi N \to \Delta \to \pi N$ - Prozeß [72], die gepunktete Linie einer Rechnung, in der die maximale Anisotropie des $\pi N \Delta$ - Prozesses für alle Resonanzen und Energien angenommen wurde. Diese Winkelverteilungen sind im rechten Bild für einige ausgesuchte Schwerpunktenergien dargestellt.

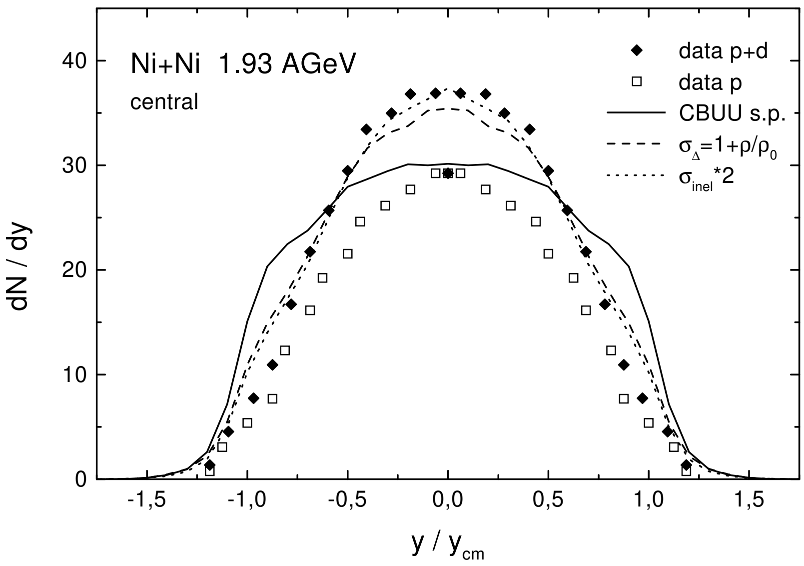


Abb. 5.14: Rapiditätsverteilung dN/dy der CBUU-Testteilchen (durchgezogene Linie) im Vergleich zur Summe der experimentell gemessenen Proton- und Deuteron-Verteilungen aus [59]. Modifiziert man den $NN \to N\Delta$-Wirkungsquerschnitt gemäß Gleichung (5.10) mit $\alpha = 1$, so erhält man die gestrichelte Kurve, vergrößert man generell alle inelastischen NN-Querschnitte um einen Faktor 2, erhält man die gepunktete Kurve.

Daraus kann man schließen, daß im CBUU-Modell insgesamt zu wenige inelastische

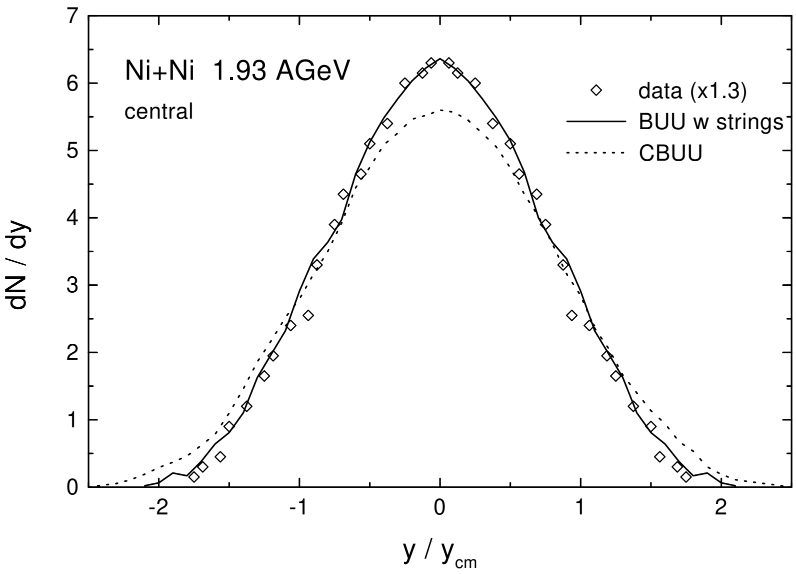


Abb. 5.15: Experimentelle Rapiditätsverteilung dN/dy negativer Pionen [59] im Vergleich zur Verteilung negativer Pionen aus dem CBUU-Modell und zu einer auf die Anzahl negativer Pionen skalierten Verteilung aller Pionen aus einem BUU-Modell mit Strings [86].

Kollisionen zwischen den Nukleonen stattfinden. Ein stärkeres Abstoppen der Kerne kann man nur mit einer Erhöhung der inelastischen Wirkungsquerschnitte um einen Faktor Zwei erreichen, dies ist ebenfalls in Abbildung 5.14 gezeigt. Es entstehen dann jedoch noch einmal 7 % mehr Pionen. Speziell wenn man die Pionenrapiditätsverteilung betrachtet, scheint das Resonanzmodell hier an seine Grenzen zu gelangen. Die oben beschriebene Modifikation, das Abspeichern der kinematischen Situation bei der Resonanzentstehung, stellt bereits eine Grundidee in Frage, die strikte Trennung von Resonanzentstehung im NN-Stoß oder über Mesonabsorption und Zerfall dieser Resonanzen. Transportmodelle ohne diese Annahme, das anstatt der schweren Resonanzen oberhalb des $\Delta(1232)$ Strings verwendet [74] oder zusätzlich zu diesen [86], die die Pionen mehr im Bereich mittlerer Rapiditäten emittieren, reproduziert deren Verteilung deutlich besser [72, 86], vergleiche Abbildung 5.15.

Kapitel 6

Transversaler Fluß

6.1 Multiplizitätsverteilung

Ein wichtiger Punkt beim Vergleich mit experimentellen Daten stellt die Ereignisklassifikation dar. Für den transversalen Fluß wird dazu üblicherweise die Größe "Multiplizität", d. h. die nach einer Schwerionenreaktion im Detektor nachgewiesene Anzahl von Teilchen, verwendet. Die Multiplizität als absolute Zahl ist abhängig vom Detektor (seiner Geometrie, der Akzeptanz, u.s.f.) und von den berücksichtigten Teilchen (ob Mesonen, Nukleonen, alle geladene Teilchen, etc.). Es zeigt sich experimentell, daß man bei einer Einteilung der Multiplizitätsverteilung in Bereiche (Bins) in Bin 3 und 4 einen maximalen Seitwärtsfluß mißt [75, 60].

Die Wiedergabe der Multiplizitätsverteilung, wie sie bei der FOPI-Kollaboration verwendet wird, mit dem CBUU-Modell gestaltet sich aufgrund der Beschränkung auf die Einteilchendynamik schwierig. Multiplizität ist hier als Zahl der geladenen Teilchen definiert, unabhängig davon, ob es sich dabei um ein Fragment, d. h. um ein aus mehreren Nukleonen zusammengesetztes Teilchen, oder um ein Proton handelt [60].

Vergleicht man die mit dem CBUU-Modell errechnete Multiplizitätsverteilung für den FOPI-Detektor der GSI direkt mit der experimentell gemessenen (Abbildung 6.1 gestichelte Linie), so erkennt man sofort, daß der Verlauf vollkommen anders ist. Der Bereich niedriger Multiplizitäten wird in der CBUU-Rechnung gar nicht erreicht; ebenso ist die maximale Multiplizität in der Simulation größer. Die Ursache dafür liegt zum einen darin, daß die Bildung von Fragmenten, die im Detektor als *ein* Teilchen registriert werden, im CBUU-Modell nicht enthalten ist. Dadurch erreichen nach einer zentralen Kollision in der Simulation zu viele Teilchen den Detektor. Zum anderen wird in der Simulationsrechnung ein bestimmter Zeitpunkt als Ende der Reaktion definiert, spätestens der, ab dem die Teilchen über die Grenzen des Gitters, auf dem die Dichten und Potentiale berechnet werden, hinauslaufen. Die Impulsrichtung der Teilchen zu diesem Zeitpunkt wird als Flugrichtung für die weitere Evolution des Systems angesetzt. Die Fermibewegung der Nukleonen im Kern führt dann dazu, daß selbst bei

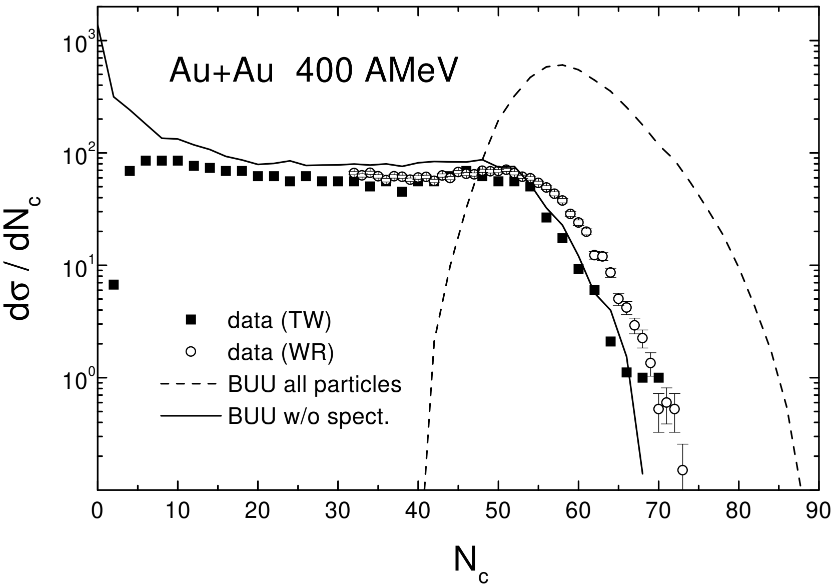


Abb. 6.1: Multiplizitätsverteilung geladener Teilchen der CBUU-Simulationsrechnung im Vergleich zur experimentell gemessenen [60, 62], mit (durchgezogene Linie) und ohne (gestrichelte Linie) Wegschneiden der Spektatoren wie im Text beschrieben.

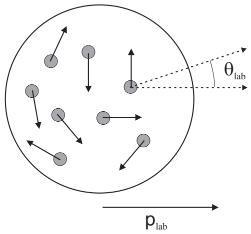


Abb. 6.2: Fermibewegung der Nukleonen als Ursache für Fehldetektierung von Teilchen.

einem einzelnen Kern, der in z-Richtung ($\Theta_{lab} = 0$) fliegt, ein Detektorsignal errechnet wird, obwohl keines der Testteilchen den propagierten Kern verläßt. Dies ist in Abbildung 6.2 schematisch dargestellt. Dieser Effekt wird mit abnehmender Einschußenergie und abnehmendem Detektoröffnungswinkel größer, wie Tabelle 6.1 zeigt.

Diesen Effekt der Fehldetektierung von Teilchen kann man vermeiden, indem man verfolgt, ob das Nukleon an der Reaktion teilgenommen hat und Nukleonen mit Kollisionszahl Null, die Spektatoren, von der Bewertung ausnimmt. Damit ergibt sich die in Abbildung 6.1 mit der durchgezogenen Linie gezeigte Verteilung, die bis in den Bereich sehr kleiner Multiplizitäten einen realistischen Verlauf zeigt.

Problematisch bei der Methode des Spektatorenwegschneidens ist jedoch, daß man möglicherweise auch Teilchen aus der Bewertung nimmt, die zwar keine Kollision erfahren haben, aber durch den Potentialgradienten zwischen der Reaktionszone und der Zuschauermaterie signifikant abgelenkt wurden. Um die Bedeutung dieses Effektes zu klären, wurde für verschiedene Energien die Rapiditäts- und Transversalimpulsverteilung jeweils mit und ohne Spektatorencut bestimmt und der Flow F (siehe nächstes

Laborenergie E_{lab} [GeV]	Öffnungswinkel Detektor Θ_{lab} [Grad]	Fehldetektierte Teilchen %
0.250	7 - 30	83.28
0.400	– " –	72.88
1.0	– " –	26.41
2.0	– " –	0.0
0.250	1.2 - 30	99.46
0.400	– " –	99.13
1.0	– " –	97.28
2.0	– " –	92.84
0.250	42 - 48	0.0

Tab. 6.1: Prozentsatz der fälschlicherweise "detektierten" Nukleonen in Abhängigkeit von der Laborenergie und dem Öffnungswinkel des Detektors. $\Theta_{\text{lab}} = 7 - 30^o$ entspricht der äußeren Plastikwand des FOPI-Detektors, $\Theta_{\text{lab}} = 1.2 - 30^o$ dem FOPI-Detektor mit innerer und äußerer Plastikwand und $\Theta_{\text{lab}} = 42 - 48^o$ dem KaoS-Detektor

E_{kin}	F_{with} [MeV]	$F_{w/o}$ [MeV]
150 AMeV	66	86
250 AMeV	112	115
400 AMeV	138	139
1 AGeV	197	197
2 AGeV	222	221

Tab. 6.2: Flowwerte $\langle dp_x/dy \rangle|_{y=0}$ für Au+Au - Kollisionen bei $b = 6$ fm Stoßparameter und verschiedenen Einschußenergien. Rechnungen mit dem CBUU-Modell. In der mittleren Spalte die Ergebnisse unter Einschluß aller Teilchen, in der rechten Spalte ohne Teilchen mit Kollisionszahl Null (Spektatoren).

Kapitel) berechnet. Abbildung 6.3 zeigt die Rapiditäts- und Transversalimpulsverteilung dN/dy bzw. dp_x/dy für semizentrale Au+Au - Kollisionen bei 150 AMeV, 250 AMeV und 2 AGeV Einschußenergie. Während bei 150 MeV bei Wegschneiden der Spektatoren eine deutliche Änderung der Nukleonenanzahl um $y = 0$ zu erkennen ist, ist bereits bei 250 AMeV der unmittelbare Bereich mittlerer Rapiditäten frei von Beeinflussung. In der Transversalimpulsverteilung zeigt sich auch bei 150 AMeV keine allzu große Veränderung um $y = 0$; da man jedoch zur Bestimmung der Steigung von dp_x/dy üblicherweise einen Bereich von $-0.5 \leq y \leq 0.5$ ausnutzt, ergeben sich durch das Wegschneiden der Spektatoren Änderungen im Flow F, die Tabelle 6.2 zeigt. Ab 250 AMeV Einschußenergie sind die Werte für F im Rahmen der statistischen Fehler unabhängig von der Behandlung der Spektatoren.

Eine zunächst naheliegende Alternative zum Cut in der Kollisionszahl ist, die Bindungsenergie der Teilchen abzufragen. Dies verspricht zunächt unmittelbar, eine Fehldetektierung von Teilchen bei einem einzelnen propagierten Kern zu verhindern. Das Problem bei dieser Methode ist jedoch das Vorliegen von Dichteverteilungen und da-

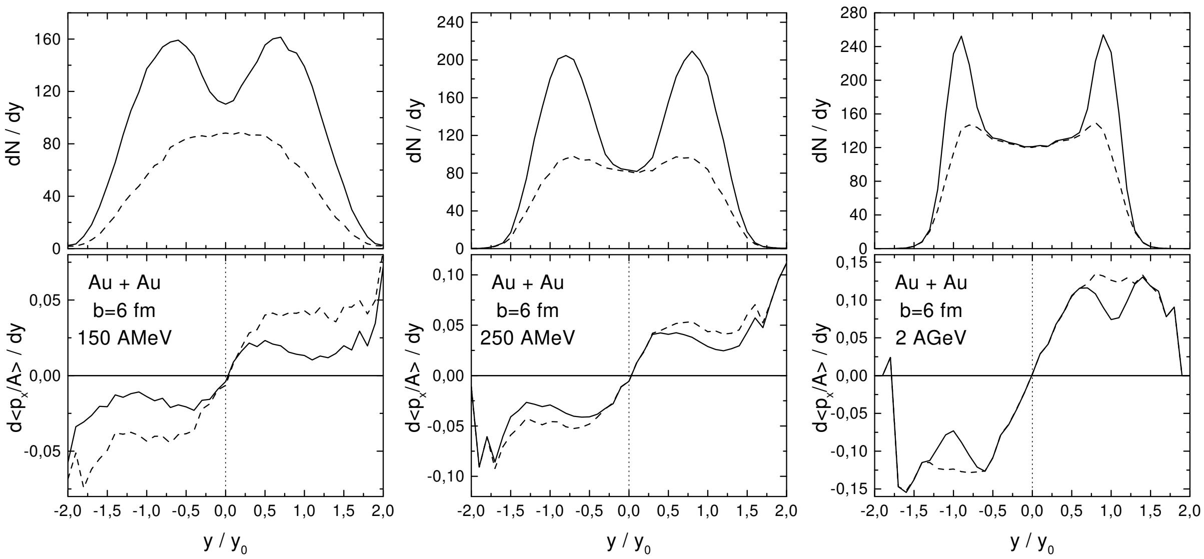


Abb. 6.3: Rapiditäts- und Transversalimpulsverteilung für semizentrale Au+Au - Kollisionen mit $b = 6$ fm, jeweils unter Berücksichtigung aller Teilchen (durchgezogene Linien) und bei Wegschneiden aller Teilchen mit Kollisionszahl Null (gestrichelte Linien).

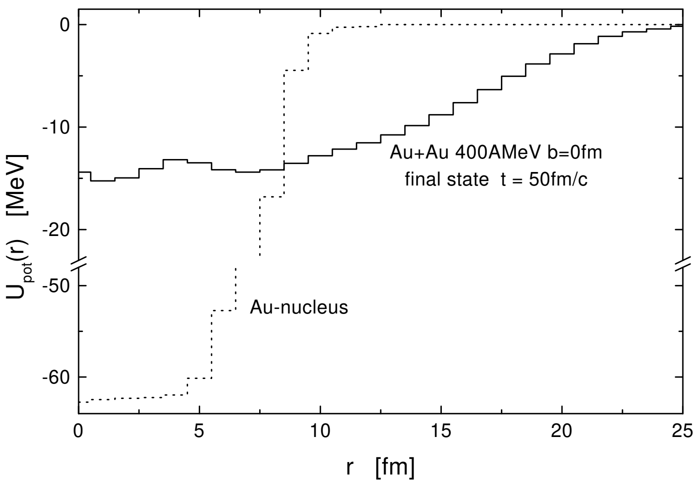


Abb. 6.4: Mittlere-Feld-Potential der Nukleonen am Ende einer zentralen Au+Au - Kollision und bei einem ruhenden Au-Kern.

mit unterschiedlich tiefen Potentialen sowohl bei einem einzelnen Kern, wie auch im Endzustand einer Schwerionenreaktion. Dies ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Die maximale Tiefe des Nukleonenpotentials am Ende einer Reaktion ist dabei zusätzlich von der Laufzeit des Programms abhängig, die wiederum durch die Gittergröße beschränkt ist. Diese beträgt in x,y- und z-Richtung üblicherweise ± 20 und ± 25 fm und ist in Abbildung 6.4 maximal ausgenutzt. Für die vorliegende Au+Au - Kollision ergibt sich daraus ein Schwellenwert von -15 MeV für das Potential. Damit werden jedoch auch einige Nukleonen des einzelnen Kerns als ungebunden angenommen, tragen mithin zu einem falschen Detektorsignal bei.

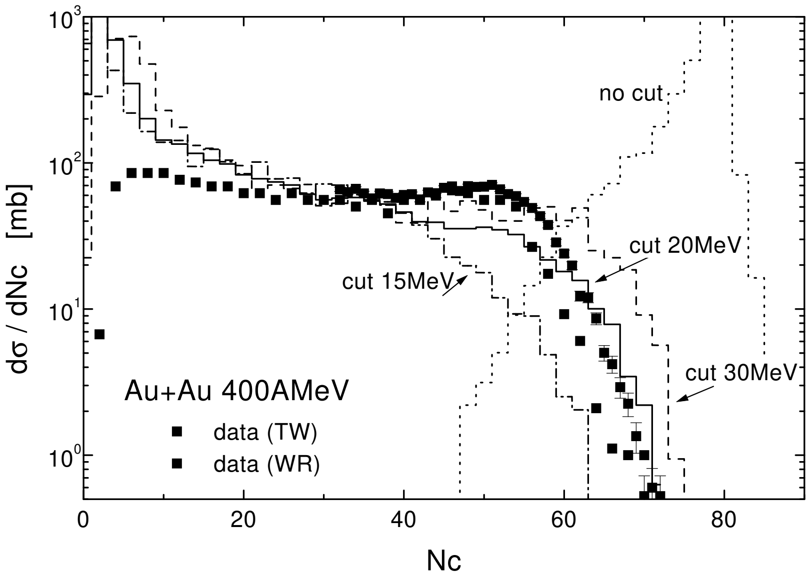


Abb. 6.5: Multiplizitätsverteilung geladener Teilchen für eine Au+Au - Kollision bei 400 AMeV Einschußenergie. Werte aus CBUU-Rechnungen, wobei alle Teilchen mit einem Bindungspotential oberhalb der angegebenen Werte als frei betrachtet wurden.

Abbildung 6.5 zeigt die erhaltene Multiplizitätsverteilung für eine 400 AMeV Au+Au - Reaktion für verschiedene Potential-Cuts im Vergleich zu den experimentellen Daten. Man erkennt, daß der optimale Schwellenwert des Potentials nicht bei -15 MeV, sondern bei -20 MeV liegt. Die Form der Verteilung wird jedoch nur ungenügend reproduziert, vor allem im Bereich von $\langle M \rangle = 50 - 60$, und es zeigt sich eine starke Überhöhung bei niedrigen Multiplizitäten. Die Gründe für dieses Verhalten kann man Abbildung 6.6 entnehmen: Zum einen tragen bei einem Potentialschwellenwert von 20 MeV noch $b = 20$ fm - Kollisionen zu einem Signal bei, zum anderen gibt es speziell bei semizentralen Kollisionen keinen eindeutigen oder gar monotonen Zusammenhang zwischen Bindungspotential am Reaktionsende und Kollisionszahl. Speziell aufgrund der schlechten Wiedergabe der Multiplizitätsverteilung im Bereich mittlerer Multiplizitäten wurde die Methode, die Teilchen aufgrund ihres Potentials zu selektieren, im folgenden nicht angewandt.

Ein anderer Weg, die BUU-Multiplizitätsverteilung zu korrigieren, ist, die Produktion von Fragmenten zu berücksichtigen. Dies geschieht im Rahmen eines Koaleszenzmodells, das in Kapitel 8 beschrieben wird. Durch die Zusammenfassung benachbarter Nukleonen zu einem Fragment, das als ganzes betrachtet wird, wird zum einen ein Teil der ungerichteten Fermibewegung aus der Bewertung der Flugbahnen der Teilchen genommen und zum anderen die Maximalzahl der detektierbaren Teilchen verringert. Mit einer Wahl der Koaleszenzparameter, die die Zahl der freien Protonen reproduziert, wird denn auch der obere Teil der gemessenen Multiplizitätsverteilung sehr gut wiedergegeben, der Bereich niedriger Multiplizitäten jedoch wieder nicht erreicht. Dies ist in Abbildung 6.7 gezeigt.

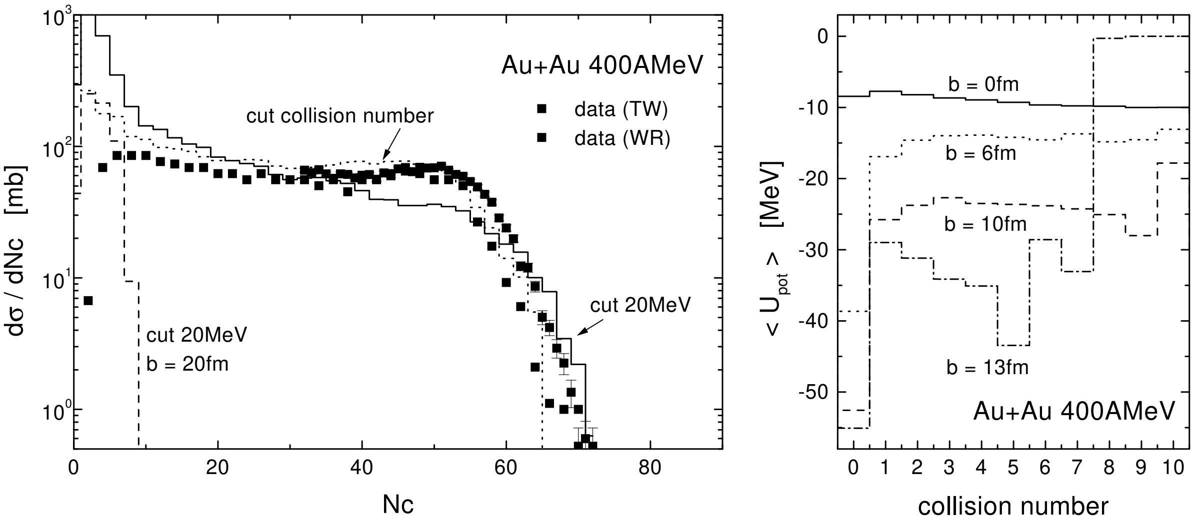


Abb. 6.6: Linke Abbildung: Multiplizitätsverteilung geladener Teilchen einer Au+Au - Kollision bei 400 AMeV Einschußenergie. CBUU-Rechnungen mit einem Cut von 20 MeV im Bindungspotential im Vergleich zu einem Cut in der Kollisionszahl. Separat eingetragen der Beitrag einer $b = 20$ fm - Kollision im Falle eines Potentialcuts. Rechte Abbildung: Zusammenhang zwischen durchschnittlicher Bindungsenergie und Kollisionszahl der Teilchen.

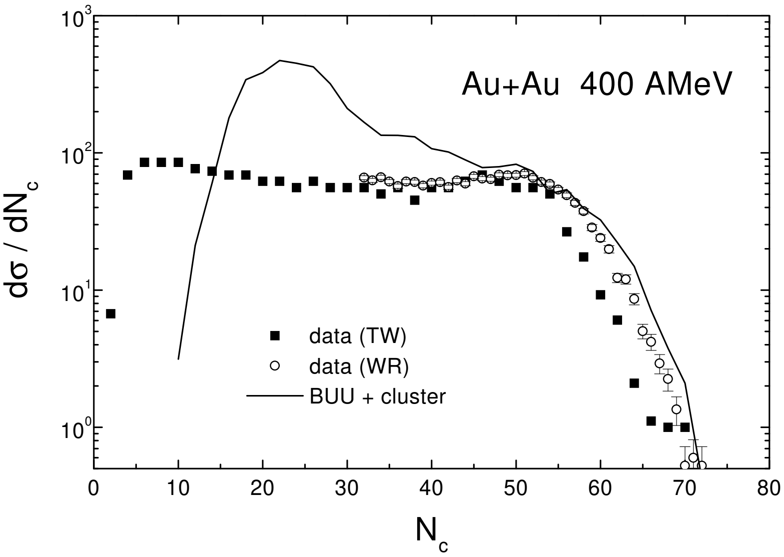


Abb. 6.7: Multiplizitätsverteilung der CBUU-Simulation nach Fragmentbildung mit dem Koaleszenzmodell aus Kapitel 8 im Vergleich zu den experimentellen Daten.

Als eine vierte Möglichkeit, das Problem der Fehldetektierung von Teilchen zu lösen, sei noch die Methode erwähnt, die tatsächliche Trajektorie der Teilchen über einen längeren Zeitraum zu verfolgen, mit dem Ziel, die Fermibewegung herauszumitteln. Das Problem hierbei liegt in der Länge des Zeitraumes, der für eine effektive Korrektur notwendig ist. Dies verdeutlicht folgende Abschätzung: Bei einem Au-Kern beträgt der Radius gemäß $R = 1.125 * A^{1/3} \simeq 6.6$ fm. Läßt man einen 2 fm dicken Randbereich

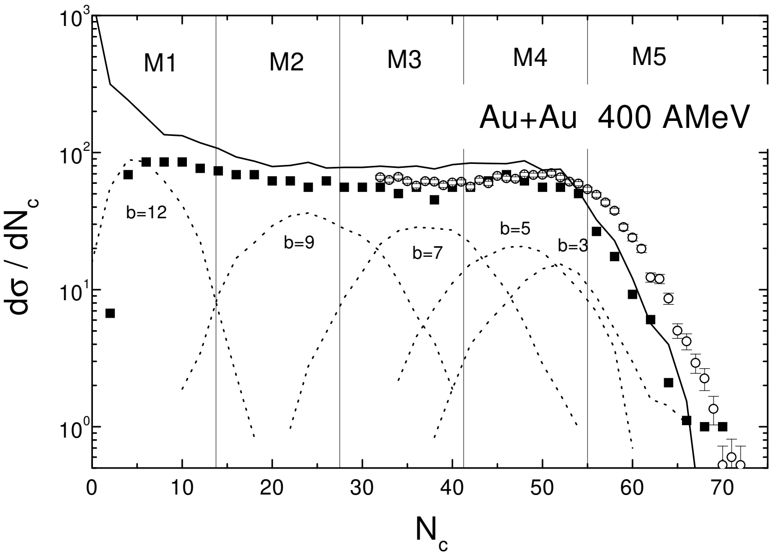


Abb. 6.8: Multiplizitätsverteilung für die Reaktion Au+Au bei 400 AMeV, berechnet mit dem CBUU-Modell, wobei die Spektatorennukleonen nicht gewertet sind. Alle Stoßparameter (durchgezogene Linie) und Verteilung für jeweils bestimmte Stoßparameter (gestrichelte Linien). Die Einteilung in Multiplizitätsbins wurde anhand der CBUU-Summenverteilung vorgenommen, die Bins M3 und M4 korrespondieren zum Stoßparamter $b = 6$ fm. Experimentelle Daten wie in Abbildung 6.1.

unberücksichtigt, so ergibt sich der Durchmesser des Bereichs, in dem sich das Potential nicht ändert, zu ca. 9 fm. Aus dem Fermiimpuls von

$$p_F = 0.27\,\mathrm{GeV} = 1.37\,\mathrm{fm}^{-1} \tag{6.1}$$

ergibt sich eine Geschwindigkeit von

$$\beta_F = \frac{p_f}{E_F} = \frac{1.37}{4.96} = 0.277 \tag{6.2}$$

und damit eine mögliche Propagationszeit von 33 fm/c, bis ein Teilchen auf seiner Bahn durch einen Potentialgradienten abgelenkt wird. Einen derart großen Zeitraum zu verfolgen, bedingt in der Expansionsphase einer Schwerionenreaktion, in der die Teilchen mit hohen Radialimpulsen in alle Richtungen fliegen, eine Gittergröße, die nicht mehr handhabbar ist.

Verwendet man die Methode des Wegschneidens der Spektatoren, ergibt sich neben einer realistischen Multiplizitätsverteilung insbesondere eine klare Zuordnung der verschiedenen Stoßparameter zu der experimentellen Einteilung der Verteilung in Multiplizitätsbins, siehe Abbildung 6.8. Dabei wird die Verteilung in fünf Bereiche eingeteilt; die Grenze des Bins M5 ist durch die halbe Plateauhöhe der Verteilung gegeben, der Bereich bin Null wird in vier gleiche Teile untergliedert [75]. Die Multiplizitätsbins mit dem höchsten beobachteten transversalen Fluß, M3 und M4, entsprechen in etwa einem mittleren Stoßparameter $b = 6$ fm für Au+Au, bei dem auch im CBUU-Modell das Maximum des Flows liegt. Im folgenden werden daher alle mit dem Experiment verglichene Rechnungen bei halbem maximalen Stoßparameter, $b = 0.5\, b_{max}$, durchgeführt.

6.2 Flußgrößen

Der transversale Fluß charakterisiert die Bewegung der Nukleonen in der Reaktionsebene der beiden Kerne. Verursacht wird er, wie in Kapitel 4 dargestellt, durch das Abprallen der Spektatoren an der Reaktionszone und die aus dem Feuerball entweichende Materie, die zum Teil durch die Spektatoren angezogen wird. Zur Beschreibung des transversalen Flusses sind mehrere Größen gebräuchlich, die jeweils einen Teilaspekt der dieser Seitwärtsbewegung der Nukleonen erfassen:

Der **Flow** ist definiert als Steigung der Transversalimpulsverteilung bei mittlerer Rapidität

$$F = \left. \frac{d\langle p_x \rangle(y)}{dy} \right|_{y=0} . \tag{6.3}$$

Er ist damit ein Maß für die Stärke der Repulsion im Bereich der abgestoppten Materie des Feuerballs, vernachlässigt aber die Seitwärtsbewegung der Spektatoren.

Die Größe $\mathbf{P}_x^{dir}$ ist ein integrales Maß für die Stärke der Ablenkung in die Reaktionsebene

$$P_x^{dir} = \int_{-y_{cm}}^{y_{cm}} dy \langle \frac{p_x}{N} \rangle(y) \frac{dN}{dy} \mathrm{sgn}(y) . \tag{6.4}$$

Sie beinhaltet die Bewegung der Spektatoren, erlaubt jedoch keine Differenzierung nach Partizipanten und Zuschauern und damit mögliche Rückschlüsse auf die relative Gewichtung des Kollisions- und mittlere-Feld - Beitrages.

Der **Flußwinkel** Θ_F wurde bereits in Kapitel 2 erwähnt. Diese Größe, die den durchschnittlichen Winkel der Ablenkung aus der ursprünglichen Flugbahn beschreibt, ist experimentell nur sinnvoll zu bestimmen bei Verfügbarkeit von Detektoren mit sehr großer geometrischer und kinetischer Akzeptanz, da sich speziell bei semizentralen Reaktionen ein Großteil der Teilchen in Vorwärts-Rückwärts-Richtung weiterbewegt und die Masse der nachzuweisenden Teilchen vom einzelnen Nukleon bis zum Spektator mit etwa halber Kernmasse reicht. Aufgrund der in Kapitel 2 besprochenen Probleme wird der Flußwinkel im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt.

6.3 Flow im CBUU-Modell

6.3.1 Beiträge zum Flow

Abbildung 6.9 zeigt die $p_x(y)$–Verteilung für eine ^{139}La+^{139}La - Kollision bei halbem maximalen Stoßparameter, berechnet mit dem RBUU-Modell [76], und die Aufschlüsselung der verschiedenen Beiträge zum Transversalimpuls. Die relative Stärke der Einzelbeiträge ist dabei von Energie, Stoßparameter und Rapiditätsbereich abhängig. Man

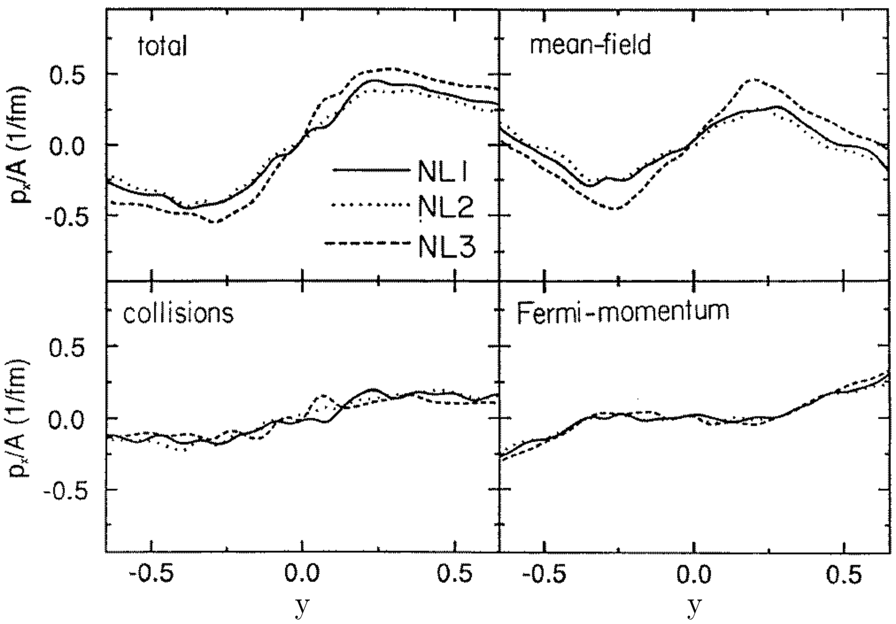


Abb. 6.9: $^{139}La+^{139}La$ - Kollision bei $b = 5.92$ fm Stoßparameter, was ca. 0.5 b_{max} entspricht, und 800 MeV Einschußenergie. Totale $p_x(y)$ - Verteilung (oben links) und Beiträge des mittleren Feldes, der Kollisionen und der Fermibewegung der Nukleonen im Kern. Die Projektilrapidität y_{pr} beträgt 0.614. Abbildung aus [76].

erkennt, daß bei mittleren Rapiditäten die Fermibewegung der Nukleonen nicht beiträgt. Daher wird im Folgenden immer nur ein Kollisions- und ein Potentialbeitrag zum Flow berücksichtigt.

6.3.2 Vergleich mit experimentellen Daten

Als erster Schritt wurde die mit dem CBUU-Modell berechnete Transversalimpulsverteilung mit den experimentell gemessenen Daten verglichen. Abbildung 6.10 zeigt dies beispielhaft für das System Ru+Ru bei 1.69 AGeV Einschußenergie und $b = 2$ fm Stoßparameter. Im Bereich großer Rapiditäten fehlt Transversalimpuls. Im Bereich mittlerer Rapiditäten $|y| \leq 0.5$, in dem der Flow F berechnet wird, werden die Daten aus [77] dagegen gut wiedergegeben.

Abbildung 6.11 zeigt die Ergebnisse der CBUU-Rechnungen zum Flow F für das System Ni+Ni im Vergleich zu experimentellen Daten verschiedener Experimentkollaborationen für eine Vielzahl von Systemen. Es zeigt sich, daß die Daten im gesamten Energiebereich von 150 AMeV bis 2 AGeV mit einer mittleren EoS am besten beschrieben werden können. Eine harte EoS mit $K = 380$ MeV liefert – zumindest für das untersuchte Ni+Ni - System – eine zu starke Repulsion. Die weiche Zustandsgleichung mit $K = 210$ MeV weicht im Ergebnis nur wenig von der mittleren mit $K = 290$ MeV ab, ist tendenziell aber zu niedrig.

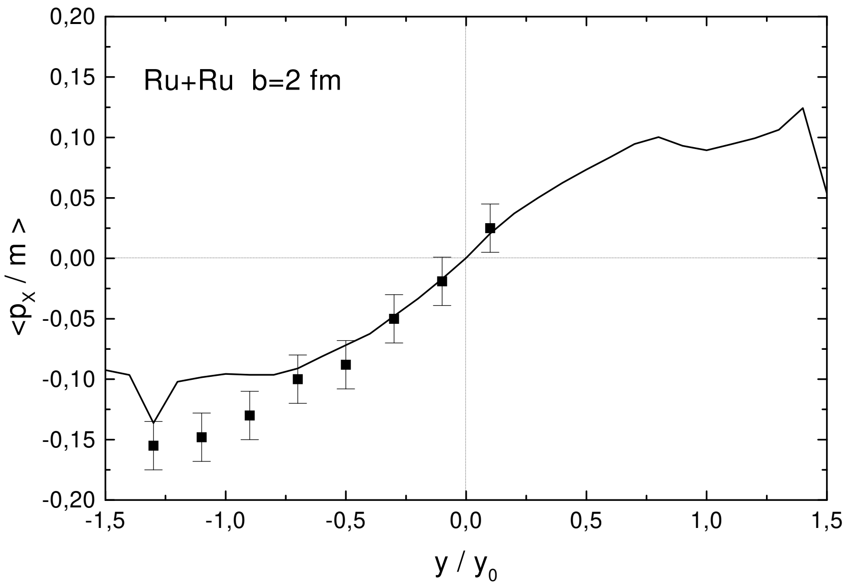


Abb. 6.10: Transversalimpulsverteilung $\langle p_x/m \rangle$ für das System Ru+Ru bei 1.69 AGeV Einschußenergie und b = 2 fm Stoßparameter. CBUU-Ergebnisse (Linie) im Vergleich zu den experimentellen Daten aus [77].

Die Flowwerte F in Abbildung 6.11 sind mit der jeweiligen radialen Ausdehnung der Systeme ($\sim A^{1/3}$) skaliert und folgen damit offensichtlich einer universellen, bis etwa 1 GeV logarithmisch ansteigenden Kurve. Dieses Skalierungsverhalten kann mit dem CBUU-Modell nicht reproduziert werden, wie Abbildung 6.12 zeigt. Benötigt man für das Ni+Ni - System eher eine mittlere EoS, so kann man die Daten für das Au+Au - System nur mit einer harten EoS reproduzieren. Interessanterweise skalieren die Rechnungen für den Kaskadenmodus ohne mittleres Feld mit $A^{1/3}$, ein Hinweis darauf, daß über die Kollisionen tatsächlich eine Repulsion proportional zum Feuerballvolumen aufgebaut wird. Der relative Anteil der Potentialrepulsion ist jedoch für das Au+Au - System geringer, was in der Summe zu einem geringeren Fluß führt.

6.4 Abhängigkeit von EOS

Bei genauerer Betrachtung der Abbildung 6.11 fällt auf, daß die experimentell gemessenen Werte einen Abfall des transversalen Flusses für Energien oberhalb von 1 AGeV andeuten. Dieses Verhalten weisen die CBUU-Ergebnisse nicht auf, da die totalen Wirkungsquerschnitte im Kollisionsterm bei höheren Energien annähernd konstant sind, was einen konstanten Kollisions-“Untergrund” zum Flowsignal liefert, und die Mittlere-Feld-Potentiale ebenfalls zu hohen Energien hin saturieren, d. h., in ihrer Repulsion nicht nachlassen.

Da nun das optische Potential der Nukleonen experimentell nur bis etwa 1 GeV kinetischer Energie bekannt ist, besteht die Möglichkeit, daß das mittlere Feld oberhalb

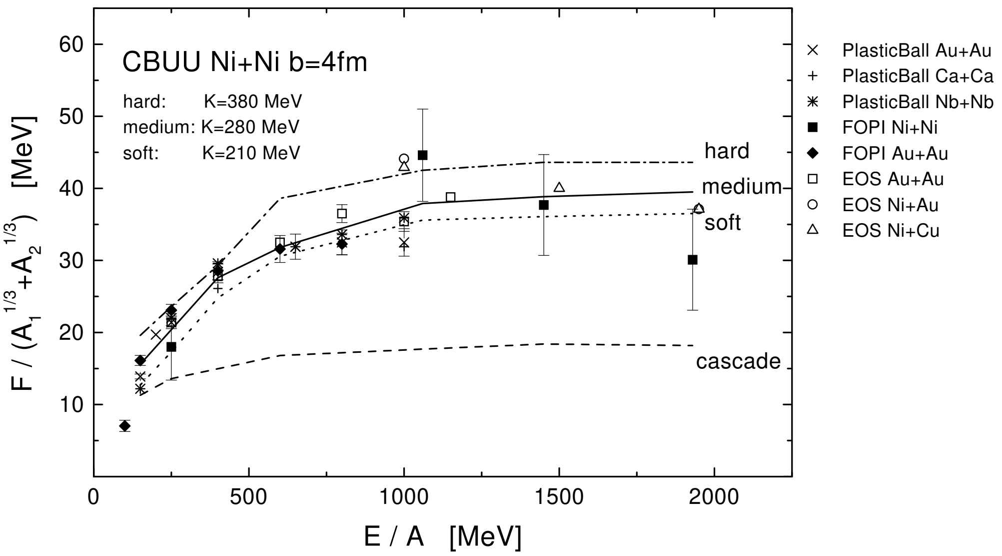


Abb. 6.11: Flowwerte für ein Ni+Ni - System bei b = 4 fm, berechnet mit dem CBUU-Modell und verschiedenen impulsabhängigen Zustandsgleichungen im Vergleich zu Daten der PlasticBall-, EOS- und FOPI-Kollaborationen wie in [59] zusammengestellt. Harte EoS (Strichpunkte), mittlere EoS (durchgezogene Linie) und weiche EoS (Punkte) sowie Flowergebnisse für den Kaskadenmodus ohne mittleres Feld (Striche).

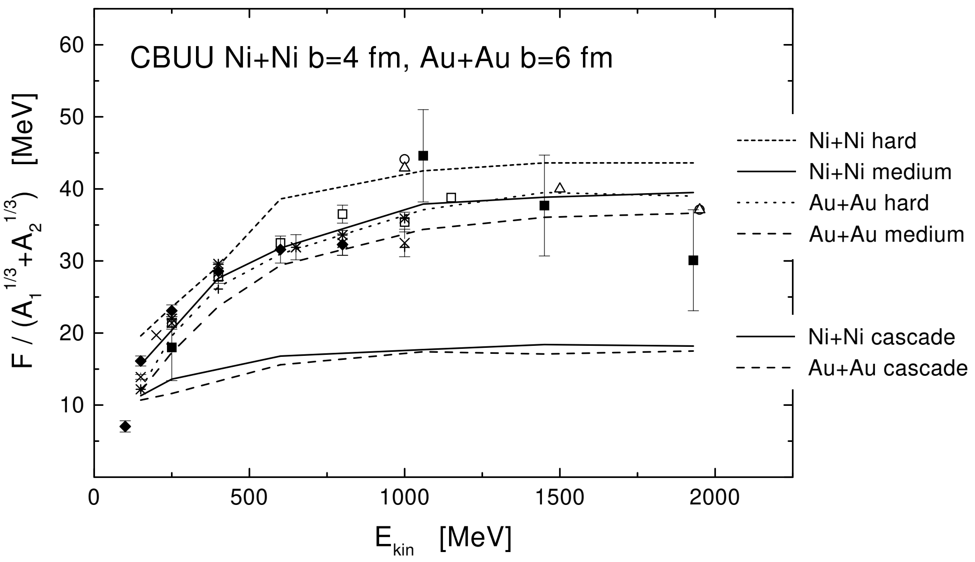


Abb. 6.12: CBUU-Flowwerte für Ni+Ni und Au+Au bei $b = 4$ fm und $b = 6$ fm, was jeweils dem Stoßparameter mit höchstem Transversalimpuls entspricht. Der Flow für Ni+Ni mit mittlerer EoS entspricht dabei dem Flow für Au+Au bei harter EoS. Die Kaskadenrechnungen ohne mittleres Feld skalieren mit $A^{1/3}$.

1 GeV nicht saturiert, sondern schwächer wird und schließlich verschwindet. Effekte eines solchen Verhaltens des Potentials auf den transversalen Fluß wurde in [78] im

Rahmen eines relativistischen Transportmodells (RBUU) untersucht.

Im RBUU-Modell wird die Bewegung der Nukleonen im mittleren Feld in relativistisch kovarianter Weise gemäß [79, 80, 32, 81, 82]

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(\Pi_\mu - \Pi_\nu \partial_\mu^p U_h^\nu - M_h^* \partial_\mu^p U_h^S\right)\partial_x^\mu + \left(\Pi_\nu \partial_\mu^x U_h^\nu + M_h^* \partial_\mu^x U_h^S\right)\partial_p^\mu\right\} f_h(x,p) \\
= &\sum_{h_2h_3h_4} \int d2d3d4\ [G^\dagger G]_{12\to34}\ \delta_\Gamma^4(\Pi + \Pi_2 - \Pi_3 - \Pi_4) \\
\times &\left\{f_{h_3}(x,p_3) f_{h_4}(x,p_4) \bar{f}_h(x,p) \bar{f}_{h_2}(x,p_2)\right. \\
- &\left. f_h(x,p) f_{h_2}(x,p_2) \bar{f}_{h_3}(x,p_3) \bar{f}_{h_4}(x,p_4)\right\}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

beschrieben, was einen ungleich höheren numerischen Aufwand als die nichtrelativistische Beschreibung des CBUU-Modells bedingt. In Gleichung (6.5) treten zwei Potentiale auf: Ein skalares U^S und ein Vektorpotential U^μ mit vier Komponenten, die aus einem relativistischen Wechselwirkungmodell, dem Walecka-Modell mit nichtlinearer Selbstwechselwirkung des σ-Feldes, gewonnen werden. Die Parameter der Potentiale werden dabei so angepaßt, daß das Schrödinger-äquivalente Potential (SEP)

$$U_{sep}(E_{kin}) = U_s + U_0 + \frac{1}{2M}(U_s^2 - U_0^2) + \frac{U_0}{M}E_{kin} \tag{6.6}$$

einen realistischen Verlauf hat (Abbildung 6.13 oben links) und die Sättigungseigenschaften nuklearer Materie reproduziert werden.

Für die NL3-Parametrisierung des mittleren Feldes mit $K = 380$ MeV ergeben sich nun deutlich zu hohe Flow-Werte im RBUU-Modell, sowohl für die Systeme Ni+Ni wie auch Au+Au (Abbildung 6.13 untere Reihe). Schneidet man dagegen sowohl das skalare wie auch das vektorielle Potential mit den Formfaktoren

$$\frac{\Lambda_s^2 - p^2}{\Lambda_s^2 + p^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\Lambda_v^2 - p^2}{\Lambda_v^2 + p^2} \tag{6.7}$$

ab, so ergibt sich bei Wahl von Λ_s zu 0.95 GeV und Λ_v zu 0.9 GeV aus Gleichung (6.6) das in Abbildung 6.13 oben links mit NL3* bezeichnete SEP, das oberhalb von 1 AGeV bis etwa 2.5 GeV abfällt und darüber auf Null gesetzt wird. Die Impulse p der Teilchen in (6.7) werden dabei relativ zum lokalen Ruhesystem der umgebenden Nukleonen bestimmt. Mit dieser Zustandsgleichung kann der Rückgang des transversalen Flusses bei höheren Energien reproduziert werden. Dabei ist die Abnahme für schwere Systeme geringer, da bei diesen eine größere Zahl von Kollisionen pro Nukleon mit dadurch im Mittel geringeren Relativimpulsen stattfindet. Dieses unterschiedliche Verhalten verschieden massiver Systeme kann man andeutungsweise in den bis heute verfügbaren Daten erkennen.

Einen derart deutlichen Effekt eines oberhalb 1 GeV abfallenden Potentials kann man im CBUU-Modell jedoch nicht beobachten. Dies ist in Abbildung 6.14 für das System Ni+Ni bei $b = 4$ fm Stoßparameter gezeigt. Tendenziell fallen die Flow-Werte bei der

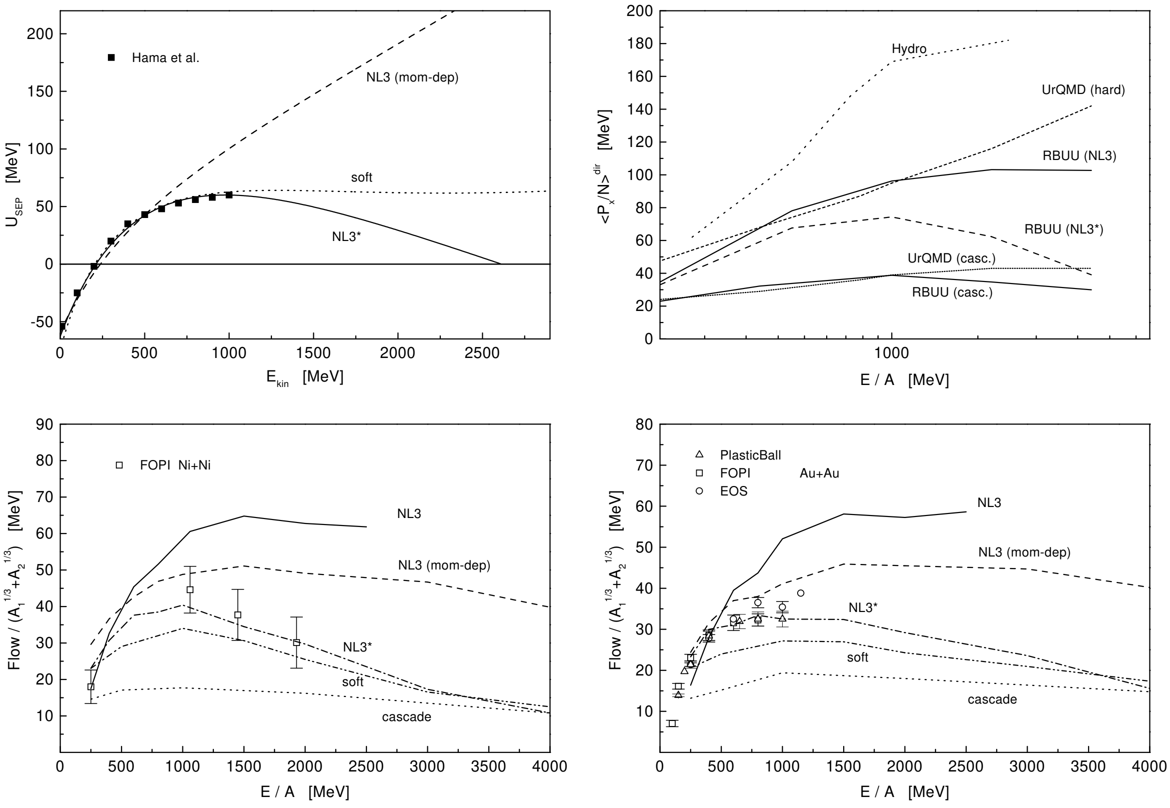


Abb. 6.13: Oben links: Schrödinger-äquivalente Potentiale (6.6) wie im Text beschrieben als Funktion der kinetischen Energie des Nukleons im Vergleich zu den Daten aus [25]. Oben rechts: $\langle P_x/N \rangle^{\mathrm{dir}}$ für die Reaktion Au+Au bei $b = 4$ fm Stoßparameter in verschiedenen Modellen: Hydrodynamisches Modell [83], UrQMD Transportmodell [84] und RBUU [78]. Untere Reihe: Flow als Funktion der Einschußenergie für das RBUU-Modell und den im Text beschriebenen EoS. Abbildungen aus [78].

höchsten Energie, 2 AGeV, leicht ab, was aber im Rahmen der statistischen Fehler liegt. Das RBUU-Modell zeigt hingegen auch bei normaler (harter) NL3-Parametrisierung des Potentials eine geringere Zunahme des Flows zu hohen Energien hin als beispielsweise das UrQMD-Modell mit harter EoS, siehe Abbildung 6.13, oben rechts. Darüberhinaus ergibt das RBUU-Modell mit saturierendem Potential ("soft" in Abbildung 6.13 oben links) ebenfalls einen Abfall des Flows oberhalb von 1 GeV (Abbildung 6.13 unten). Es stellt sich daher die Frage nach den Gründen für dieses unterschiedliche Verhalten.

Eine Ursache für den stärkeren Abfall der Flow-Werte im RBUU-Modell zu hohen Energien hin bei Abschneiden des Potentials mit einer Cutoff-Funktion (6.7) als im CBUU-Modell liegt in der Wechselwirkung von attraktivem Skalar- und repulsivem Vektorpotential, die im CBUU-Modell zu einem Schrödinger-äquivalenten Potential zusammengefaßt sind. Beide Potentiale sind sehr groß, $U_0 \simeq 350$ MeV, $U_s \simeq -400$ MeV, im Vergleich zu $U_{SEP} \simeq -50$ MeV [85]:

Abbildung 6.15 zeigt den zeitlichen Aufbau von Transversalimpuls in einer semizen-

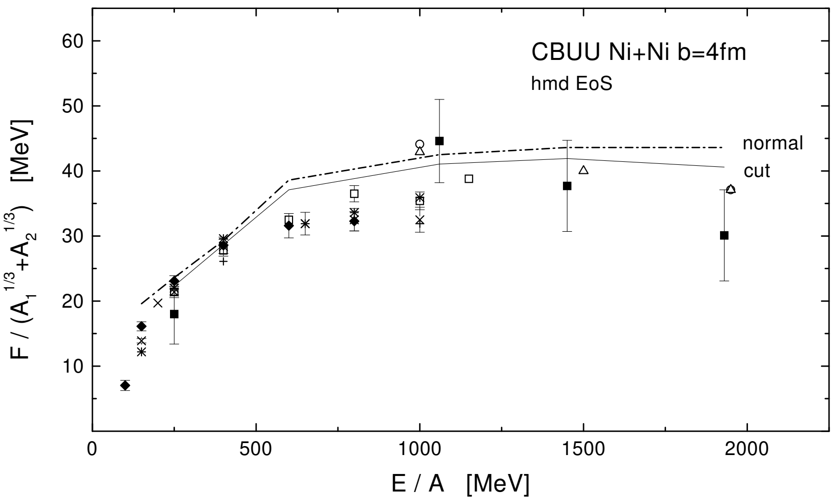


Abb. 6.14: Flow im CBUU-Modell für die Reaktion Ni+Ni bei $b = 4$ fm Stoßparameter mit harter EoS ("normal") und einem Potential, das bis 1 AGeV zu der in Kapitel 2.3.2 definierten Parametrisierung identisch ist, darüber aber abfällt und für $E \geq 3.5$ GeV gleich Null ist ("cut").

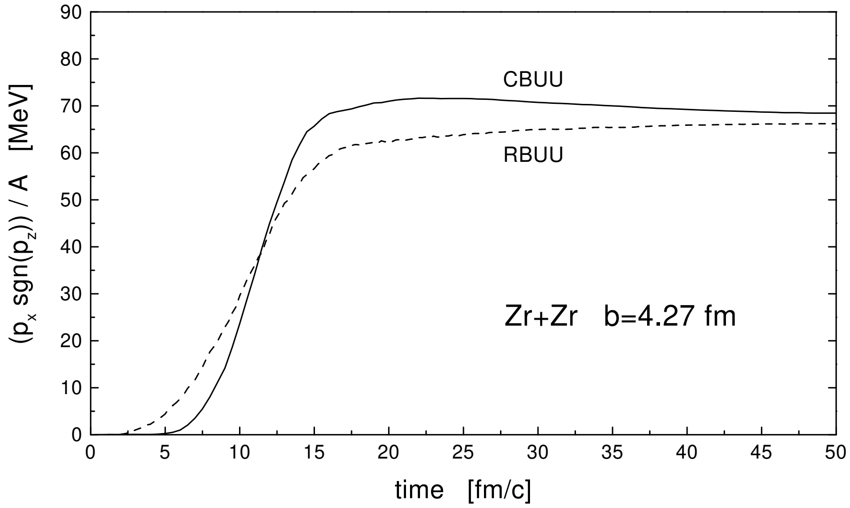


Abb. 6.15: Aufbau von transversalem Impuls p_x in Verlauf einer semizentralen Zr+Zr - Kollision. RBUU-Modell wie im Text beschrieben im Vergleich zum CBUU-Modell.

tralen Zr+Zr - Kollision. Das CBUU-Modell beginnt mit dem Aufbau von transversalem Impuls erst zum Zeitpunkt der ersten Kollisionen, d. h. bei unmittelbarem Kontakt der Kerne. Im RBUU-Modell hingegen setzt der Aufbau des Transversalimpulses früher ein und ist dafür "weicher". Dies hat seine Ursache in den Lorentzkräften, die bei Anwesenheit eines Vektorfeldes auftreten. Durch die numerische Rotations-Bildung wird eine Art Fernwirkung zwischen den Gitterzellen hervorgerufen, während im CBUU-Modell ein Teilchen in der jeweiligen Zelle sein muß, um den Einfluß des dortigen Potentials zu spüren.

Darüberhinaus koppelt im RBUU-Modell das skalare Potential an die skalare Dichte $\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle$ und das vektorielle an $\langle\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\rangle$. Strömt nun – wie bei semizentralen Schwerionenkollisionen der Fall – Materie in unmittelbarer Nachbarschaft in entgegengesetzte Richtungen, so ist die Balance zwischen Vektor- und Skalarpotential eine andere als in uniformer Kernmaterie; das Vektorpotential gewinnt stärkeren Einfluß. Wird es nun durch einen Cutoff abgeschnitten, so ist die Beeinflussung der Dynamik der Kollision dadurch wesentlich stärker als bei einem Cutoff auf das parametrisierte Schrödinger-äquivalente Potential, das nach Gleichung (6.6) eigentlich aus der Differenz der aktuellen Potentiale resultiert.

6.5 Einfluß höherer Resonanzen

Ein anderer Grund für das unterschiedliche Verhalten des RBUU- und des CBUU-Modells liegt in der unterschiedlichen Behandlung des Kollisionsterms. Abbildung 6.13 zeigt, daß bei dem RBUU-Modell der Flow im Kaskadenmodus, also ohne mittlere Felder, bereits oberhalb von etwa 1 AGeV abzunehmen beginnt. Dieses Verhalten zeigt das CBUU-Modell nicht, vergleiche Abbildung 6.11. Im Folgenden wurde daher untersucht, inwieweit Unterschiede in der physikalischen Modellbildung oder in der numerischen Behandlung des Kollisionsterms Einfluß auf den transversalen Fluß bei hohen Energien haben.

Es zeigt sich, daß vor allem die Population hoher Resonanzen bzw. deren Massenverteilung ein entscheidender Faktor ist. Im RBUU-Modell in der ursprünglichen Form [79, 80, 32, 81, 82] wurde aufgrund des hohen numerischen Aufwands zu Lösung der Transportgleichung 6.5 nur die Δ-Resonanz als nukleonische Anregung berücksichtigt. In der erweiterten Form in [78] ist es vor allem um das LUND-Stringmodell [87] mit einer "Stingschwelle" von $\sqrt{s} = 2.6$ GeV im Baryon-Baryon-Stoß zur Absorption hoher Anregungen ergänzt worden. Dies beeinflußt jedoch nicht das prinzipielle Verhalten des RBUU-Modells, das in seiner ursprünglichen Form für die folgende Untersuchung herangezogen wurde.

Abbildung 6.16 zeigt im oberen Teil den Flow F im Kaskadenmodus des CBUU-Modells für ein Ni+Ni - System bei $b = 4$ fm Stoßparameter. Die durchgezogene Linie entspricht der normalen Rechnung mit allen Resonanzen bis $M_R = 1.95$ GeV Masse, die gestrichelte einer Rechnung, die nur das $\Delta(1232)$ einschließt. Dabei wurde der gesamte inelastische Wirkungsquerschnitt zur Population des $N\Delta$-Kanals verwendet, um eine Beeinflussung des Ergebnisses durch unterschiedliches Stopping der Kerne auszuschließen (Δ_{all}-Modus). Im unteren Teil der Abbildung 6.16 ist zum Vergleich der mit dem RBUU-Modell berechnete Flow gezeigt. Die durchgezogene Linie ist im Verlauf identisch mit der des CBUU-Modells im Δ_{all}-Modus. Verschiebt man hingegen in RBUU-Modell die Massenverteilung der Resonanzen, indem man eine höhere mittlere Δ-Masse ansetzt, so ergibt sich auch hier ein erhöhter Fluß bei 1.5 - 2 AGeV.

Klarerweise spielt die Population massiver Resonanzen, obwohl im Reaktionsgeschehen nur im Prozentbereich vertreten, wie Tabelle 6.3 zeigt, eine dominante Rolle bei

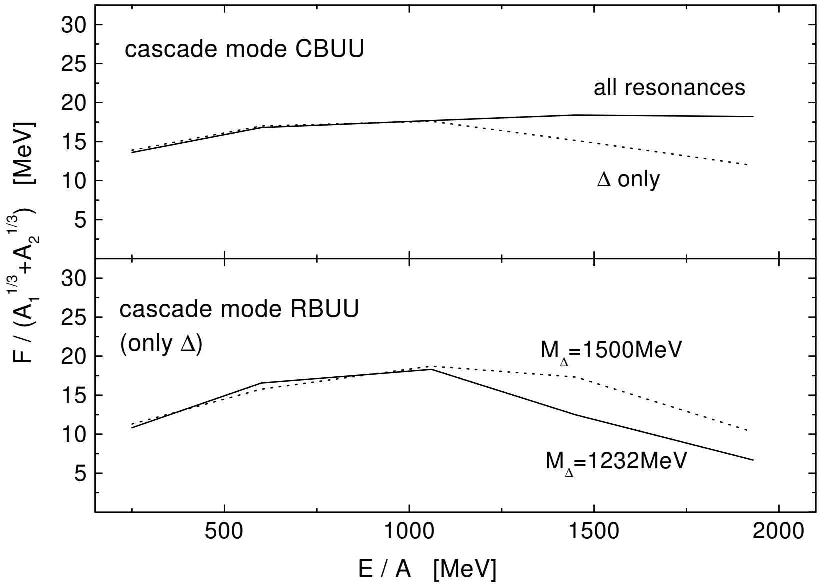


Abb. 6.16: Flow im Kaskadenmodus des CBUU-Modells (oben) und des RBUU-Modells (unten). CBUU-Modell mit Berücksichtigung aller Resonanzen bis 1.95 GeV ("normal", durchgezogene Linie) und im Δ_{all}-Modus (gestrichelte Linie). RBUU mit normaler Δ-Massenverteilung (durchgezogene Linie) und mit auf 1.5 GeV erhöhter Δ-Masse (gestrichelte Linie).

der Erzeugung von transversalem Fluß im Energiebereich oberhalb 1 AGeV. Dies ist dabei nicht auf die unterschiedliche Behandlung der winkeldifferentiellen Streuung im $NN \to NR$ - Prozeß zurückzuführen, wie ein Test mit einer Δ-ähnlichen Parametrisierung von $d\sigma/d\Omega$ für die massiven Resonanzen ergab. Der Unterschied ist vielmehr 1) auf die unterschiedliche Wirkung des Pauli-Blocking im Endzustand der NN-Kollisionen auf Deltas und schwere Resonanzen zu Beginn der Reaktion und 2) die Absorption unterschiedlich harter Mesonenspektren durch die Spektatoren in der Hochdichtephase zurückzuführen:

Typ	Anzahl Resonanzen	
	t=7.5 fm/c	ges. Reaktion
alle	12.7%	49.1%
alle mit $M > M_\Delta$	3.4%	18.7%
alle mit $M > 1.6$ GeV	2.2%	13.5%

Tab. 6.3: Reaktion Ni+Ni bei $b = 4$ fm Stoßparameter. Mittlere Spalte: Prozentuales Verhältnis der Resonanzen zu allen Baryonen während der Hochdichtephase bei t=7.5 fm /c. Rechte Spalte: Anzahl der Nukleonen, die im Verlauf der Reaktion mindestens einmal zu einer Resonanz angeregt wurden.

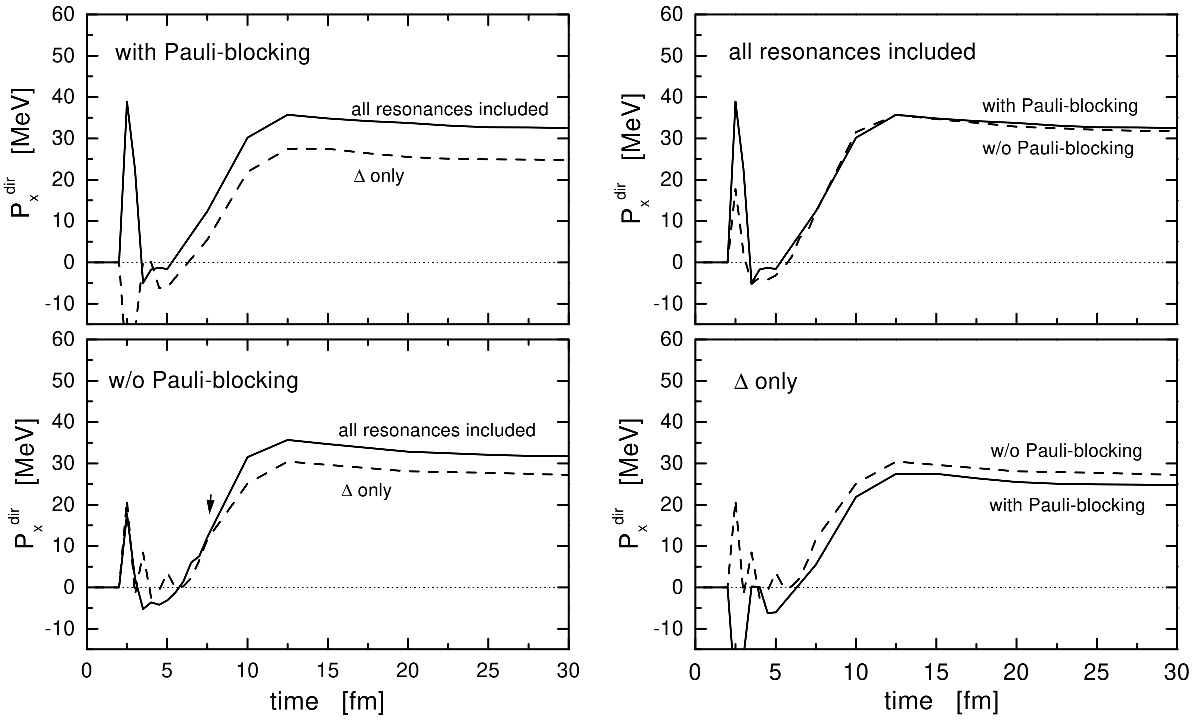


Abb. 6.17: Zeitliche Entwicklung des gesamten transversalen Impulses P_x^{dir} einer Ni+Ni - Kollision bei $b = 4$ fm und 2 AGeV. Linke Spalte: Vergleich der Differenz zwischen normalem um Δ_{all}-Modus mit und ohne Pauli-Blocking. Rechte Spalte: Vergleich der Änderungen beim "Abschalten" des Pauli-Blocking im CBUU-Modell im normalen und Δ_{all}-Modus.

6.5.1 Wirkung des Pauli-Blockings in NN-Kollisionen

Um den Einfluß der höheren Resonanzen auf die Ausbildung des transversalen Flusses zu verstehen, wurde die Entwicklung der Flußgrößen P_x^{dir} und F im Ablauf einer Kollision untersucht. Da sich beide Größen als äquivalent erwiesen, wird im folgenden ausschließlich die numerisch stabilere Größe P_x^{dir} verwendet.

Abbildung 6.17 zeigt die zeitliche Entwicklung von P_x^{dir} im Verlauf einer semizentralen Ni+Ni - Kollision bei 2 AGeV Einschußenergie. Im linken oberen Teil der Abbildung erkennt man, daß sich die Unterschiede zwischen "normalem", d. h. alle Resonanzen berücksichtigenden, und Δ_{all}-Modus im transversalen Fluß sehr früh herausbilden. Die ersten Nukleonen kollidieren nach 2 fm/c, aufgrund ihrer geringen Anzahl ergeben sich starke numerische Fluktuationen. Bereits nach 5 fm/c, zu Beginn der Hochdichtephase, hat sich jedoch numerisch stabil ein Unterschied herausgebildet, der im weiteren Reaktionsgeschehen erhalten bleibt und sich lediglich noch etwas vergrößert.

Schaltet man das Pauli-Blocking ab, so ergibt sich für P_x^{dir} der im linken unteren Teil der Abbildung 6.17 gezeigte Verlauf. Die Kurven für den normalen und den Δ_{all}-Modus trennen sich erst bei ca. 7.5 fm/c. Dies ist darauf zurückzuführen, daß ohne Pauli-Blocking im Δ_{all}-Modus mehr positives P_x^{dir} entsteht, wie man in der rechten

Spalte der Abbildung 6.17 erkennt.

Um die Wirkung des Pauli-Blockings als Ursache der Verschiebung der Δ_{all}-Kurve zu verstehen, wurde die Erzeugung von transversalem Fluß durch die einzelnen NN-Kollisionen im Verlauf der Simulation mitprotokolliert. Dazu wurde von den beiden Reaktionspartnern vor und nach jeder Kollision die Größe

$$p_x^{dir} = \sum_{i=1,2} p_{x,i} \cdot \mathrm{sgn}(p_{z,i}) \tag{6.8}$$

gebildet. Der Gesamtgewinn an transversalem Impuls in einem Zeitschritt ergibt sich als Summe über alle Kollisionen in diesem Zeitschritt

$$\tilde{p}_x^{dir} \;=\; \sum_{\text{Kollisionen}} \Big(p_x^{dir}(\text{nachher}) - p_x^{dir}(\text{vorher})\Big) \ . \tag{6.9}$$

Diese Größe schwankt jedoch auch noch bei 1000 Testteilchen pro Nukleon, bedingt durch die geringe Seitwärtsablenkung vor allem bei elastischen Kollisionen bei hohen Relativimpulsen, sehr stark in jedem Zeitschritt. $\tilde{p}_x^{dir}$ wird durch einige wenige Nukleonenpaare bestimmt, deren zufällige Wahl der Streu-Endzustände eine große Ablenkung aus der ursprünglichen Flugrichtung ergaben. Daher wird in Abbildung 6.18 die zeitliche Summe der $\tilde{p}_x^{dir}$

$$\tilde{P}_x^{dir}(t_i) = \sum_{j=0}^{i} \tilde{p}_x^{dir}(t_j) \tag{6.10}$$

bis zu dem entsprechenden Zeitschritt t gezeigt.

Man erkennt, daß für die Kollisionspartner vor den Kollisionen p_x^{dir} im Mittel immer negativ ist, nach der Kollision dagegen näher an Null. Das bedeutet, daß durch Kollisionen kein positives p_x^{dir} erzeugt, sondern negatives vernichtet wird. Bei Berücksichtigung aller Resonanzen gilt dies sowohl mit wie auch ohne Pauli-Blocking. Anders dagegen, wenn man lediglich Δ-Resonanzen erlaubt: Unter Vernachlässigung des Pauli-Blocking einwickelt sich $\tilde{P}_x^{dir}$ in gleicher Weise wie im normal-Modus; bei Berücksichtigung von Pauli-Effekten weisen die Endzustände der NN-Kollisionen im Mittel fast ebensoviel negatives p_x^{dir} auf wie vor der Kollision.

Diesen Effekt kann man aus der kinematische Situation zu Beginn einer Schwerionenreaktion verstehen. Abbildung 6.19 zeigt links oben den Beginn der Reaktion im Ortsraum, die Kerne beginnen zu überlappen. Die Pfeile zeigen in Richtung der Ablenkung der Nukleonen im Verlauf der Reaktion, aus der ein positives P_x^{dir} resultiert. Im oberen rechten Teil der Abbildung ist die gleiche Situation im Impulsraum dargestellt. Hier sind die Kerne – im Kaskadenmodus ohne Fermibewegung der Nukleonen – zu Punkten zusammengeschrumpft. Kollisions-Endzustände in den Quadranten I und III entsprechen positivem p_x^{dir}, in den Quadranten II und IV negativem.

Für Kollisionen der ersten Generation sind nun Endzustände in I und III ebenso wahrscheinlich wie in II und IV, das im Mittel erzeugte $\tilde{p}_x^{dir}$ Null. Dies ist in Abbildung 6.19 links unten dargestellt. Entscheidend ist nun, daß Nukleonen in Endzuständen in

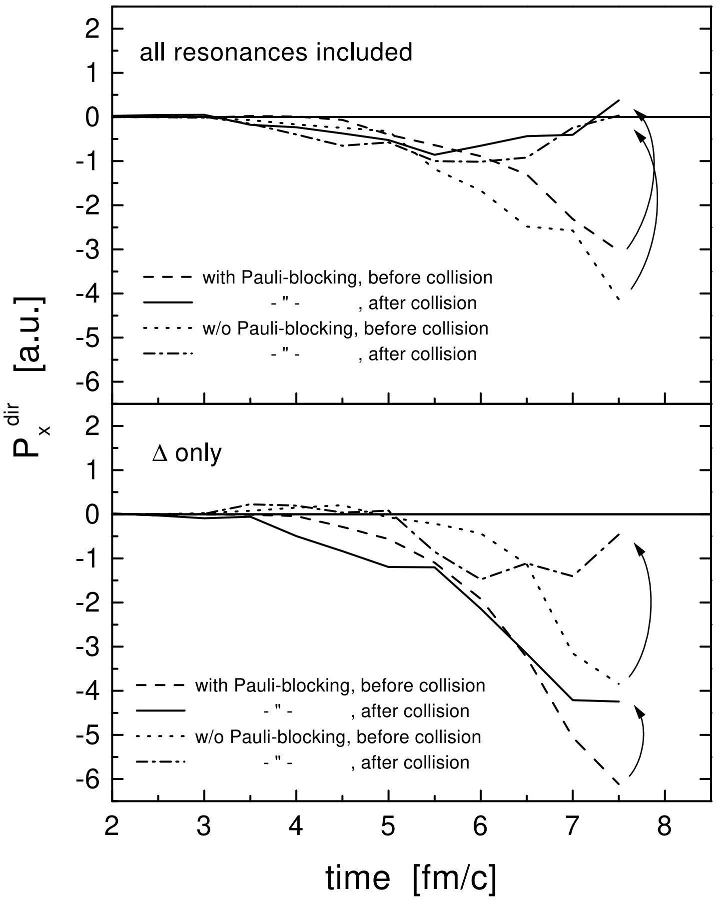


Abb. 6.18: Aufsummiertes $\tilde{P}_x^{dir}$ aus Gleichung (6.10) aller Kollisionspartner während der Frühphase einer Ni+Ni - Kollision bei 2 AGeV und $b = 4$ fm. Oberes Bild im normalen CBUU-Modus mit allen Resonanzen bis 1.95 GeV Masse, mit und ohne Pauli-Blocking; unteres Bild im Δ_{all}-Modus. Durch die Kollisionen wird im Normalfall negatives P_x^{dir} abgebaut.

II und IV, also mit negativem p_x^{dir}, eine größere Wahrscheinlichkeit haben, wiederum zu kollidieren, denn sie bewegen sich im Ortsraum geradewegs in den anderen Kern hinein. Damit erklärt sich die "Vernichtung" von negativem Gesamt-P_x^{dir} durch die Kollisionen.

Bei Anwesenheit nur leichter Teilchen, Nukleonen und Δ, tritt nun eine Anhäufung von Teilchen in Impulszuständen nahe den ursprünglichen Kernen auf; bei Streuung mit Bildung massiver Resonanzen liegen viele Endzustände näher am Koordinatensystemursprung. Damit tritt bei sekundären Kollisionen von Teilchen im Anfangszustand 3' und 4' der Effekt auf, daß die Endzustände 5' und 6' mit einer größeren Wahrscheinlichkeit bereits geblockt sind als bei Bildung massiver Resonanzen. Damit erfolgt die Streuung in die Zustände 5 und 6 und das negative p_x^{dir} bleibt erhalten, vergleiche Abbildung 6.19 unten rechts.

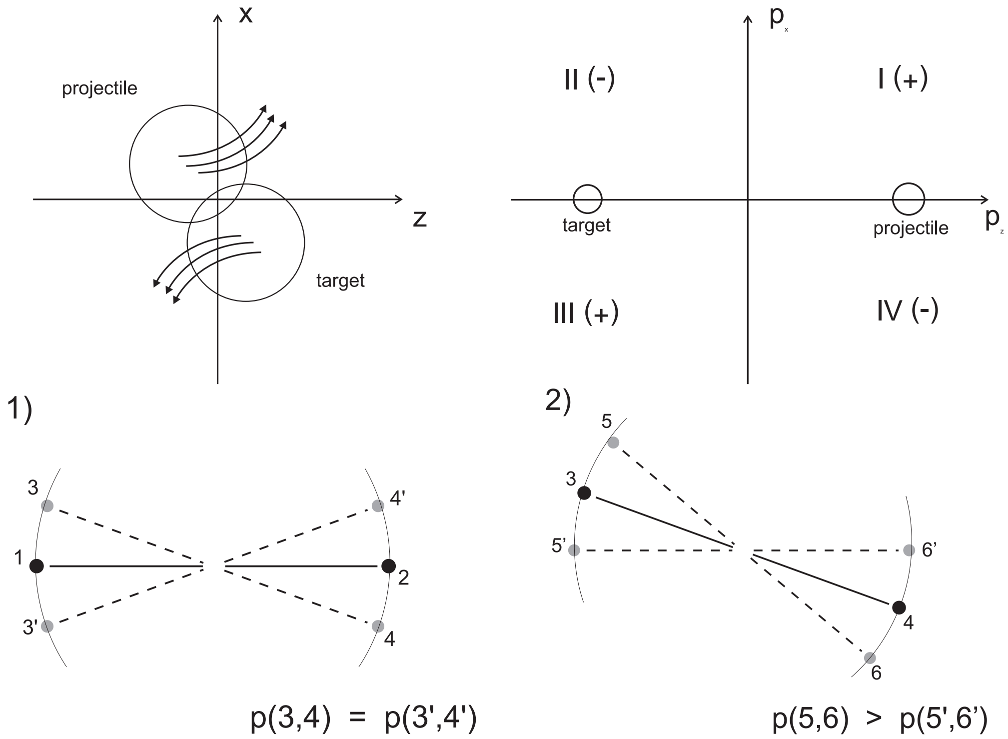


Abb. 6.19: Obere Zeile: Konfiguration im Orts- und im Impulsraum zu Beginn einer Schwerionenreaktion. Die Pfeile geben die spätere Ablenkungsrichtung von Projektil und Target an. Im Impulsraumbild benennen die römischen Ziffern die im Text erwähnten Quadranten, in Klammern der Wert von p_x^{dir} für ein Teilchen in diesem Quadrant. Untere Zeile: Links die Lage von Anfangs- und möglichen Endzuständen einer ersten Streuung im Impulsraum, rechts die einer zweiten Kollision. Die Zustände 5',6' sind bei ausschließlichem Vorliegen leichter Resonanzen mit größerer Wahrscheinlichkeit bereits besetzt.

6.5.2 Wirkung der Mesonabsorption

In Abbildung 6.17 bleibt ein Unterschied zwischen den Kurven des normal- und der Δ_{all}-Modus auch bei Ausschalten des Pauli-Blocking bestehen. Daraus kann man schließen, daß es für die Gesamtdifferenz im Fluß *zwei* Quellen gibt, die zu verschiedenen Zeiten beitragen, wobei die zweite Ursache während der Hochdichtephase wirkt.

Abbildung 6.20 zeigt das aufsummierte und zeitlich integrierte $\tilde{P}_x^{dir}$, ähnlich wie für Abbildung 6.18 verwendet, für alle in πN-Absorptionsreaktionen entstandenen Resonanzen. Es zeigt sich, daß bei Einschluß schwerer Resonanzen die durchschnittliche Transversalimpulsaufnahme durch die Absorption größer ist, was mit dem härteren Mesonspektrum beim Zerfall eben dieser schweren Resonanzen [3] im Feuerball erklärbar ist. Da die Absorption auch in den Spektatoren stattfindet, die den Feuerballs umgeben, ist mit der Absorption im Mittel ein Impulsübertrag transversal nach außen verbunden. Dies ist schematisch in Abbildung 6.21 verdeutlicht. Die Mesonemissionsreaktionen zeigen hingegen keinen Einfluß auf den Aufbau von P_x^{dir}, da sie keine Vorzugsrichtung haben.

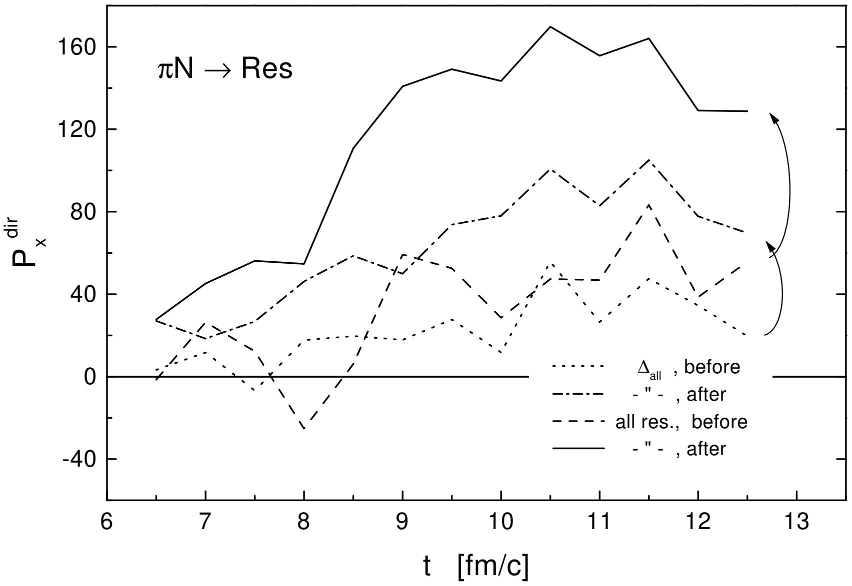


Abb. 6.20: Aufsummiertes $\tilde{P}_x^{dir}$ analog Gleichung (6.10) aller Nukleonen, die ein Meson absorbieren, vor und nach der Absorption. Kollision und Linien wie in Abbildung 6.18.

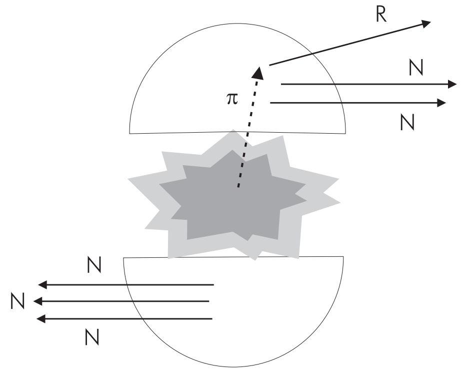


Abb. 6.21: Schematische Darstellung der Absorption eines im Feuerball emittierten Pions von einem Spektatorennukleon und dadurch verursachtem Impulsübertrag nach außen.

6.6 Skalares Potential

Wie in Kapitel 2.3.2 bereits diskutiert, kann die nichtrelativistische Potentialparametrisierung von Welke et al. [6] prinzipiell auch als skalares Potential in das CBUU-Modell implementiert werden. Dies führt zu einer Änderung der Einteilchenenergien in Abhängigkeit von Impuls und Dichte, vor allem aber zu einer Änderung der Propagationsgleichung der Testteilchen, in der zusätzliche Faktoren m^*/E vor den Potentialgradienten auftauchen:

$$\partial_t f + \left(\frac{\vec{p}}{E} + \frac{m^*}{E} \vec{\nabla}_p U \right) \vec{\nabla}_r f + \frac{m^*}{E} \vec{\nabla}_r U \, \vec{\nabla}_p f \;=\; I_{\rm coll} \, . \tag{6.11}$$

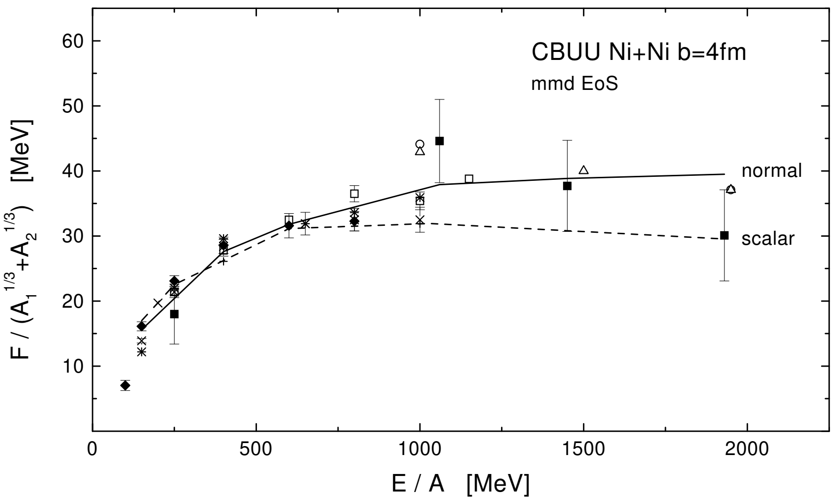


Abb. 6.22: Transversaler Flußparameter F für die Reaktion Ni+Ni bei $b = 4$ fm Stoßparameter im CBUU-Modell. Durchgezogene Linie: Nukleonenpotential als nullte Komponente eines Vektorpotentials realisiert; gestrichelte Linie: Nukleonenpotential in der Propagationsgleichung als skalares Potential angesetzt. Rechnungen für eine mittlere EoS, $K = 290$ MeV.

Diese Faktoren werden um so kleiner, je schneller sich das Teilchen bewegt; *schnelle* Teilchen erfahren also weniger Ablenkung durch die Potentialgradienten bei der Behandlung des Potentials als skalares.

Um eine ungefähre Abschätzung der Größe dieses Effektes zu bekommen, wurde testweise in der Propagation vor die Potentialgradienten zusätzliche Faktoren m^*/E wie in Gleichung (6.11) eingesetzt; die Beschreibung der Kollisionen erfolgte weiterhin mit der nullten Komponente eines Vektorpotentials. Diese unterschiedliche Behandlung des Potentials kann zu deutlichen Abweichungen in der Energieerhaltung führen, dies konnte jedoch nicht überprüft werden, da keine eindeutige Trennung von kinetischer und potentieller Energiedichte mehr möglich war.

Abbildung 6.22 zeigt den Flow F für eine semizentrale Ni+Ni - Kollision, einmal mit dem bisherigen Ansatz, der das Potential als nullte Komponente eines Vektorpotentials betrachtet, und zum andern mit der modifizierten Propagationsgleichung (6.11), in der das Potential als skalares angenommen wird. Es zeigt sich, daß bis zu Einschußenergien E/A von ca. 600 MeV beide Beschreibungen äquivalent sind, darüber ergeben sich hingegen deutliche Abweichungen. Der Flow ist bei Annahme eines skalaren Potentials deutlich kleiner als bei der normalen Beschreibungsweise, was man mit der geringeren Ablenkung der Teilchen durch die Potentialgradienten erklären kann. Es zeigt sich in etwa der Abfall zu hohen Energien hin, den die experimentellen Daten andeuten. Jedoch setzt dieser Abfall deutlich zu früh, bei etwa 600 AMeV Einschußenergie, ein und die Ablenkung der Teilchen im Bereich um 1 AGeV ist wesentlich zu klein.

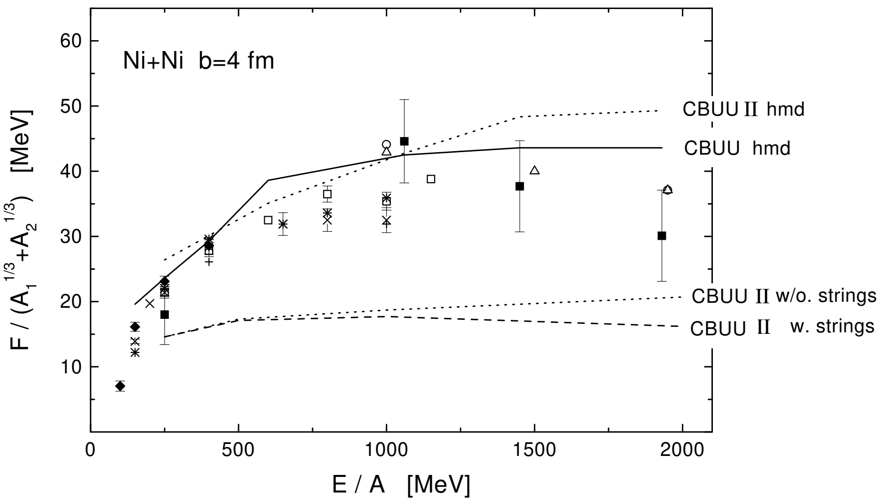


Abb. 6.23: Transversaler Flußparameter F für die Reaktion Ni+Ni bei $b = 4$ fm Stoßparameter. Gestrichelte untere Linie: Modifiziertes CBUU-Modell von [86] ("CBUU II") mit Strings; gepunktete untere Linie: Modifiziertes CBUU-Modell ohne Strings. Durchgezogene Linie: CBUU-Modell aus dieser Arbeit mit harter EoS; obere gepunktete Linie: Modifiziertes CBUU-Modell ohne Strings mit harter EoS.

6.7 Modifikation des Stoßterms

Aufgrund der Diskussionen in den Kapiteln 5.2 und 6.5, in denen eine etwas zu starke Population der hohen Resonanzen und eine Sensitivität des transversalen Flusses auf die Population ebendieser Resonanzen festgestellt wurde, soll in diesem Abschnitt kurz auf eine alternative Realisierung des Stoßterms und die sich daraus ergebenden Konsequenzen eingegangen werden. Kürzlich wurde das CBUU-Modell, wie es in dieser Arbeit verwendet wurde, geändert [86], indem wahlweise alternativ zum Resonanzmodell das LUND-Stringbild [87, 74] verwendet werden kann. Das bedeutet, daß oberhalb der $\Delta(1232)$-Resonanz der inelastische NN-Wirkungsquerschnitt zur Erzeugung sogenannter Strings verwendet wird, die in mehrere Mesonen zerfallen können. Die Energie der Strings wird der kinetischen Energie der Nukleonen entnommen. Die Energieschwelle für die Entstehung der Strings liegt bei $\sqrt{s} \geq 2.6$ GeV.

Mit diesem modifizierten CBUU-Modell ("CBUU II") ergibt sich bei "Einschalten" der Strings im Kaskadenmodus eine relative Abnahme des Flows bereits oberhalb von Einschußenergien von 1 AGeV im Vergleich zu dem gleichen Modell mit Resonanzbild. Dies ist in Abbildung 6.23 gezeigt. Diese niedrige Grenzenergie kann man aus folgender Abschätzung verstehen:

$$E_{kin} = 1 \text{ GeV} \quad \Rightarrow \quad p^{Pr} = 1.73 \text{ GeV}, \tag{6.12}$$

mit $p_{\text{Fermi}} \simeq 0.25$ GeV folgt

$$\begin{aligned} p_{max}^{Pr} &\simeq 1.93 \text{ GeV}, \quad & E_{max}^{Pr} &\simeq 2.22 \text{ GeV}, \\ p_{max}^{Ta} &\simeq -0.25 \text{ GeV}, \quad & E_{max}^{Ta} &\simeq 1.03 \text{ GeV}, \end{aligned} \tag{6.13}$$

und

$$\begin{aligned} s &= (2.22+1.03)^2 \; - \; (1.98-0.25)^2 \\ &= 3.25^2 - 1.73^2 \simeq 7.56 \text{ GeV}^2 \\ \Rightarrow \sqrt{s} &\simeq 2.75 \text{ GeV}, \end{aligned} \tag{6.14}$$

was bereits über der Stringenergieschwelle von 2.6 GeV liegt. Dieses positive Ergebnis des modifizierten Modells im Kaskadenmodus kann man zur Zeit jedoch nicht auf die Rechnungen mit Mittlere-Feld-Potential übertragen. Die Flowwerte F des CBUU II-Modells liegen wesentlich über dem in dieser Arbeit verwendeten Modell und den experimentellen Daten, vergleiche Abbildung 6.23, obere Kurven. Die genaue Ursache für diese Diskrepanz zu ermitteln, war bisher nicht möglich. Jedoch scheint das Modell mit Strings bei leichten Systemen mehr "Stopping" und auch eine engere Rapiditätsverteilung der Pionen zu liefern [72], vergleiche die Diskussion in Kapitel 5.3, und ist daher ein vielversprechender Ansatz.

Kapitel 7

Radialer Fluß

Der radiale Fluß wurde bei der Analyse von Teilchenspektren sehr zentraler Ereignisse in Schwerionenkollisionen entdeckt [1]. Es zeigte sich, daß diese Spektren eine starke nichtthermische Komponente haben; die mittleren Teilchenimpulse sind größer als es die aus der Steigung der Spektren extrahierte Temperatur erwarten lassen würde. Man hat daher das Bild einer in der Frühphase der Kollision komprimierten und dann radial expandierenden, thermischen Quelle entwickelt und extrahiert aus den Teilchenspektren die Größen β und T als Expansionsgeschwindigkeit und Temperatur.

Dieses Bild ist jedoch fragwürdig bei kleinen Systemen und niedrigen Energien. In beiden Fällen wird sicher keine Equilibrierung des Systems erreicht, vergleiche Kapitel 4. Im CBUU-Modell ergeben sich folglich starke Differenzen zwischen den transversalen und den longitudinalen Nukleonenspektren, wie Abbildung 7.1 zeigt. Während die transversalen Spektren gut mit den experimentell gemessenen Protonenspektren übereinstimmen und sich zumindest bei Energien oberhalb 400 AMeV auch gut mit der Siemens-Rasmussen-Formel (7.1) [89] beschreiben lassen, sind die longitudinalen Spektren deutlich verformt. Aufschlußreich wäre daher eine experimentelle Aufnahme der Teilchenspektren unter verschiedenen Polarwinkeln. Dies ist gegenwärtig jedoch aufgrund der beschränkten Detektorakzeptanz zumindest bei kleinen Winkeln schwierig.

7.1 Spektrenfits

Analog zur experimentellen Vorgehensweise [88] wurden mit dem CBUU-Modell transversale Spektren im Winkelbereich $\Theta_{cm} = 90 \pm 15^0$ aufgenommen und mit der Siemens-Rasmussen-Formel [89]

$$\frac{d^3N}{dEd^2\Omega} \sim p \cdot e^{-\gamma E/T} \left\{ \frac{\sinh \alpha}{\alpha} \cdot (\gamma E + T) - T \cdot \cosh \alpha \right\} \tag{7.1}$$

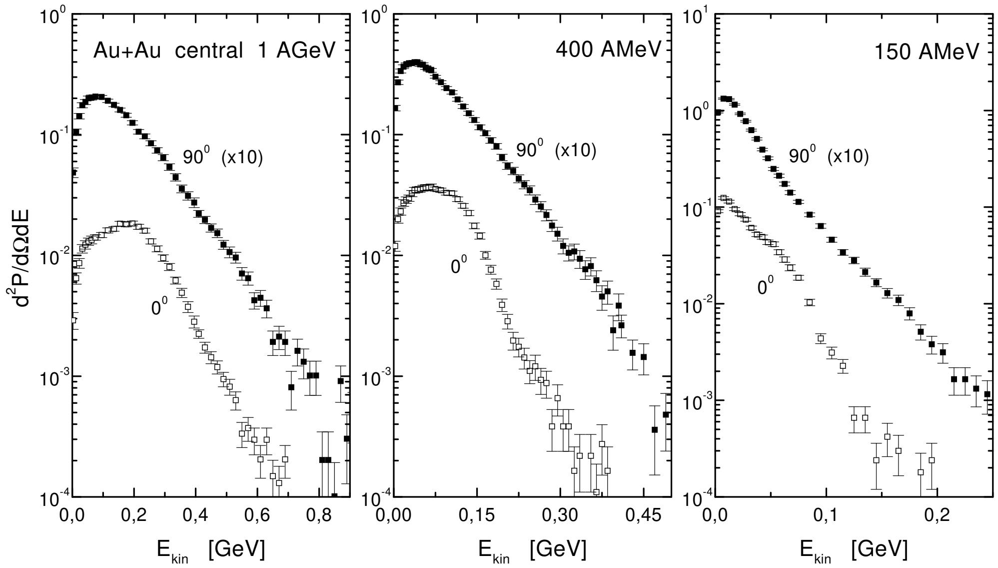


Abb. 7.1: Transversale (90^0) und longitudinale (0^0) Nukleonenspektren für zentrale Au+Au - Kollisionen bei 1 AGeV, 400 AMeV und 150 AMeV Einschußenergie, berechnet mit dem CBUU-Modell.

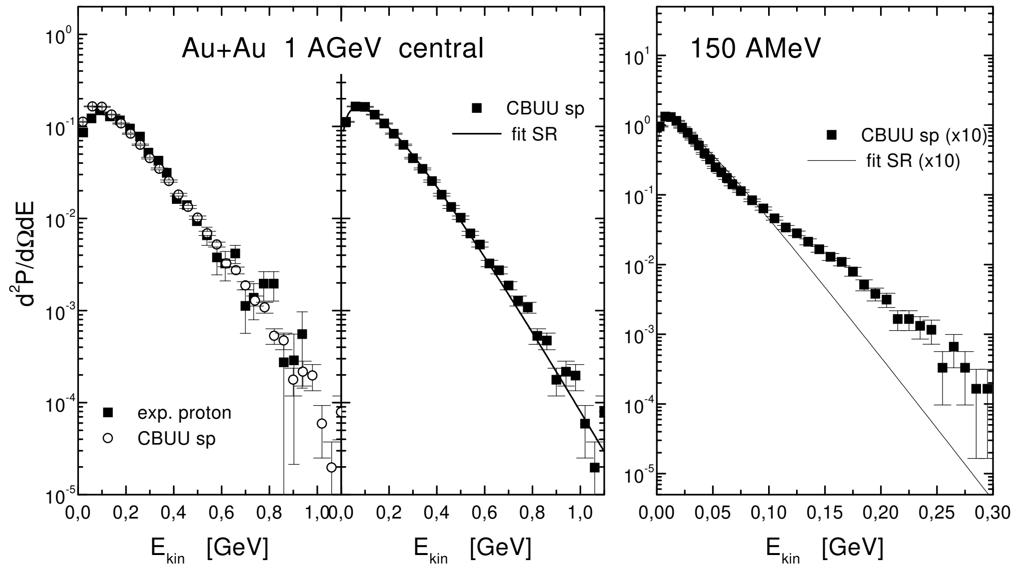


Abb. 7.2: Vergleich des transversalen Nukleonenspektrums des CBUU-Modells für eine zentrale Au+Au - Kollision bei 1 AGeV Einschußenergie mit dem gemessenen Protonenspektrum von Lisa et al. [88] (linkes Bild) und Vergleich des CBUU-Spektrums mit seinem Fit gemäß Gleichung (7.1) für diese Energie (mittleres Bild). Rechts: Vergleich des CBUU-Spektrums mit seinem Fit für 150 AMeV .

gefittet. In Gleichung (7.1) stehen die Abkürzungen γ für $(1-\beta^2)^{-1/2}$ und α für $\gamma\beta p/T$. Für verschwindenden Fluß $\beta \to 0$ ergibt sich aus Gleichung (7.1) mit $\gamma \to 1$, $\alpha \to 0$

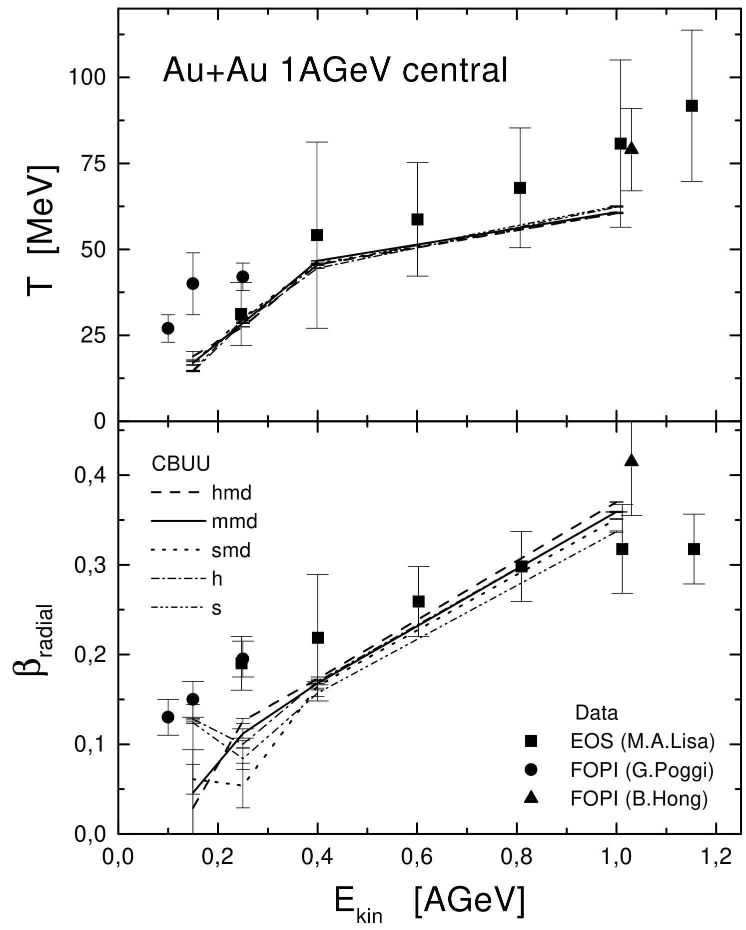


Abb. 7.3: Temperatur (oben) und Flußgeschwindigkeit (unten) der Teilchenspektren des CBUU-Modells im Vergleich zu den experimentellen Daten aus [88, 90, 91]. Die Symbole s, h, smd, mmd und hmd kennzeichnen verschiedene Zustandsgleichungen (**s**oft, **m**edium und **h**ard) ohne und mit impulsabhängigen Potentialen (md).

wieder die normale thermische Verteilung

$$\frac{d^3N}{dEd^2\Omega} \sim Ep \cdot e^{-\gamma E/T} \tag{7.2}$$

für ein transversales Teilchenspektrum. Die Qualität eines Fits mit Gleichung (7.1) an die CBUU-Spektren und die Übereinstimmung des theoretischen mit dem experimentell gemessenen Spektrum zeigt Abbildung 7.2.

Abbildung 7.3 zeigt die Ergebnisse aus den Spektrenfits für zentrale Au+Au - Kollisionen im Vergleich zu den experimentellen Daten aus [88, 90, 91]. Während die Temperatur tendentiell unterschätzt wird, ist die Flowgeschwindigkeit β für niedrige Energien zu klein und kreuzt die experimentellen Daten bei ca. 800 AMeV. Dieser unterschiedliche Verlauf vor allem der Flußgeschwindigkeit β kann ein Hinweis auf zu geringes Umsetzen der Einschußenergie in radiale Energie sein.

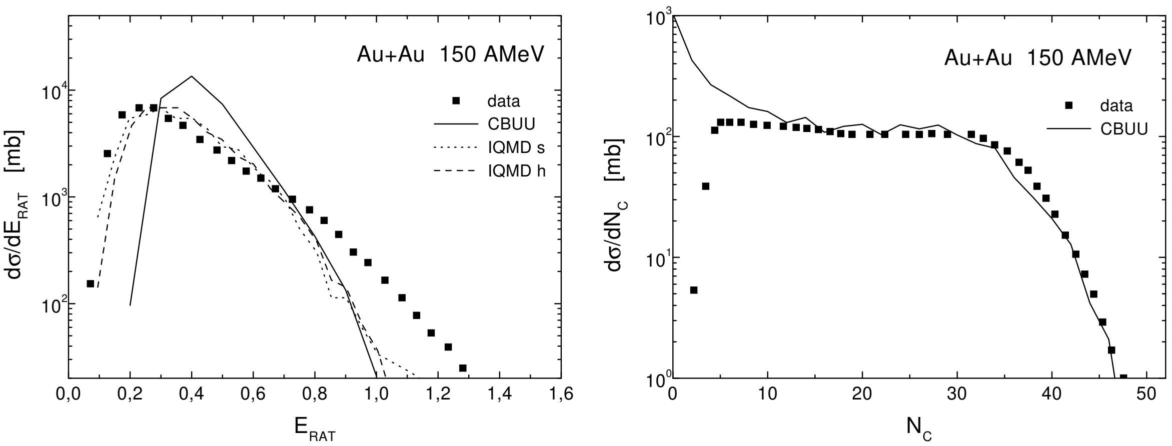


Abb. 7.4: Links: Vergleich der experimentellen (Punkte) und der mit dem CBUU-Modell errechneten (durchgezogene Linie) E_{RAT}-Verteilung für eine Au+Au - Kollision bei 150 AMeV Einschußenergie. Während für periphere Kollisionen (kleines E_{RAT}) das Stopping überschätzt wird, wird bei zentralen Kollisionen nur ein Bruchteil der experimentell nachgewiesenen transversalen Energie erzeugt. Dies gilt auch für das IQMD-Modell. IQMD-Rechnungen und Daten aus [60]. Rechts: Vergleich der experimentellen (Punkte) und der mit dem CBUU-Modell errechneten (durchgezogene Linie) Multiplizitätsverteilung für eine Au+Au - Kollision bei 150 AMeV Einschußenergie. CBUU-Verteilung wie in Kapitel 4 beschrieben ohne Berücksichtigung von Teilchen mit Kollisionszahl Null (Spektatoren). Daten aus [60].

Diese Umsetzung von Einschuß- in transversale Energie wird durch die Größe E_{RAT} (4.3) wiedergegeben. Ein Vergleich der E_{RAT}-Verteilung für eine Au+Au - Kollision bei 150 AMeV im CBUU-Modell mit der experimentell bestimmten zeigt Abbildung 7.4. Es ergibt sich in der Tat eine deutliche Abweichung von über einer Größenordnung bei zentralen Kollisionen. Dieses Defizit teilt das CBUU-Modell mit anderen Transportmodellen wie z. B. dem IQMD-Modell. Die zu geringen E_{RAT}-Werte sind dabei nicht auf eine möglicherweise zu geringe Zahl von Teilchen, die den Detektor erreichen, zurückzuführen, sondern ihre Energieverteilung. Dies zeigt die korrekte Wiedergabe der Multiplizitätsverteilung bei 150 AMeV, wie ebenfalls in Abbildung 7.4 dargestellt ist.

Um mehr transversalen Fluß bei niedrigen Energien zu erzeugen, wurde testweise der elastische Wirkungsquerschnitt verdoppelt und die Winkelverteilung als isotrop angenommen. Es zeigt sich, daß dies zwar zu mehr "Stopping" führt, die transversalen Spektren kaum aber beeinflußt. Auch steht eine Vergrößerung des Wirkungsquerschnittes im Widerspruch zu Rechnungen zur Balance-Energie in Schwerionenkollisionen [19, 20, 21, 22], die eine (dichteabhängige) Erniedrigung des elastischen Wirkungsquerschnittes favorisieren.

Eine Möglichkeit, die Diskrepanz im radialen Fluß zu erklären, ergibt sich aus der Tatsache, daß bei niedrigen Energien sehr viele Fragmente entstehen, für die eine Nachweisschwelle im Detektor existiert. Ein Wegfall niedriger Impulse führt jedoch zu einem im Mittel größeren Fluß. Zum anderen weisen die transversalen Spektren bei 150 und

250 AMeV starke nichtthermische Komponenten auf (vergleiche Abbildung 7.2 rechts), was zu den großen Fehlerbalken der Fits in Abbildung 7.3 bei diesen Energien führt. Dies deutet einen Zusammenbruch des Bildes einer thermischen Quelle an, das ohnehin durch die Ergebnisse zur Target/Projektil-Mischung aus Kapitel 4.4 nicht unterstützt wird.

7.2 Direkte Evaluierung

Unabhängig vom physikalischen Bild einer thermischen Quelle läßt sich im Rahmen einer Transportrechnung der radiale Fluß der Teilchen direkt bestimmen, indem man ihre Orts- und Impulskoordinaten in Beziehung setzt. In [92, 93] wurde eine direkte Berechnung der thermischen und der Flow-Energie gemäß

$$E_{therm} = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}\left(\sqrt{m_i^2+p_i^2}-m_i\right) - E_{flow} \tag{7.3}$$

mit

$$E_{flow} = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}\left(\sqrt{m_i^2+\frac{(\vec{r}_i\cdot\vec{p}_i)^2}{r_i^2}}-m_i\right) \tag{7.4}$$

vorgeschlagen. Sie hat den Vorteil, die Verwendung von Gleichung (7.1) zu vermeiden, da zur Generierung von Teilchenspektren mit genügender statistischer Genauigkeit eine große Anzahl von "Runs" erforderlich ist. Die Temperatur und die mittlere radiale Geschwindigkeit der Teilchen ergeben sich dann zu

$$T = \frac{2}{3}E_{therm} \tag{7.5}$$

und

$$\langle\beta_r\rangle = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A}\frac{(\vec{r}_i\cdot\vec{p}_i)^2}{E_i}\ . \tag{7.6}$$

Abbildung 7.5 zeigt einen Vergleich der Ergebnisse für β und T im CBUU-Modell, wenn zum einen Gleichung (7.1) und zum anderen die Gleichungen (7.4),(7.3) verwendet werden. Es ergeben sich erhebliche Differenzen. Der Flow ist ungefähr 0.15 c größer und überschätzt die experimentellen Daten durchweg. Die Temperatur ist fast um einen Faktor 5 geringer und ungefähr konstant, im Widerspruch zu den Daten.

Der Unterschied ergibt sich aus der kinematischen Situation: Während der Expansionsphase einer zentralen Kollision zeigen Teilchenimpuls und Ortsvektor zunehmend in die gleiche Richtung; mithin wird der durch Gleichung (7.4) beschriebene radiale Anteil der kinetischen Energie immer größer. Konsequenterweise sinkt die thermische Energie aus Gleichung (7.3). Da nun im CBUU-Modell das Reaktionsende dadurch definiert wird, daß die Teilchen anfangen, das Gitter, auf dem die Potentiale berechnet werden, zu verlassen, ist immer eine weitgehende Kollinearität von Ort und Impuls erreicht.

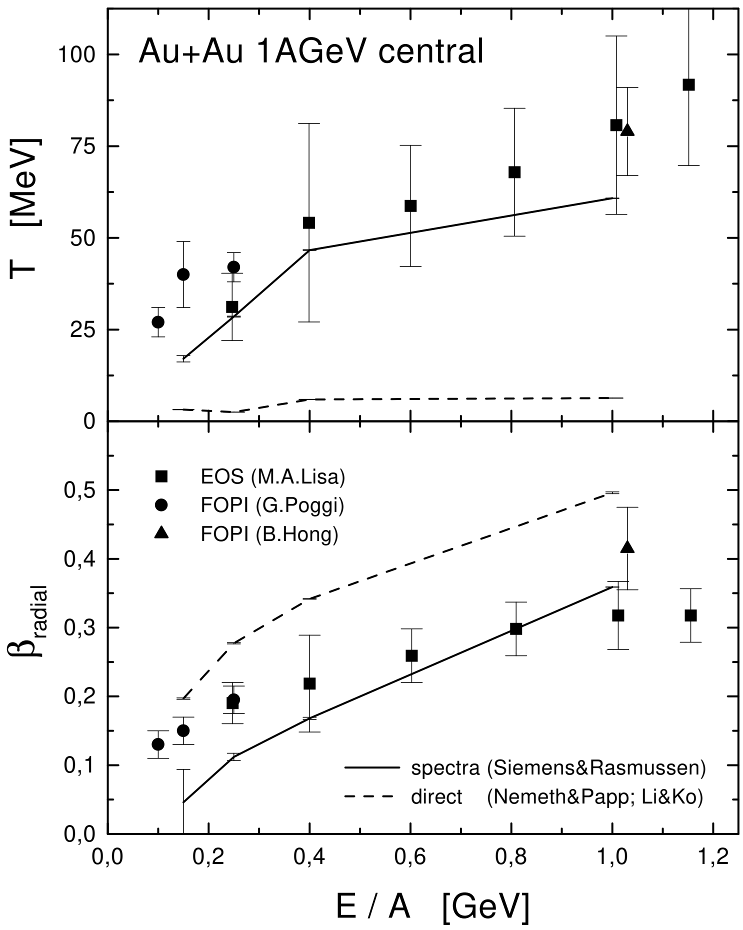


Abb. 7.5: Vergleich der Temperaturen (oben) und Flußgeschwindigkeiten (unten), die sich mit dem CBUU-Modell unter Verwendung der Gleichungn (7.1) (durchgezogene Linien) und (7.3),(7.4) (gestrichelte Linien) ergeben mit den Daten aus [88, 90, 91].

Die Zeitabhängigkeit der mit den Gleichungen (7.4),(7.3) gewonnenen Ergebnisse zeigt Abbildung 7.6. Zu t $\simeq$ 22.5 fm/c, also zu der Zeit, die in Kapitel 4 als Kollisionsende eingeführt wurde, ergeben sich etwa die gleichen Werte wie mit Gleichung (7.1). Im weiteren Verlauf steigt jedoch β nach Gleichung (7.3) stark an und T sinkt nach (7.4); während die Spektren nahezu gleichen Fluß und gleiche Temperatur aufweisen. Dies favorisiert die Spektrenfits als Wiedergabe der "wahren" kinematischen und thermischen Situation zum Zeitpunkt des hadronischen Ausfrierens.

Um einen Anhaltspunkt für die thermodynamische Temperatur des Systems zum Zeitpunkt t = 22.5 fm/c zu bekommen, wurde das Δ/N-Ratio ermittelt und in eine Temperatur umgerechnet. Dieses Vorgehen erscheint bei einer Au+Au - Kollision bei 1 AGeV gerechtfertigt, da für dieses System eine hohe Anzahl von Kollisionen vorliegt und zumindest zu einer Projektil/Target-Equilibrierung führt. T ergibt sich aus

$$\frac{N_\Delta}{N_N} = \frac{16}{4} \frac{\int dM\, f(M)\, M^{3/2}\, e^{-E(p,M)/T}}{m^{3/2}\, e^{-E(p)/T}}\,, \tag{7.7}$$

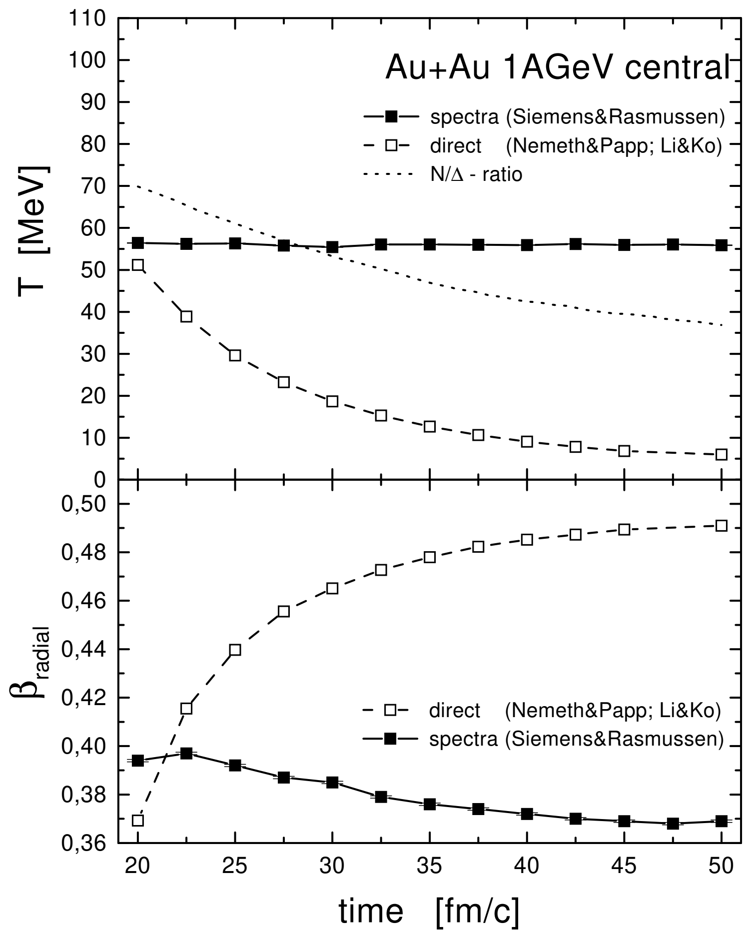


Abb. 7.6: Zeitliche Entwicklung der Temperaturen (oben) und Flußgeschwindigkeiten (unten) aus den Spektren (7.1) (durchgezogene Linien) und den Gleichungn (7.3),(7.4) (gestrichelte Linien) für eine zentrale Au+Au - Kollision im CBUU-Modell. Ebenfalls eingetragen: Temperatur aus dem Δ/N-Ratio Gleichung (7.7) (gepunktete Linie).

wobei m und M die Nukleonen- und die Δ-Masse bezeichnen, der Faktor 16/4 aus dem Spin-Isospin-Verhältnis kommt und

$$f(M) = \frac{2}{\pi} \frac{M^2\Gamma(M)}{(M^2 - M_R^2)^2 + M^2\Gamma^2(M)} \tag{7.8}$$

die Δ-Massenverteilung mit der impulsabhängigen Breite $\Gamma(M)$ ist. Die sich aus diesem Δ/N-Ratio ergebende Temperatur ist ebenfalls in Abbildung 7.6 eingezeichnet. Sie fällt – aufgrund der $\Delta \to N\pi$-Zerfälle in der Expansionsphase des Systems – ebenfalls mit der Zeit ab, ist aber insgesamt näher an der mit Gleichung (7.1) bestimmten Temperatur. Insofern kann man die Temperatur der Spektren als die "wahre" Temperatur zum hadronischen Ausfrierzeitpunkt des Systems betrachten.

Generell sollte zum Abschluß dieses Kapitels noch einmal klargestellt werden, daß der Begriff "Temperatur", der in den Gleichungen (7.1), (7.3) und (7.7) auftaucht, im

Grundsatz sehr unterschiedliche Dinge bezeichnet. Während in (7.1) T der Steigungsparameter der Spektren ist, stellt T in (7.3) eine Größe dar, die lediglich die Stärke der ungeordneten, nichtradialen Teilchenbewegung charakterisiert, und in (7.7) ist T ein Maß für die relative Population verschieden massiver baryonischer Zustände. Bei Vorliegen eines thermischen Gleichgewichtes ist T in (7.1) und (7.7) äquivalent zur thermodynamischen Temperatur, nicht jedoch das T aus (7.3). Daher ist eine Übereinstimmung der drei "Temperaturen" eher ein zufälliges Ergebnis, speziell, da in einer Schwerionenreaktion wahrscheinlich nur annähernd bei schweren Systemen ein thermisches Gleichgewicht erreicht wird.

Die Frage, ob ein thermisches Gleichgewicht in einer Schwerionenreaktion erreicht wird, ist gegenwärtig offen. Die experimentellen Daten lassen sich im allgemeinen gut mit dem Bild einer (expandierenden) thermischen Quelle beschreiben. Dies gilt sowohl für die Mesonen- und Nukleonenspektren wie auch für die Rapiditätsverteilungen in einem weiten Energiebereich von ca. 1 – 10 AGeV [59, 99]. Insbesondere scheint eine thermische Beschreibung auch für Mesonenverteilungen aus pp-Stößen oder Stößen sehr leichter Systeme zu gelten, die viel zu klein sind, um in der zur Verfügung stehenden Zeit zu equilibrieren. Dies wurde in dieser Arbeit in Kapitel 4.4 dargelegt. Ebenso zeigen Ergebnisse von RBUU-Rechnungen zur Asymmetrie des Drucks selbst im Zentrum einer Nb+Nb - Kollision bei 1 AGeV an, daß kein Gleichgewicht erreicht wird [100]. Andererseits erfaßt zumindest das vorliegende CBUU-Modell nicht alle Effekte, die zu einem Abstoppen und Equilibrieren eines Schwerionensystems führen, wie die wesentlich zu breite Proton-Rapiditätsverteilung einer Ni+Ni - Kollision bei 1.93 AGeV zeigt (Abbildung 5.14).

Kapitel 8

Fragmente

Messungen sowohl des transversalen wie auch des radialen Flusses ergaben, daß Fragmente mit den Massenzahlen A = 2,3,... im allgemeinen stärkere Flußsignale liefern als freie Protonen oder Neutronen. Dies erklärt man damit, daß diese schweren Teilchen weniger durch die thermische Bewegung beeinflußt sind. Insbesondere beim radialen Fluß sollte die kinetische Energie der Fragmente aufgrund der Kompression proportional zu ihrer Masse sein, während die kinetische Energie aufgrund der thermischen Bewegung für alle Teilchensorten gleich ist. In der Tat zeigt sich ein Anwachsen der gerichteten Bewegung mit der Fragmentmasse [1, 61].

Das CBUU-Modell ist nun, wie in Kapitel 2 dargelegt, ein reines Einteilchenmodell. Das bedeutet, daß Korrelationen zwischen den Nukleonen nicht wiedergegeben werden. Demzufolge können sich während der Kollision keine Nukleonen zu einem Fragment zusammenfinden oder mögliche, bereits in den ursprünglichen Kernen vorhandene Präfragmente "überleben". Während letztere sicher bei der – im Rahmen dieser Arbeit nicht untersuchten – Spektatorenfragmentation bei sehr peripheren Kollisionen und den damit verbundenen niedrigen Anregungsenergien der Spektatoren eine Rolle spielen, geht das CBUU-Konzept davon aus, daß Kollisionen ab etwa 100 AMeV im wesentlichen durch die Einteilchendynamik beschrieben werden können und Fragmente sich erst wieder in der hadronischen Ausfrierphase bilden.

Um die Gültigkeit dieses Ansatzes zu überprüfen, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Koaleszenzmodell entwickelt, das am Ende einer Schwerionenkollision Fragmente aus der zu diesem Zeitpunkt vorliegenden Einteilchenverteilung bildet. Für diese Fragmente wurde die Massenabhängigkeit des transversalen und radialen Flusses bestimmt und mit den experimentellen Daten verglichen. Es zeigte sich, daß das Verhalten dieser CBUU-Fragmente bei zentralen Ereignissen sehr gut mit dem experimentell ermittelten übereinstimmt. Bei semizentralen Kollisionen ergeben sich hingegen Abweichungen aus der Tatsache, daß im Experiment einige der angeregten Primärfragmente wieder zerfallen oder einzelne Nukleonen abdampfen und damit die Verteilung leichter Teilchen, vor allem der Protonen und Neutronen verändern; ein Effekt, den das Koaleszenzmodell nicht simulieren kann.

8.1 Das Koaleszenzmodell

In dem Koaleszenzmodell werden Fragmente gebildet, indem aus der CBUU-Einteilchenverteilung zum Zeitpunkt des Reaktionsendes willkürlich ein Teilchen ausgewählt wird und alle umgebenden Teilchen innerhalb eines Ortsraumradius R_0 und Impulsraumradius P_0 mit diesem zu einem Fragment mit der Massenzahl A zusammengefaßt werden. Dies geschieht separat in jedem der parallelen Runs, da so aufgrund der statistischen Dichteschwankungen eine größere Anzahl schwerer Fragmente entsteht. Das "Startnukleon" innerhalb eines jeden Ensembles kann individuell festgelegt werden, es zeigt sich aber, daß z. B. ein konsequenter Beginn mit dem Nukleon Nummer 1 keinen systematischen Unterschied gegenüber einem Beginn mit Nukleon Nummer x ergibt.

Die Koaleszenzparameter R_0 und P_0 werden – soweit verfügbar – an die experimentell gemessene Zahl der freien Nukleonen in einer zentralen Reaktion angepaßt. Der Impulsraumradius P_0 spielt dabei eine untergeordnete Rolle, da die CBUU-Testteilchenverteilung im allgemeinen erst nach 40 bis 50 fm/c an das Koaleszenzprogramm übergeben wird und zu diesem Zeitpunkt die Temperaturen bereits sehr niedrig liegen (vergleiche die Ergebnisse zu E_{therm} aus Gleichung (7.3) in Abbildung 7.6, Kapitel 7). P_0 wurde im folgenden daher konstant auf 250 MeV gesetzt, was ungefähr dem Fermiimpuls in einem leichten Kern entspricht. Justiert wurde der Ortsraumparameter R_0. Bei Reaktionen, für die keine Information über die Zahl der freien Nukleonen verfügbar war, wurde im Ortsraum als Standardwert der Radius R_0 angesetzt, der bei der Reaktion Au+Au mit 400 AMeV Einschußenergie die Zahl der freien $p + n$ reproduziert. Dies ist unproblematisch, da zwar die Massenverteilung der Fragmente direkt vom Koaleszenzradius abhängt, die Ergebnisse zum Fragmentflow jedoch im allgemeinen nur unwesentlich auf Änderungen der Radien reagieren.

8.1.1 IMF-Verteilungen und Erweiterung des Koaleszenzmodells

Am Beispiel einer zentralen Au+Au - Kollision bei 400 AMeV sollen hier Möglichkeiten und Grenzen dieses einfachen Koaleszenzmodells bei der Beschreibung der Multiplizitätsverteilung von *intermediate mass fragments* (IMF) aufgezeigt werden. Abbildung 8.1 zeigt die Ladungsverteilung, die sich mit dem einfachen Koaleszenzmodell ("simple") mit R_0=3.7 fm im Vergleich zu der experimentell gemessenen Verteilung ergibt. Deutlich ist ein zu starkes Abfallen der Koaleszenzverteilung zu hohen Ladungen hin erkennbar. Auch existieren unter den mit dem einfachen Modell gebildeten Clustern solche mit A=Z=3 und A=5 u.s.f., die keinem physikalischen Teilchen entsprechen.

Daher wurde versucht, das Koaleszenzmodell zu erweitern, indem nichtexistierende Teilchen von der Bildung ausgeschlossen werden. Die in einem ersten Durchgang mit dem einfachen Modell gebildeten Cluster werden mit einer Liste aller existierenden

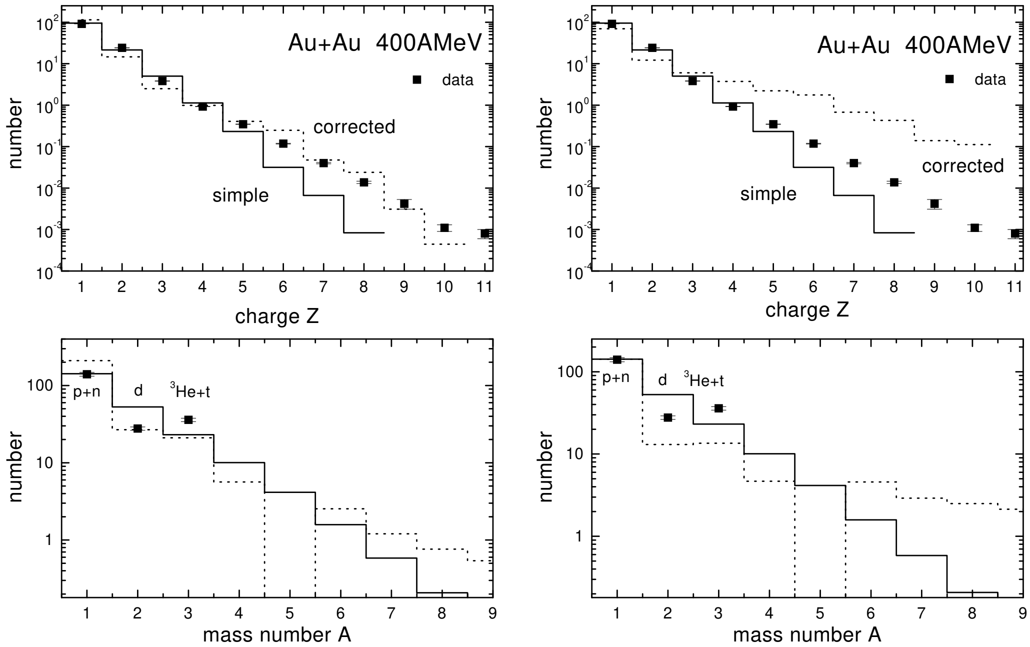


Abb. 8.1: Ergebnisse zu Ladungsverteilung (obere Zeile) und Massenverteilung (untere Zeile) von IMFs mit dem einfachen Koaleszenzmodell ("simple") und dem korrigierten ("corrected") wie im Text beschrieben im Vergleich zu den Daten aus [62]. Einfaches Modell in beiden Spalten mit R_0=3.7 fm, korrigiertes Modell mit R_0=5.5 fm in der linken Spalte und mit R_0=6.2 fm in der rechten Spalte.

leichten Elemente verglichen. Stimmt bei $N > Z$ die Protonenzahl mit der eines leichten Elementes überein, werden solange Neutronen "abgedampft", bis ein korrektes Ladungsverhältnis erreicht ist; analog wird im Fall $Z > N$ verfahren. Dieses Verfahren favorisiert jedoch die Entstehung von Elementen mit extremen Z/N-Verhältnis. In einem dritten Schritt werden daher alle Elemente auf ihr Isotopenverhältnis geprüft und gemäß ihrer Bindungsenergie entweder erhalten oder zerstört.

Die Resultate dieses erweiterten Modells ("corrected") sind ebenfalls in Abbildung 8.1 dargestellt. Im Bild links oben erkennt man, daß bei einem Koaleszenzradius von R_0=5.5 fm, der die Zahl der einfach geladenen Teilchen reproduziert, insgesamt die IMF-Ladungsverteilung besser wiedergegeben wird. Jedoch überschätzt das korrigierte Modell deutlich die Zahl der freien Protonen und Neutronen, wie Abbildung 8.1 im linken unteren Bild zeigt. Mit einem Koaleszenzradius von R_0=6.2 fm hingegen wird die Zahl der freien Protonen plus Neutronen reproduziert, wie im rechten unteren Bild gezeigt ist, nicht jedoch das Verhältnis von Protonen zu Deuteronen und ^{3}Helium/Tritonen. Darüberhinaus wird mit R_0=6.2 fm die Multiplizität schwerer IMFs deutlich überschätzt, vergleiche Abbildung 8.1 links oben.

Hingegen kann das einfache Modell sowohl die Zahl der einfach geladenen Teilchen wie auch die Zahl der freien Nukleonen annähernd wiedergeben. Auch liegen in diesem Modell die Verhältnisse $(n+p)/d$ und $Z = 1/Z = 2$ näher an den experimentellen Daten

	experimental data	model simple 3.7 fm (A,Z)	corr. 5.5 fm (Z)	corr. 6.2 fm (A)
$\frac{n+p}{d}$	5.1	2.7	7.6	10.9
$\frac{Z=1}{Z=2}$	3.8	4.5	7.9	5.7

Tab. 8.1: Verhältnis freier Nukleonen zu Deuteronen $(n+p)/d$ sowie Verhältnis einfach zu zweifach geladener Teilchen $Z = 1/Z = 2$ in einer 400 AMeV Au+Au - Kollision. Experimentelle Daten aus [62] im Vergleich zu den Werten des einfachen Koaleszenzmodells ("simple") und des korrigierten ("corr.") bei den Ortraumradien, die jeweils die Anzahl der freien Nukleonen bzw. die Zahl der freien Protonen reproduzieren.

als im korrigierten Modell, vergleiche Tabelle 8.1. Da im folgenden Teilchen mit A > 4 aufgrund ihrer geringen Anzahl ohnehin nicht zur Analyse beispielsweise der Teilchenspektren herangezogen werden konnten, wurde für alle weiteren Untersuchungen das einfache Koaleszenzmodell verwendet und dessen Abweichungen in der Ladungs- und Massenverteilung von den experimentellen Daten bei hohen Ladungswerten Z bzw. Massenzahlen A nicht weiter beachtet.

8.2 Fluß von Fragmenten

8.2.1 Radialer Fluß

Abbildung 8.2 zeigt die Spektren für Fragmente verschiedener Massen, die sich aus der Kombination des CBUU- und des Koaleszenzmodells ergeben, für eine Au+Au - Kollision bei 1 AGeV im Vergleich zu den experimentell aufgenommenen Teilchenspektren aus [88]. Die sich aus den Fits mit der Siemens-Rasmussen-Formel (7.1) an diese CBUU-Spektren ergebenden Flow- und Temperaturwerte sind in Abbildung 8.3, ebenfalls im Vergleich zu den Daten aus [88], dargestellt. Dabei zeigt sich, daß die Verwendung eines Koaleszenzmodells teilweise die Abweichung der CBUU-Ergebnisse von den experimentellen Daten für den radialen Fluß, die zumeist massengemittelt angegeben werden, korrigieren kann:

Die ursprünglichen, reinen Einteilchenspektren des CBUU-Modells ergaben für diese 1 AGeV Au+Au - Kollision einen etwas zu hohen Fluß und eine zu niedrige Temperatur, vergleiche Kapitel 7. Diese Werte sind in Abbildung 8.3 jeweils ganz links als "CBUU s.p." eingetragen. Mit Verwendung des Koaleszenzmodells ergibt sich für das A = 1 - Spektrum zwar ungefähr die gleiche Temperatur, aber ein deutlich höherer Fluß; die Werte liegen damit ungefähr auf denen des experimentell gemessenen Protonenspektrums, mit "exp. p only" bezeichnet. Mit zunehmender Masse nun fallen die CBUU- plus Koaleszenz - Spektren im radialen Fluß ab und nehmen in der Temperatur zu. Damit zeigen sie die gleiche Tendenz wie die experimentellen Spektren,

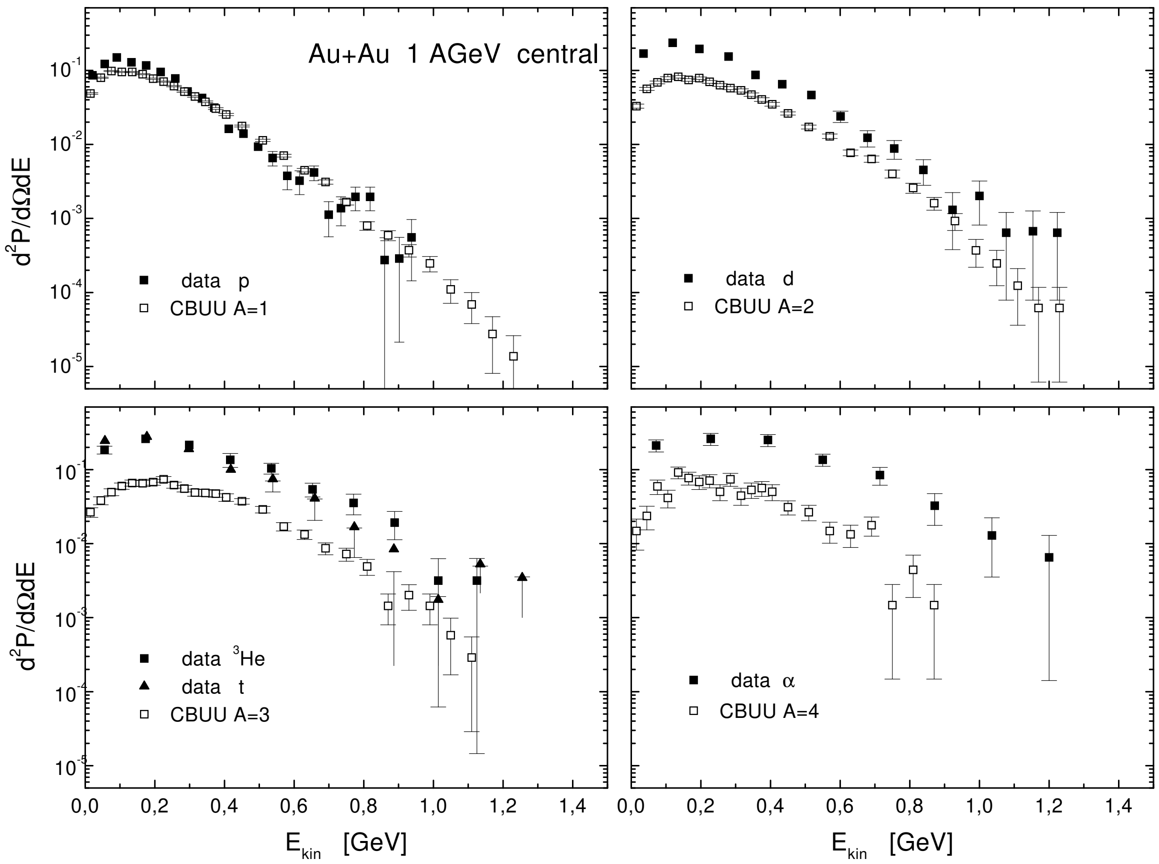


Abb. 8.2: Vergleich der CBUU- plus Koaleszenzmodell - Spektren für Fragmente der Massen A = 1, 2, 3 und 4 unter $\Theta_{\rm lab} = 90^o$ mit den experimentell gemessenen Proton-, Deuteron-, ^{3}He/Triton- und α-Spektren aus [88]. Der Unterschied in der absoluten Höhe der Spektren spiegelt die ungenügende Wiedergabe der Massenverteilung der Fragmente mit dem einfachen Koaleszenzmodell wieder.

deren massengemittelter Flußwert niedriger liegt als der Protonenfluß und die gemittelte Temperatur höher. Daraus kann man schließen, daß der wesentliche Aspekt der Fragmentbildung die Verminderung der ungeordneten thermischen Bewegung ist, die für leichte Teilchen im Verhältnis zur geordneten radialen Expansionsbewegung größer ist. Dies wird bestätigt durch die Berechnung einer massengemittelten radialen Flußenergie E_{flow} mit Gleichung (7.4), die höher ist als bei einer reinen Einteilchenrechung. Ermittelt man die radiale Flußenergie noch bei Vorliegen der Hochdichtephase, wenn die thermische Bewegung der Teilchen groß ist, dann ergibt sich insbesondere ein Effekt des Impulsraumcuts P_0, der dann das Maß der Reduktion der thermischen Bewegung ist. Eine besondere Fragmentdynamik in der frühen hadronischen Ausfrierphase des Systems scheidet somit aus.

Nach Abbildung 8.3 ergeben die verschiedenen Zustandsgleichungen der Kerne im Rahmen der Fehlerbalken die gleiche Abhängigkeit der radialen Flußwerte von der Fragmentmasse. Die Temperatur der Spektren unterscheidet hingegen zwischen ho-

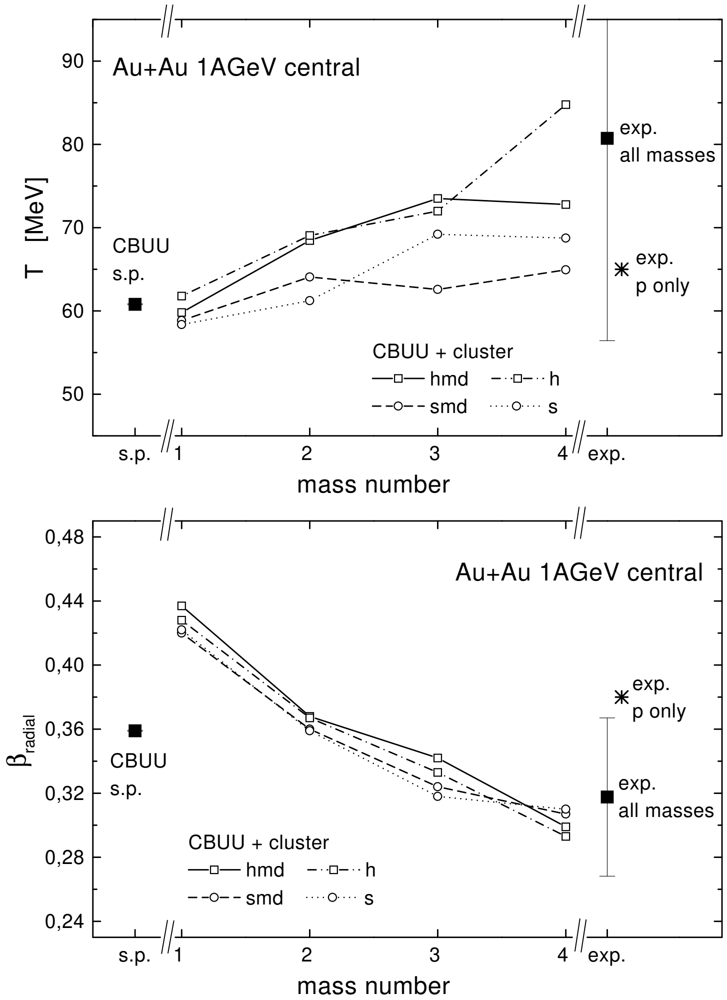


Abb. 8.3: Fragmentmassenabhängigkeit der Spektrenparameter T und β nach Gleichung (7.1) bei Verwendung des CBUU- und des Koaleszenzmodells. Ebenfalls eingezeichnet sind jeweils links die Ergebnisse des Fits an die CBUU-Einteilchenspektren ("CBUU s.p.") und rechts die der Fits an die experimentell gemessenen Protonen- ("exp. p only") und massengemittelten Spektren ("exp. all masses") [88].

her und niedriger Kompressibilität, nicht aber zwischen Berücksichtigung oder Vernachlässigung impulsabhängiger Kräfte. Verwendet man jedoch die direkte Berechnung der thermischen und der Flußenergie aus den Gleichungen (7.3) und (7.4), so ergibt sich bezüglich der Zustandsgleichungs-Abhängigkeit der Größen T und β ein anderes Bild. In Abbildung 8.4 zeigt sich eine Konstanz der thermischen Energie mit der Masse, unabhängig von K, und ein deutliche Differenzierung in der Flußenergie. Letztere favorisiert im Vergleich zu den Daten eine harte EoS, für die die Zunahme mit der Masse geringer ist. Dies kann man insofern verstehen, als bei Vorliegen einer weichen Zustandsgleichung im Verlauf der Kollision eine höhere zentrale Dichte aufgebaut wird, die zu einer stärkeren radialen Expansion führt, und umgekehrt. Hingegen ist wiederum auffällig, daß sich die Ergebnisse aus der Verwendung der Gleichungen (7.1) und (7.3),(7.4) qualitativ unterscheiden.

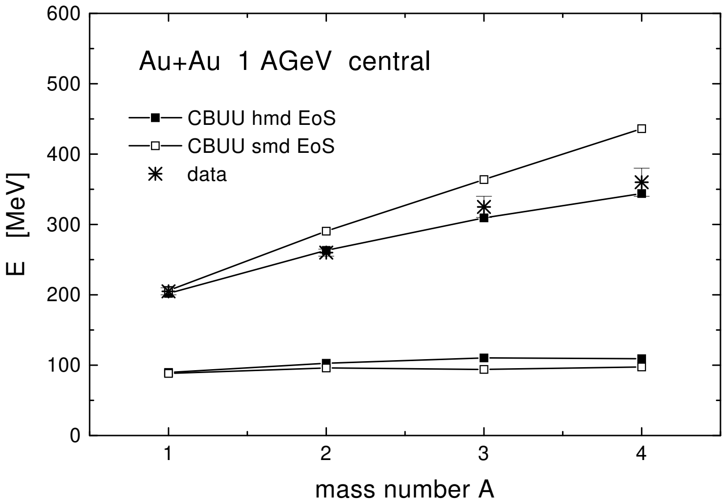


Abb. 8.4: Fragmentmassenabhängigkeit der Flowenergie E_{flow} nach Gleichung (7.4) bei Verwendung des CBUU- und des Koaleszenzmodells. Experimentelle Daten aus [88].

8.2.2 Transversaler Fluß

Analog zur Vorgehensweise in [61] wurde für die Untersuchung des transversalen Flusses der Fragmente anstatt des Flows F der transversale Flußwinkel

$$\Theta_S = \tan^{-1}\left(\frac{d\langle u_x\rangle}{du_z}\right) \tag{8.1}$$

mit u_x und u_z als der transversalen bzw. longitudinalen Geschwindigkeit der Teilchen betrachtet. Abbildung 8.5 zeigt die Rapiditäts- und Transversalimpulsverteilung dN/dy und dp_x/dy der mit dem Koaleszenzmodell gebildeten Fragmente für eine semizentrale Au+Au - Kollision bei 400 AMeV Einschußenergie. Die Anzahl schwerer Fragmente im Bereich mittlerer Rapiditäten ist klein, demzufolge sind die statistischen Schwankungen der Transversalimpulsverteilung um $y = 0$ groß. Daher wurde im folgenden lediglich die Abhängigkeit des transversalen Flusses von der Fragmentmasse untersucht, ohne nach den unterschiedlichen Ladungenzahlen der Fragmente zu differenzieren. Um mit den Daten zu $\Theta_S(Z)$ aus [61] vergleichen zu können, wurden die dort gegebenen Ladungszahlen Z mit der mittleren Massenzahl $\langle \mathrm{A_Z}\rangle$ für diese Ladung multipliziert [62] und so die Abhängigkeit des Flußwinkels von der Fragmentmasse A erhalten.

Abbildung 8.6 zeigt die CBUU- plus Koaleszenmodell - Ergebnisse für den transversalen Flußwinkel der Fragmente im Vergleich zu den umgerechneten Daten aus [61]. Für Massen A > 4 ist die Übereinstimmung sehr gut, zu niedrigen Massen hin zeigen die CBUU- plus Koaleszenz - Ergebnisse hingegen deutlich mehr Ablenkung der Teilchen in die Reaktionsebene an als die experimentellen Daten. Dies kann man dahingehend interpretieren, daß im Experiment die Phasenraumverteilung der Protonen aus dem Feuerball in hohem Maße durch Protonen aus dem Zerfall angeregter Fragmente überlagert ist. Erstere weist dabei annähernd die Impulsraumverteilung auf wie

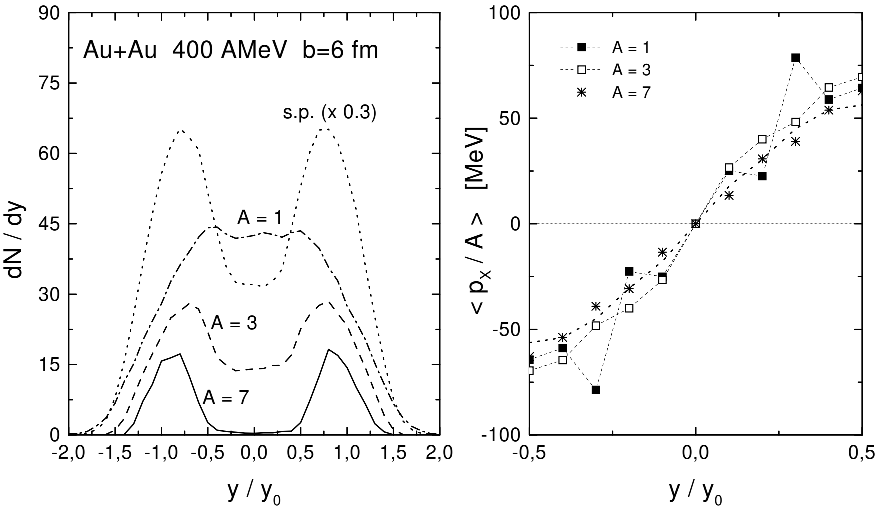


Abb. 8.5: Rapiditätsverteilung von Fragmenten verschiedener Masse, wie sich sich mit dem Koaleszenzmodell aus der CBUU-Einteilchenverteilung ergibt (linkes Bild), und Transversalimpulsverteilung dieser Fragmente im Bereich mittlerer Rapidität (rechtes Bild).

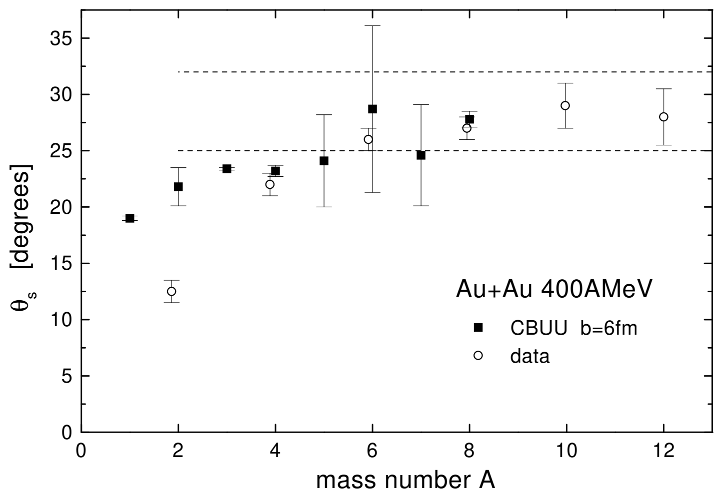


Abb. 8.6: Transversale Flußwinkel Θ_S für Fragmente verschiedener Massenzahl A bei Verwendung des CBUU- und des Koaleszenzmodells im Vergleich zu den experimentellen Daten aus [61]. Die horizontalen Linien deuten den Sättigungswert des Flußwinkels an.

die Fragmente, während letztere eine ungeordnete Bewegung verursacht. Es resultiert eine Abschwächung der Impulsraumverteilungs-Unterschiede und damit der Transversalimpulsverteilung. In der Simulation hingegen werden die Fragmente aus der Einteilchenverteilung gewonnen, Fragmente und übriggebliebene Protonen weisen damit die gleiche Transversalimpulsverteilung auf; ein Ergebnis, das bereits in [94] erhalten wurde. Die Zunahme des Flows mit der Masse in der Simulationsrechnung ist also nicht ein Effekt der Verminderung der thermischen Bewegung wie im Falle des radialen Flusses. Der hier wirkende Effekt ist vielmehr der, daß in der x-$z-$Ebene die Dichte der Testteilchen am höchsten ist, womit hier die meisten Fragmente entstehen, die dann konsequenterweise die größte Impulsprojektion auf eben diese Ebene haben. In einer Simulationsrechnung mit einem Einteilchenmodell in Verbindung mit einer Koaleszenzvorschrift ist der massengemittelte transversale Impuls gleich dem Einteilchenimpuls [94]. Den den experimentellen Ergebnissen zugrundeliegenden Zerfall angeregter Fragmente oder der Spektatoren kann das Koaleszenzmodell nicht beschreiben.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß die Anwendung eines Koaleszenzmodells im wesentlichen zur Beschreibung der Flußeigenschaften von IMFs ausreicht. Zentrale Kollisionen, bei denen praktisch alle Nukleonen an der Reaktion teilnehmen, lassen sich demzufolge sehr gut durch ein Einteilchenmodell beschreiben. Es existieren keine Korrelationen, die die Endverteilung der Nukleonen signifikant beeinflussen. Der wichtigste Effekt der Fragmentbildung ist die Verminderung der ungeordneten thermischen Bewegung der Teilchen. Bei semizentralen oder peripheren Kollisionen hingegen treten Effekte auf, die das Koaleszenzmodell nicht beschreiben kann. Dies ist insbesondere der Zerfall hochangeregter IMFs und die Fragmentation der Spektatoren.

Kapitel 9

Schlußbemerkungen

9.1 Zusammenfassung der Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit entstand in Zusammenarbeit mit Stefan Teis [3] und Martin Effenberger [4] eine wesentlich erweiterte Version des nichtrelativistischen BUU-Modells, CBUU. Sie ist Kapitel 2 beschrieben. Der Schwerpunkt lag dabei in dieser Arbeit auf der Parametrisierung und Realisierung eines impulsabhängigen Mittlere-Feld-Potentiales der Nukleonen. Als Grundlage dafür diente die von Welke et al. [6] vorgeschlagene Parametrisierung, da sie sich aus einer potentiellen Energiedichte ableiten läßt und so die Überprüfung der Energieerhaltung des Modells ermöglicht. Die Parameter des Potentiales wurden mikroskopischen Rechnungen von Wiringa [24] entnommen. Dies wurde einer Adaptierung der experimentell aus Nukleon-Kern-Streudaten gewonnenen Potentialparametrisierung von Hama et al. [25] vorgezogen, da diese nur für eine Dichte von ρ_0 angegeben ist. Die Verwendung der Wiringa-Rechnungen erlaubt hingegen die Überprüfung der Potentialparametrisierung aus [6] bei verschiedenen Kerndichten. Dies ist insbesondere für den Niederdichtebereich interessant, da sich das CBUU-Potential hier für alle Impulse als attraktiv erweist, was zu einer Verlangsamung der Expansionsgeschwindigkeit vor allem in zentralen Schwerionenkollisionen führt.

Weiterhin wird in Kapitel 2 die Frage der Implementierung, d. h. Wahl des Referenzsystems und Realisierung als skalares oder vektorielles Potential, sowie der numerischen Realisierung diskutiert. Darüberhinaus werden Effekte der Koppelung der parallelen Ensembles durch das Potential beschrieben und die Energie- und Drehimpulserhaltung des CBUU-Modells untersucht. Im Rahmen dessen wird der Einfluß von Modifikationen des Kollisionsterms, insbesondere einer Konstanthaltung der Reaktionsebene in den individuellen Teilchen-Teilchen-Kollisionen und der Wahl attraktiver oder repulsiver Streutrajektorien überprüft; die in [44] beschriebenen dramatischen Effekte jedoch nicht erhalten.

Es schließt sich in Kapitel 3 eine Überprüfung der Konsistenz des Nukleon-

Potentiales und des Kollisionsterms an. Dazu wird eine Dispersionsrelation hergeleitet, die für das Konzept klassischer Quasiteilchen brauchbar ist, da über die onshell-Energie integriert wird. Mit dieser Dispersionsrelation werden aus verschiedenen NN-Wirkungsquerschnitten reelle Potentiale berechnet und mit dem CBUU-Potential verglichen. Es zeigt sich, daß insbesondere die Struktur des totalen Wirkungsquerschnittes im Bereich der Pionenschwelle keine Entsprechung im reellen Nukleonenpotential findet, umgekehrt kann kein Wirkungsquerschnitt mit realistischem Verlauf aus dem CBUU-Potential abgeleitet werden. Jedoch kann gezeigt werden, daß das Ausmaß der Impulsabhängigkeit des CBUU-Potentials bei verschiedenen Dichten mit dem der dispersiv aus den Wirkungsquerschnitten berechneten Potentiale übereinstimmt. Dies bestätigt die Wahl der Wiringa-Rechnungen als Referenz, die eine wesentlich geringere Impulsabhängigkeit als die Hama-Parametrisierung aufweisen.

Die weiteren Kapitel sind der Untersuchung von Schwerionenkollisionen im SIS-Energiebereich mit dem CBUU-Modell gewidmet. Aufbauend auf der prinzipiellen Beschreibung des raum-zeitlichen Ablaufs einer Kern-Kern-Kollision wird in Kapitel 4 die Frage der Projektil/Target-Durchmischung bzw. Isospin-Equilibrierung in Abhängigkeit von der Systemgröße und der Einschußenergie untersucht. Darüberhinaus wird das Problem der experimentellen Meßbarkeit der gefundenen Effekte diskutiert. Es zeigt sich, daß im optimalen Fall experimentell annähernd die “wahre” Durchmischung von Projektil und Target ermittelbar ist und möglicherweise sogar getrennt Rückschlüsse auf die nukleare EoS und eine in-Medium-Modifikation des NN-Wirkungsquerschnittes gezogen werden können.

Kapitel 5 geht kurz die Eigenschaften des CBUU-Modells bei der Beschreibung der Mesonenproduktion in Schwerionenstößen ein. Es ergibt sich ein gewisses Defizit in der Wiedergabe der Pionenmultiplizität bei schweren Systemen, eine Eigenschaft, die das CBUU-Modell mit anderen Transportmodellen gemein hat. Die Mesonenspektren werden jedoch gut beschrieben, und insbesondere der Vergleich mit den Daten leichter Systeme zeigt, daß die Resonanzpopulation im CBUU-Modell richtig gehandhabt wird, ein Ergebnis, das für die Berechnung des transversalen Nukleonenflusses von Wichtigkeit ist.

Dieser wird in Kapitel 6 behandelt. Nach einer Überprüfung der Äquivalenz der experimentellen Selektion von Ereignissen in den Multiplizitätsbins M3 und M4 mit der Wahl von $b = 0.5\, b_{\max}$ als Stoßparamter in der Simulation wird der Flow F für die Systeme Ni+Ni und Au+Au berechnet. Im Falle des Ni+Ni - Systems können die experimentellen Daten mit einer mittelweichen impulsabhängigen EoS sehr gut beschrieben werden, für Au+Au wird hingegen eine harte EoS benötigt. Damit zeigen die Simulationsrechnungen nicht das experimentell beobachtete Skalierungsverhalten des Flows mit $A^{1/3}$. Dieses ist jedoch für den Kaskadenmodus ohne mittlere Felder noch gegeben. Daraus kann man die Forderung nach einem im Bereich niedriger Teilchenimpulse repulsiveren Potential ableiten. Zu hohen Energien hin deuten die experimentellen Daten einen Abfall des Flows an. Dies wurde zusammen mit Pradip Sahu [78] im Rahmen des relativistischen BUU-Modells, RBUU, untersucht. Die dort festgestellte Sensitivität von F auf einen Cutoff für die Potentiale, der für ein Verschwinden des Schrödinger-äquivalenten Potentials oberhalb von $E = 2.5$ GeV sorgt, kann beim CBUU-Modell jedoch nicht beobachtet werden. Ein Grund dafür ergibt sich aus dem beim CBUU-Modell nicht vorhandenen Wechselspiel zwischen repulsivem Vektor- und attraktivem Skalarpotential, ein anderer aus dem Einschluß der schweren Resonanzen oberhalb des $\Delta(1232)$ im CBUU-Modell. Diese massiven Resonanzen, obwohl im Verlauf einer Kollision nur im Prozentbereich vertreten, bewirken bei Energien um 2 AGeV eine deutliche Zunahme des transversalen Flusses, wie im Detail nachgewiesen wurde.

Der radiale Fluß in sehr zentralen Schwerionenkollisionen wird in Kapitel 7 behandelt. Das CBUU-Modell ist in der Lage, die Daten qualitativ zu beschreiben, doch ergeben sich durchweg zu niedrige Werte für die Temperatur der Nukleonenspektren und bei niedrigen Einschußenergien ein zu geringer Fluß. Die Ursache dafür liegt in einer zu geringen Umsetzung der longitudinalen Einschußenergie in transversale Energie, wie ein Vergleich der berechneten mit der experimentell gemessenen E_{RAT}-Verteilung zeigt. Wieder ist dies eine generelle Eigenschaft der Transportmodelle, die nur bei Annahme eines wesentlich größeren elastischen Wirkungsquerschnittes ansatzweise korrigiert werden kann. Beim Vergleich der CBUU-Ergebnisse mit denen anderer Modelle wurde darüberhinaus eine deutliche Abhängigkeit der Ergebnisse zum radialen Fluß vom angewandten Berechnungsverfahren festgestellt. Die numerisch wesentlich einfacher zu handhabende direkte Evaluierung der radialen Flußenergie wie in [92, 93] ergibt deutlich höhere Flow-Werte, hängt jedoch stark vom Zeitpunkt der Berechnung ab.

Experimentell bekannt ist, daß man an Fragmenten deutlichere Flußsignale beobachten kann. Da das CBUU-Modell ein reines Einteilchenmodell ist, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Koaleszenzmodell entwickelt, das aus der Nukleonenverteilung des CBUU-Modells am Ende einer Schwerionenkollision Fragmente erzeugt. Es wird in Kapitel 8 vorgestellt und seine Möglichkeiten und Grenzen bei der Beschreibung der Multiplizitätsverteilung von *intermediate mass fragments* aufgezeigt. Es folgt eine Untersuchung der radialen und transversalen Flußsignale der mit diesem Modell gewonnenen Fragmente. Insbesondere die CBUU-Ergebnisse zum radialen Fluß werden bei Nachschaltung des Koaleszenzmodells in Richtung der experimentellen Daten verschoben. Beim transversalen Fluß hingegen stimmen die Ergebnisse für die Fragmente gut mit den Daten überein, die verbleibenden Nukleonen des CBUU-Modells zeigen dagegen im Wesentlichen das Flußverhalten der Fragmente, ein Widerspruch zu den experimentellen Ergebnissen.

9.2 Vergleich mit vorangegangenen Arbeiten

Wesentliche neue Aspekte der Dynamik einer Schwerionenkollision wurden in der vorliegenden Arbeit dadurch beleuchtet, daß in ihr in einem konsistenten Modell systematisch die an der GSI und am LBL vermessenen Systeme untersucht wurden. Die Konsistenz der Beschreibung ist insofern wichtig, als sich in der vorliegenden Arbeit zeigt, daß einzelne Größen aus verschiedenen Themenbereichen miteinander korrelieren. So ist beispielsweise das Abstoppen der Kerne mit der Pionenmultiplizität der Reaktion über den inelastischen Wirkungsquerschnitt verknüpft. Ein Versuch einer ähnlich konsistenten Beschreibung aller relevanten Größen in einer Schwerionenkollision mit einem einzigen Modell wurde bisher nur in [64] unternommen, wobei der Schwerpunkt dort im Bereich höherer Energien bis hin zu RHIC-Energien lag.

Der thematische Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit ist der Fluß von Nukleonen und Fragmenten und seine Abhängigkeit von den Wirkungsquerschnitten und dem Mittlere-Feld-Potential. Dies wurde bereits in früheren Arbeiten untersucht. So wurde der Einfluß der Impulsabhängigkeit eines nichtrelativistischen Nukleonenpotentials auf die Dynamik einer Schwerionenkollision bereits 1987 in [34] skizziert (GBD-Parametrisierung), ohne daß jedoch die berechneten Observablen mit experimentell gemessenen verglichen wurden. 1988 wurde in [6] eine alternative Parametrisierung der Impulsabhängigkeit entwickelt (MDYI) und speziell die Differenzen dieser zu GBD für ruhende Kernmaterie und unter idealisierten Impulsraumkonfigurationen, wie sie ähnlich zu Beginn einer Schwerionenkollision vorliegen, untersucht. Es zeigten sich dabei erhebliche Differenzen in den berechneten Potentialen um bis zu einen Faktor Zwei.

Diese Problematik wurde 1990 in [35] wieder aufgegriffen, wobei nun die GBD- und die MDYI-Parametrisierung in einem ersten Schritt mit den von Wiringa [24] berechneten Einteilchenpotentialen verglichen wurde. Dies favorisierte MDYI, mit der dann in einem zweiten Schritt erstmals Transversalimpulsverteilungen berechnet wurden, die mit dem Experiment verglichen wurden. Trotzdem sind die Ergebnisse aus [35] nicht schlüssig, da hier Potentiale verwendet wurden, die zu unterschiedlichen Sättigungseigenschaften Nuklearer Materie führen. Der Vergleich zwischen GBD und MDYI wurde daher 1994 in [36] wiederholt. Dazu wurden die Parameter der Potentiale readjustiert, um gleiche Eigenschaften in normal dichter, kalter Kernmaterie zu erhalten. Mit diesen neuen Parametrisierungen, NGBD und NMDYI, wurden dann für ein Ar+Pb - System experimentell vermessene Observablen, Transversalimpulsverteilungen und Flow, berechnet. Die beste Übereinstimmung ergab sich mit dem NMDYI-Potential.

Der Schwachpunkt der Untersuchung [36] liegt darin, daß der Einfluß der NN-Kollisionen nicht systematisch berücksichtigt wurde, obwohl z. B. der Einfluß der von [44] vorgeschlagenen Beschränkung der Streutrajektorien auf repulsive Orbits untersucht wurde und zu einem Effekt führte. Darüberhinaus ist nicht klar, inwieweit der für die Ar+Pb - Schwerionenreaktion gewählte Stoßparameter mit dem experimentellen übereinstimmt; eine Verschiebung zu peripehereren oder zentraleren Werten beeinflußt die Transversalimpulsverteilung erheblich. In der vorliegenden Arbeit wurden daher möglichst viele Meßgrößen, wie die Multiplizitätsverteilung, an der die Wahl des Stoßparameters festgemacht wurde, *und* die Transversalimpulsverteilung bzw. der Flow berechnet. Analog wurde das Stopping über den NN-Reaktionswirkungsquerschnitt und die Mesonenmultiplizität zueinander in Beziehung gesetzt, u.s.f.. Erstmals erfolgten auch Untersuchungen zum Systemmassenscaling des Flows ($\sim A^{1/3}$) bei Verwendung einer nichtrelativistischen Potentialparametrisierung und seiner Abhängigkeit von der EOS.

Die letzten beiden Punkte wurden in einem relativistischen Transportmodell, RBUU, 1990 von Koch [85] unter anderem ebenfalls untersucht. Ebenso wurde dort die Produktion von – allerdings nur leichten – Fragmenten in einer Schwerionenkollision mit einem Koaleszenzmodell simuliert und die Massenabhängigkeit des transversalen Flusses von der Fragmentmasse im Vergleich zu Plastic-Ball - Daten beschrieben. Die Ergebnisse aus [85] konnten in der vorliegenden Arbeit weitgehend bestätigt werden. So tritt in beiden Modellen bei leichten Systemen zuviel und bei schweren zuwenig Flow auf; eine Reproduktion des Systemmassenscalings ist nur bei Verwendung verschiedener EOS, einer weichen für leichte Systeme und einer harten für schwere Systeme, möglich. Die Zunahme des Transversalen Flusses mit der Fragmentmasse ist in beiden Arbeiten ein trivialer Effekt der Einteilchendichteverteilung im Phasenraum, die durch das Koaleszenzprinzip zu einer entsprechend bevorzugten Bildung von Fragmenten in Flußrichtung führt. Interessant ist in diesem Zusammenhang jedoch, daß in dieser Arbeit gezeigt werden konnte, daß die Zunahme des radialen Flusses mit der Fragmentmasse anderen Ursprungs ist: Hier spielt die Verminderung der ungeordneten thermischen Bewegung der Teilchen durch die Koaleszenz die dominierende Rolle.

Die mit der Frage des Stopping verknüpfte Equilibrierung von Target und Projektil wurde in [64] kürzlich ebenfalls angesprochen. Das dort verwendete System, Ca+Cr, ist nach den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit jedoch weitaus zu klein, um selbst eine Isospinequilibrierung zu erreichen. Dennoch wurden die Energieabhängigkeit der "Transparenz" der Kerne, die zunehmende Repulsion bei zunehmender Einschußenergie, bestätigt. Aufgrund der Größe des Systems konnte eine wesentliche Änderung der Rapiditätsverteilungen von Target und Projektil jedoch nur bei einer Änderung des NN-Wirkungsquerschnittes um einen Faktor fünf erreicht werden. Die thermische Equilibrierung eines Schwerionensystems im Laufe der Reaktion wurde in [100] untersucht. Dort wurde für eine Nb+Nb - Kollision bei 1 AGeV die Asymmetrie des Druckes im Zentrum der Kollisionszone berechnet und gefunden, daß dieses System nicht zu einer isotropen Impulsverteilung kommt. Dies deckt sich mit den Erkenntnissen aus dieser Arbeit, in der für das vergleichbare Ru+Zr - System bei dieser Energie nicht einmal eine annähernde Projektil/Target-Durchmischung erreicht wurde.

9.3 Ausblick

Insgesamt kann man festhalten, daß das CBUU-Modell ein "state-of-the-art" - Transportmodell darstellt, das in vielen Bereichen – Mesonenproduktion in Schwerionenkollisionen [3], Photoproduktion von Mesonen und Photoabsorption [4], Dileptonenproduktion [42] und nun Flußsignalen von Nukleonen in Schwerionenkollisionen – getestet ist und sehr gute Ergebnisse liefert. Die verbleibenden Defizite, die in dieser Arbeit angesprochen werden, sind auch in anderen Transportmodellen vorhanden und legen eine Überprüfung grundlegender Annahmen wie die Beschränkung auf binäre Kollisionen und die Verwendung des Resonanzmodells auch bei sehr breiten ($\Gamma = 300$ MeV $\Rightarrow \tau < 1$ fm/c) und schweren Resonanzen nahe.

In diesem Sinne stellt eine kürzlich in Angriff genommene Modifikation des CBUU-

Modells, die Einbeziehung des LUND String-Modells [87], einen vielversprechenden Ansatz dar [86]. Eine interessante Erweiterung dürfte auch die getrennte Parametrisierung eines Protonen- und Neutronen-Mittlere-Feldes sein, das dann unter Umständen auch unterschiedliche Impulsabhängigkeiten aufweisen kann. Dies geht weit über die Parametrisierung eines nur dichteabhängigen Asymmetriepotentials hinaus und erlaubt, zusammen mit separat parametrisierten elastischen pp- und pn-Wirkungsquerschnitten, die getrennte Betrachtung von Protonen- und Neutronenflüssen nicht nur im Balance-Energie-Bereich, sondern auch im SIS- und LBL-Energiebereich (siehe z. B. [101]).

Danksagung

An erster Stelle möchte ich Herrn Professor Dr. Ulrich Mosel für die Aufnahme in sein Institut und die interessante Themenstellung danken. Herrn Professor Dr. Dr. Wolfgang Cassing gilt mein Dank für die zahlreichen Diskussionen inhaltlicher Art, seine vielfältigen Anregungen zu dieser Arbeit und sein stetes Interesse an ihrem Fortgang.

Insbesondere meinem langjährigen Zimmergenossen Dr. Carsten Greiner danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre, seine Hilfe und viele anregende Diskussionen über alle Gebiete der Physik, die in mir die Begeisterung für dieses Fach wachgehalten bzw. nach einem vorübergehenden Tief wiedererweckt haben. Dasselbe gilt für Dr. Stefan Leupold, auf dessen Geduld, mathematische Fähigkeiten und physikalisches Verständnis ich stets zurückgreifen konnte.

Meinem "Mitdoktoranden" Stefan Teis sowie Martin Effenberger verdanke ich große Teile des Transportprogramms, auf dem diese Arbeit beruht. Alle Mitglieder des Institutes für Theoretische Physik haben durch ihre Persönlichkeit für ein sehr angenehmes Arbeitklima gesorgt und damit wesentlich zum Gelingen beigetragen. Dies gilt insbesondere für Thomas Feuster und Wolfram Peters, mit denen mich immer noch eine private Freundschaft verbindet. Elke Jung und Christiane Pausch haben mir darüberhinaus mit administrativer und bibliothekarischer Hilfe häufig und gerne die tägliche Arbeit erleichtert.

Der größte Dank gilt jedoch meiner Mutter, ohne deren finanzielle und ideelle Unterstützung ich nicht hätte promovieren können. Dies gilt speziell für die Zeitspanne als Stipendiat des Hessischen Graduiertenkollegs.

Allen meinen Bekannten und Freunden danke ich für ihr Verständnis und ihre Geduld, mit der sie fachliche Monologe meinerseits und den Physiker-typischen Humor ausgehalten haben. Stellvertretend möchte ich hier vor allem Silke Kammer, Anja Dix und Ulrich Tschesche erwähnen, die mich immer wieder daran erinnert haben, daß es auch ein Leben außerhalb der Physik gibt.

Literaturverzeichnis

[1] S.C. Jeong et al., Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 3468.

[2] R. Stock, Erice 1985 proceedings (1985) 455; GSI 85-39.

[3] S. Teis, Dissertationsarbeit 1996, Institut für Theoretische Physik, Gießen.

[4] M. Effenberger, Diplomarbeit 1996, Institut für Theoretische Physik, Gießen.

[5] J. Cugnon, T. Mizutani and J. Vandermeulen, Nucl. Phys. **A352** (1981) 505.

[6] G.M. Welke, M. Prakash, T.T.S. Kuo, S. Das Gupta and C. Gale, Phys. Rev. **C38** (1988) 2101.

[7] W. Cassing und U. Mosel, Prog. Nucl. Part. Phys. **25** (1990) 235.

[8] G. F. Bertsch and S. Das Gupta, Phys. Rep. **160** (1988) 189.

[9] W. Cassing, V. Metag, U. Mosel and K. Niita, Phys. Rep. **188** (1990) 363.

[10] H. Stöcker and W. Greiner, Phys. Rep. **137** (1986) 227.

[11] T. Mayer-Kuckuk, *Kernphysik*, Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1984.

[12] R. Balian, *From Microphysics to Macrophysics*, Vol. 1, Springer-Verlag 1991

[13] W. Cassing und S.J. Wang, Z. Phys. **A328** (1987) 423.

[14] W. Cassing, K. Niita und S.J. Wang, Z. Phys. **A331** (1987) 439.

[15] A. Fässler, Nucl. Phys. **A495** (1989) 103c.

[16] L. Alvarez-Ruso, P. Fernandez de Cordoba and E. Oset, Nucl. Phys. **A606** (1996) 407.

[17] G.Q. Li and R. Machleidt, Phys. Rev. **C48** (1993) 1702.

[18] C. Fuchs, T. Waindzoch, D.S. Kosov and A. Fässler, Phys. Rev. **C58** (1998) 2022.

[19] D. Klakow, G. Welke and W. Bauer, Phys. Rev. **C48** (1993) 1982.

[20] G.D. Westfall et al., Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 1986

[21] C.A. Ogilvie et al., Phys. Rev. **C42** (1990) R10.

[22] F. Daffin and W. Bauer, MSUCL-1111, nucl-th/9809024

[23] R.B. Wiringa, V. Fiks and A. Fabrocini, Phys. Rev. **C38** (1988) 1010.

[24] R.B. Wiringa, Phys. Rev. **C38** (1988) 2967.

[25] S. Hama, B.C. Clark, E.D. Cooper, H.S. Sherif and R.L. Mercer, Phys. Rev. **C41** (1990) 2737.

[26] Review of Particle Properties, Phys. Rev. **D50** (1994).

[27] J.H. Koch, E.J. Moniz und N. Ohtsuka, Ann. Phys. **154** (1084) 99.

[28] A. Engel, Dissertationsarbeit 1993, Institut für Theoretische Physik, Gießen.

[29] B. Krusche et al., Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 3736.

[30] G.F. Bertsch, H. Kruse and S. Das Gupta, Phys. Rev. **C29** (1984) 673.

[31] R. Stock, Nucl. Phys. **A434** (1985) 537c.

[32] K. Weber, B. Blättel, W. Cassing, H.-C. Dönges, A. Lang, T. Maruyama and U. Mosel, Nucl. Phys. **A552** (1993) 571.

[33] G.E. Brown, Z. Phys. **C38** (1988) 291.

[34] C. Gale, G. Bertsch and S. Das Gupta, Phys. Rev. **C35** (1987) 1666.

[35] C. Gale, G.M. Welke, M. Prakash, S.J. Lee and S. Das Gupta, Phys. Rev. **C41** (1990) 1545.

[36] J. Zhang, S. Das Gupta and C. Gale, Phys. Rev. **C50** (1994) 1617.

[37] C. Mahaux and R. Sartor, Adv. Nucl. Phys. **20** (1991) 1.

[38] C. Mahaux and G.R. Satchler, Nucl. Phys. **A560** (1993) 5.

[39] C. Hartnack, R.K. Puri, J. Aichelin, S.A. Bass, H. Stöcker and W. Greiner, Eur. Phys. J. **A1** (1998) 151.

[40] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky und W.T. Veterling, *Numerical recipies in Pascal*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[41] H. Lenske, private Mitteilung.

[42] T. Weidmann, Diplomarbeit 1997, Institut für Theoretische Physik, Gießen.

[43] C. Gale and S. Das Gupta, Phys. Rev. **C42** (1990) 1577.

[44] D.E. Kahana, D. Keane, Y. Pang, T. Schlagel and S. Wang, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 4404.

[45] T. Kodama et al., Phys. Rev. **C29** (1984) 2146.

[46] C. Mahaux, H. Ngô and G.R. Satchler, Nucl. Phys. **A449** (1986) 354.

[47] P. Fernandez de Cordoba and E. Oset, Phys. Rev. **C46** (1992) 1697.

[48] M. Kleinmann, R. Fritz, H. Müther and A. Ramos, Nucl. Phys. **A560** (1993) 5.

[49] J. Joachain, *Quantum Collision theory*, North-Holland 1975.

[50] A. Klein and C. Zemach, Ann. Phys. **7** (1959) 440.

[51] C. Mahaux, K.T.R. Davies and G.R. Satchler, Phys. Rep. **224** (1993) 237.

[52] J. Cugnon, D. L'Hôte und J. Vandermeulen, Nucl. Instr. Meth. **B111** (1996) 215.

[53] Baldini, Flamino, Moorhead, Morrison, *Landolt-Börnstein*, Band 12, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[54] Y. Leifels et al., GSI-Report 1/98 (1998) 57.

[55] J. Gosset et al., Phys. Rev. **C16** (1977) 629.

[56] B. Waldhauser, Diplomarbeit 1986, FB Physik, Johann Wolfgang Goethe - Universität, Frankfurt.

[57] H.G. Baumgardt, J.U. Schott, Y. Sakamoto, E. Schopper, H. Stöcker, J. Hofmann, W. Scheid und W. Greiner, Z. Phys. **A273** (1975) 359.

[58] J. Hofmann, W. Scheid und W. Greiner, Nuovo cimento **33A** (1976) 343.

[59] N. Herrmann, Nucl. Phys. **A610** (1996) 49c.

[60] T. Wienold Dissertationsarbeit 1993, Gesellschaft für Schwerionenforschung mbH, Darmstadt.

[61] W. Reisdorf und H.G. Ritter, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **47** (1997) 1.

[62] W. Reisdorf, private Mitteilung.

[63] W. Reisdorf et al., Nucl. Phys. **A612** (1997) 493.

[64] S. Bass et al., Prog. Part. Nucl. Phys. **41** (1998) 225.

[65] D. Pelte et al., Z. Phys. **A357** (1997) 215.

[66] C. Müntz et al., Z. Phys. **A352** (1995) 175.

[67] R. Averbeck et al., Z. Phys. **A359** (1997) 65.

[68] M. Appenheimer et al., GSI Jahresbericht 1996, 58.

[69] J.W. Harris, R. Bock, R. Brockmann et al., Phys. Lett. **B153** (1985) 377.

[70] P. Senger, in: *Multiparticle Carrelations and Nuclear Reactions*, ed. by J. Aichelin and D. Ardouin, World scientific Publ. Co. (1994) 285.

[71] R. Averbeck et al., nucl-ex/9803001.

[72] W. Cassing, private Mitteilung.

[73] Landolt-Börnstein, *πN Scattering, Tables of Data*, Band 9/b1, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[74] W. Ehehalt and W. Cassing, Nucl. Phys. **A602** (1996) 449.

[75] K.G.R. Doss et al., Phys. Rev. **C32** (1985) 116.

[76] B. Blättel, V. Koch, A. Lang, K. Weber, W. Cassing and U. Mosel, Phys. Rev. **C43** (1991) 2728.

[77] J. Ritman, private Mitteilung.

[78] P.K. Sahu, A. Hombach, W. Cassing, M. Effenberger and U. Mosel, Nucl. Phys. **A640** (1998) 493.

[79] C.M. Ko, Q. Li and R. Wang, Phys. Rev. **C39** (1987) 1084.

[80] K. Weber, B. Blättel, W. Cassing, H.-C. Dönges, V. Koch, A. Lang and U. Mosel, Nucl. Phys. **A539** (1992) 713.

[81] B. Blättel, V. Koch and U. Mosel, Rep. Prog. Phys. **56** (1993) 1.

[82] T. Maruyama, W. Cassing, U. Mosel, S. Teis and K. Weber, Nucl. Phys. **A573** (1994) 653.

[83] D. H. Rischke, Nucl. Phys. **A610** (1996) 88c.

[84] L. A. Winckelmann et al., Nucl. Phys. **A610** (1996) 116c.

[85] V. Koch, Dissertationsarbeit 1990, Institut für Theoretische Physik, Gießen.

[86] M. Effenberger, private Mitteilung.

[87] B. Nilsson-Almqvist and E. Stenlund, Comp. Phys. Comm. **43** (1987) 387; B. Anderson, G. Gustafson and Hong Pi, Z. Phys. **Cq57** (1993) 485.

[88] M.A. Lisa et al., Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 2662.

[89] P.J. Siemens and J.O. Rasmussen, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 880.

[90] G. Poggi et al., Nucl. Phys. **A586** (1995) 755.

[91] B. Hong et al., Phys. Lett. **B407** (1997) 115.

[92] B.-A. Li and C.M. Ko, Nucl. Phys. **A630** (1998) 556.

[93] J. Nemeth and G. Papp, nucl-th/9711039, Phys. Rev. **C** im Druck.

[94] V. Koch, B. Blättel, W. Cassing, U. Mosel and K. Weber, Phys. Lett. **B241** (1991) 174.

[95] J. Cugnon, D. Kinet und J. Vandermeulen, Nucl. Phys. **A379** (1982) 553.

[96] F. Halzen und A.D. Martin, *Quarks and leptons*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[97] V. Dimitriev and O. Sushkov, Nucl. Phys. **A459** (1986) 503.

[98] S. Huber and J. Aichelin, Nucl. Phys. **A573** (1994) 587.

[99] P. Senger und H. Stöbele, nucl-ex/9810007.

[100] A. Lang, B. Blättel, V. Koch, K. Weber, W. Cassing und U. Mosel Phys. Lett. **B245** (1990) 147.

[101] M.M. Htun, R. Madey, W.M. Zhang, M. Elaasar, D. Keane, B.D. Anderson, et al., Phys. Rev. **C59** (1999) 336.

Anhang A

CBUU - Modell

A.1 Resonanzmodell, Wirkungsquerschnitte

Wie in Kapitel 2.3.1 beschrieben, erfolgen im CBUU-Modell alle inelastischen Reaktionen über Bildung einer Resonanz. In den folgenden Abschnitten werden die Breitenparametrisierung der Resonanzen sowie ihre Erzeugungswirkungsquerschnitte bzw. -matrixelemente beschrieben.

A.1.1 Breiten der Resonanzen

Für die $\Delta(1232)$**-Zerfallsbreite** wird die Parametrisierung von Moniz und Koch [27] verwendet:

$$\Gamma(q) = \Gamma_R \frac{M_\Delta}{M} \left(\frac{q}{q_r}\right)^3 \left(\frac{q_r^2+\delta^2}{q^2+\delta^2}\right)^2 . \tag{A.1}$$

q ist der Betrag des Dreierimpulses des emittierten Pions im Ruhesystem eines Δ der Masse M, wobei M die im NN-Stoß gemäß der Massenverteilung (2.38) gewählte aktuelle Masse des Δ ist oder im πN-Stoß durch $\sqrt{s}$ gegeben ist. q_r ist analog der Impuls des Pions beim Zerfall eines Δ bei Nominalmasse M_Δ=1232 MeV/c^2. Für ein Δ auf seiner Nominalmasse ist Γ damit gleich Γ_R. Die Breite wächst an der Schwelle durch den Faktor M_Δ/M sogar etwas langsamer an als $\sim q^3$, was einer p-Wellen-Emission entspräche. Für hohe Impulse wird die Breite durch den Cutoff mit δ=0.3 GeV/c^2 beschränkt.

Die **1π- bzw. η-Zerfallsbreite höherer baryonischer Resonanzen** ist gemäß

$$\Gamma(q) = \Gamma_R \left(\frac{q}{q_r}\right)^{2l+1} \left(\frac{q_r^2+\delta^2}{q^2+\delta^2}\right)^{l+1} , \tag{A.2}$$

parametrisiert, mit l als Bahndrehimpuls des emittierten π oder η. Bis auf den Faktor M_Δ/M ist Gleichung (A.2) für $l = 1$ analog zu Gleichung (A.1). Die Cutoff-Funktion hat dieselbe Form und der Parameter δ hängt von der Nominalmasse M_R und der totalen Zerfallsbreite Γ_R ab:

$$\delta^2 = (M_R - M_N - m_\pi)^2 + \frac{\Gamma_R^2}{4} \, .$$

Die **2π-Zerfallsbreite baryonischer Resonanzen** muß berücksichtigen, daß ein 2π-Zerfall im CBUU-Modell ein Zweistufenprozeß ist, in dem die ursprüngliche Resonanz mit einer gegebenen Partialbreite z. B. in ein $\Delta(1232)$ plus ein Pion zerfällt und dieses Δ, das anschließend in einem unabhängigen zweiten Schritt in ein Nukleon und Pion übergeht, wiederum eine Massenverteilung besitzt. Über diese Massenverteilung muß bis zur maximal möglichen Masse integriert werden, um die 2π-Zerfallsbreite der Resonanz R zu ermitteln:

$$\begin{aligned} \Gamma_{R\to r\pi}(M) &= \frac{\Gamma_R \, P_{2\pi}}{M} \int_0^{M-m_b} d\mu \, \frac{p^f}{p^f_R} \, \frac{2}{\pi} \frac{\mu^2 \, \Gamma_{r,tot}(\mu)}{(\mu^2 - m_r^2)^2 + \mu^2 \, \Gamma^2_{r,tot}(\mu)} \\ &\quad \times \left(\frac{(M_R - M_N - 2m_\pi)^2 + \delta^2}{(M - M_N - 2m_\pi)^2 + \delta^2} \right)^2 . \end{aligned}$$

$P_{2\pi}$ ist die 2π-Zerfallswahrscheinlichkeit der Resonanz R aus Tabelle 2.1, p^f der Impuls der Zerfallsprodukte r und b im Ruhesystem von R. Der letzte Term ist wieder ein Cutoff-Faktor, der ein Divergieren der 2π-Breite für große M vermeidet. Der Parameter δ ist auf einen Wert von 0.3 GeV gesetzt.

Die **Zerfallsbreiten der mesonischen Resonanzen ρ und σ** sind ähnlich der 1π-Zerfallsbreite des $\Delta(1232)$ parametrisiert,

$$\Gamma(M) = \Gamma_r \frac{M_R}{M} \left(\frac{q}{q_r} \right)^{2J_r+1} \left(\frac{q_r^2 + \delta^2}{q^2 + \delta^2} \right)^{J_r+1} .$$

J_r ist der Spin der zerfallenden Resonanz, für den Cutoffparameter δ wurde 0.3 GeV gewählt.

A.1.2 Wirkungsquerschnitte

Im CBUU-Modell finden grundsätzlich nur binäre Reaktionen

$$a + b \to c + d \tag{A.3}$$

statt. Für die **elastischen Streureaktionen** wird die Parametrisierung von Cugnon [8, 95] genommen

$$\sigma_{NN\to NN} = \left(\frac{35}{1 + \sqrt{s} - 2M_N} + 20 \right) [\mathrm{mb}], \tag{A.4}$$

wobei s das Quadrat der invarianten Energie der Reaktion und M_N=0.938 GeV/c^2 die Nukleonenmasse ist. Die Parametrisierung für die Winkelverteilung ist

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = e^{-A(s)t} \ ,$$

wobei t das Quadrat des Impulsübertrages ist mit

$$A(s) = 6\frac{[3.65\,(\sqrt{s} - 2M_N)]^6}{1 + [3.65\,(\sqrt{s} - 2M_N)]^6} \ .$$

Alternativ kann eine neuere Parametrisierung des elastischen Wirkungsquerschnittes genommen werden, die vor allem stärker zu kleinen Energien hin anwächst und *pp*- von *pn*-Stößen unterscheidet [52]:

$$\sigma_{pp} = \begin{cases} 23.5 + 1000(.7 - p)^4 & (p < 0.8 \text{ GeV}) \\ \frac{1250}{p+50} - 4(p - 1.3)^2 & (0.8 < p < 1.2 \text{ GeV}) \\ \frac{77}{p+1.5} & (p > 1.2 \text{ GeV}) \end{cases} \tag{A.5}$$

$$\sigma_{pn} = \begin{cases} 33. + 196(.95 - p)^{2.5} & (p < 0.8 \text{ GeV}) \\ \frac{31}{\sqrt{p}} & (0.8 < p < 2.0 \text{ GeV}) \\ \frac{77}{p+1.5} & (p > 2.0 \text{ GeV}) \end{cases} \tag{A.6}$$

Die Winkelverteilung erfolgt hier gemäß

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = e^{-b(s)t} \ ,$$

wobei

$$b_{pp} = \begin{cases} 5.5\frac{p^8}{7.7+p^8} & (p < 2.0 \text{ GeV}) \\ 5.34 + 0.67(p - 2) & (p > 2.0 \text{ GeV}) \end{cases} \tag{A.7}$$

$$b_{pn} = \begin{cases} 0. & (p < 0.225 \text{ GeV}) \\ 6.2\frac{p-0.225}{0.375} & (0.225 < p < 0.6 \text{ GeV}) \\ -1.63p + 7.16 & (0.6 < p < 1.6 \text{ GeV}) \\ 5.34 + 0.67(p - 2.) & (p > 1.6 \text{ GeV}) \end{cases} \tag{A.8}$$

ist.

Die Wirkungsquerschnitte aller **inelastischen Reaktionen** werden parametrisiert, indem die Wirkungsquerschnitte in (Phasenraumfaktor $\times$ Matrixelement) zerlegt und diese Matrixelemente an die experimentellen Daten angepaßt werden. Der Vorteil dieser Methode liegt vor allem in der präziseren Beschreibung der Absorptionsprozesse, da man zum Erhalt der Wirkungsquerschnitte für die Reaktionen $RN \to NN$ keine *detailed balance* anwenden muß. Letztere führt aufgrund verschiedener Behandlung der Resonanzmassenverteilung insbesondere bei leichten Resonanzen zu großen Unterschieden in der Absorption [28].

Es gilt im Schwerpunktsystem der Teilchen a und b [96]

$$d\sigma_{ab\to cd} = \frac{(2\pi)^4}{4p_i\sqrt{s}}\delta^4(p_a+p_b-p_c-p_d)\overline{|\mathcal{M}_{ab\to cd}|^2}\frac{d^3p_c}{(2\pi)^3 2E_c}\frac{d^3p_c}{(2\pi)^3 2E_c}\ ,$$

wobei $\overline{|\mathcal{M}_{ab\to cd}|}^2$ das Quadrat des invarianten Matrixelements der Reaktion ist, summiert über die Spins der auslaufenden Teilchen und gemittlelt über die Spins der Teilchen im Anfangszustand der Reaktion.

Experimentell gemessen ist nun z. B. die Reaktion $\pi N \to \pi N$, aus der im CBUU-Modell der Wirkungsquerschnitt für $NN \to N\Delta$ extrahiert werden muß. Das Gesamtmatrixelement in $\sigma_{\pi N\to\pi N}$ wird daher aufgespalten in Erzeugungs- bzw. Zerfallsmatrixelement und Propagator P_Δ

$$\mathcal{M}_{\pi N\to\pi N} = \mathcal{M}_{\pi N\to\Delta}\, P_\Delta\, \mathcal{M}_{\Delta\to\pi N}\ .$$

In einem klassischen Modell wie dem CBUU gilt nun auch

$$\overline{|\mathcal{M}_{\pi N\to\pi N}|^2} = \overline{|\mathcal{M}_{\pi N\to\Delta}|^2}\,|P_\Delta|^2\,\overline{|\mathcal{M}_{\Delta\to\pi N}|^2}\ . \qquad \text{(A.9)}$$

Setzt man den Propagator für spinlose Teilchen

$$P_R = \frac{1}{s - M_R^2 + \Pi}$$

ein, wobei $\Pi = i\sqrt{s}\Gamma_{tot}$ der Imaginärteil der Selbstenergie der Resonanz R ist, so entspricht Gleichung (A.9) der 1. Bornschen Näherung für die Reaktion (A.3).

Die Quadrate der Erzeugungs- bzw. Zerfallsmatrixelemente in Gleichung (A.9) können, wiederum unter der Annahme einer spinlosen Resonanz R, durch die entsprechenden Partialbreiten ausgedrückt werden [96]:

$$\Gamma_{R\to ab} = \frac{p_{ab}}{8\pi s}\overline{|\mathcal{M}_{R\to ab}|^2},$$

mit p_{ab} als Betrag des Impulses der Teilchen a und b im Ruhesystem der Resonanz und s als dem Quadrat der Resonanzmasse.

Mit Spinfaktoren S_i $(i = a, b, R)$ erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt der Reaktion (A.3):

$$\sigma_{ab\to R\to cd} = \frac{2S_R+1}{(2S_a+1)(2S_b+1)}\,\frac{4\pi}{p_i^2}\,\frac{s\,\Gamma_{R\to ab}\,\Gamma_{R\to cd}}{(s-M_R^2)^2 + s\,\Gamma_{tot}^2}\ .$$

Damit ist der Wirkungsquerschnitt einer Meson-Nukleon-Reaktion vollständig durch die Breitenparametrisierung $\Gamma(M)$ bestimmt.

Die Bestimmung der Wirkungsquerschnitte für die Resonanzproduktion im NN-Stoß erfolgt analog über die Aufspaltung des Matrixelementes bzw. seines Quadrates

$$\mathcal{M}_{ab\to cde} = \mathcal{M}_{ab\to Re}\, P_R\, \mathcal{M}_{R\to cd}\ . \qquad \text{(A.10)}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Gesamtreaktion, z. B. $NN \to RN \to NN\pi$, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} d\sigma_{ab\to cde} &= \frac{(2\pi)^4}{4\,p_i\,\sqrt{s}}\,\delta^4(p_a+p_b-p_c-p_d-p_e)\overline{|\mathcal{M}_{ab\to cde}|^2} \\ &\quad\times\frac{d^3p_c}{(2\pi)^3\,2E_c}\frac{d^3p_d}{(2\pi)^3\,2E_d}\frac{d^3p_e}{(2\pi)^3\,2E_e} \end{aligned} \tag{A.11}$$

und spaltet sich mit Gleichung (A.10) auf in

$$\begin{aligned} &\sigma_{ab\to cde} = \\ &\underbrace{\iint \frac{(2\pi)^4}{4\,p_i\,\sqrt{s}}\,\delta^4(p_a+p_b-p_R-p_e)\overline{|\mathcal{M}_{ab\to Re}|^2}\frac{d^3p_e}{(2\pi)^3\,2E_e}\frac{d^3p_R}{(2\pi)^3\,2E_R}}_{=\sigma_{ab\to Re}(\mu)} \\ &\times\underbrace{\int \overline{|\mathcal{M}_{R\to cd}|^2}\delta^4(p_R-p_c-p_e)\frac{d^3p_c}{(2\pi)^3 2\,E_c}\frac{d^3p_d}{(2\pi)^3 2\,E_d}}_{=\frac{2\mu}{(2\pi)^4}\Gamma_{R\to cd}} \\ &\times\frac{1}{(\mu^2-M_R^2)^2+\mu^2\,\Gamma_{tot}^2}\,(2\pi)^3\,2\,\underbrace{E_R\,dE_R}_{=\mu\,d\mu}\,, \end{aligned}$$

woraus

$$\frac{d\sigma_{ab\to Re\to cde}}{d\mu} = \sigma_{ab\to Re}(\mu)\,\frac{2}{\pi}\,\frac{\mu^2\,\Gamma_{R\to cd}}{(\mu^2-M_R^2)^2+\mu^2\,\Gamma_{tot}^2} \tag{A.12}$$

bzw.

$$\sigma_{ab\to Re}(\mu) = \frac{1}{64\,\pi^2\,s\,p_i}\int d\Omega\,p_f\overline{|\mathcal{M}_{ab->Re}(\mu)|^2}, \tag{A.13}$$

folgt. Dabei sind p_f und p_i die Impulse der Teilchen im Anfangs- und Endzustand der Reaktion $a+b \to R+e$ in deren Schwerpunktsystem. Diese Matrixelemente $\overline{|\mathcal{M}_{ab->Re}|^2}$ müssen – mit Ausnahme der Deltaerzeugungsmatrixelemente – an die 1π-, 2π, η und ρ-Wirkungsquerschnitte gefittet werden.

A.1.3 $\Delta(1232)$-Wirkungsquerschnitt

Die Matrixelemente für die $NN \to N\Delta(1232)$ - Reaktion werden an die massen- und winkeldifferentiellen Wirkungsquerschnitte aus dem Mesonaustauschmodell von Dimitriev und Sushkov [97] angepaßt [3], wobei für das Δ die Moniz-Breitenparametrisierung A.1 beibehalten wird. Die Güte dieser Beschreibung kann im Vergleich zu den experimentellen Daten für die $pp \to n\Delta^{++} \to np\pi^+$ - Reaktion überprüft werden. Für die anderen Reaktionskanäle des CBUU-Modells ist mit dem Modell aus [97] der Δ-Anteil am gesamten Wirkungsquerschnitt vorgegeben; die Differenz zum totalen 1π-Produktionswirkungsquerschnitt muß über die Population der übrigen Resonanzen erfolgen.

A.1.4 $N(1535)$-Wirkungsquerschnitt

Ebenso wie das Δ festgelegt ist das Produktionsmatrixelement für die $NN \to NN(1535)$-Reaktion, da diese Resonanz als einzige in $N{+}\eta$ zerfällt. Hier werden – als einziger Fall – für die verschiedenen Isospinkanäle verschiedene Matrixelemente verwendet, und zwar

$$\overline{\left|\mathcal{M}_{p\,p\to p\,N^+(1535)}\right|^2} = 16\pi \times 8\,\mathrm{mb\,GeV}^2.$$

und

$$\overline{\left|\mathcal{M}_{p\,n\to p\,N(1535)}\right|^2} = \overline{\left|\mathcal{M}_{p\,n\to n\,N^+(1535)}\right|^2} \approx 16\pi \times 40\,\mathrm{mb\,GeV}^2\,.$$

A.1.5 Wirkungsquerschnitt übrige Resonanzen in der 1π-Produktion

Der Wirkungsquerschnitt für 1π-Produktion ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
\sigma_{3/2} &= \sum_{I_R=\frac{3}{2}} p\,p \to p\,R^+ = \sigma_{p\,p\to p\,\Delta^+(1232)} \\
&+ \frac{1}{4}\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi\,p_i\,s}\int_{M_N+m_\pi}^{\sqrt{s}-M_N} d\mu\,p_f \sum_{\substack{R\neq\Delta(1232)\\ I_R=\frac{3}{2}}} \frac{2}{\pi}\frac{\mu^2\,\Gamma_{R\to N\,\pi}(\mu)}{\left(\mu^2-M_R^2\right)^2+\mu^2\,\Gamma_{R,tot}^2(\mu)}
\end{aligned} \tag{A.14}$$

im Isospin 3/2-Kanal und

$$\begin{aligned}
\sigma_{1/2} &= \sum_{I_R=\frac{1}{2}} p\,p \to p\,R^+ \\
&= \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{16\pi\,p_i\,s}\int_{M_N+m_\pi}^{\sqrt{s}-M_N} d\mu\,p_f \sum_{\substack{R\\ I_R=\frac{1}{2}}} \frac{2}{\pi}\frac{\mu^2\,\Gamma_{R\to N\,\pi}(\mu)}{\left(\mu^2-M_R^2\right)^2+\mu^2\,\Gamma_{R,tot}^2(\mu)}
\end{aligned} \tag{A.15}$$

für Isospin 1/2. Die Wirkungsquerschnitte für die Reaktionen, die eine Überlagerung mehrerer Isospinkanäle darstellen, erhält man aus der inkohärenten Addition der einzelnen Beiträge. Die Stärke der Einzelbeiträge ergibt sich unter der Annahme, daß das Quadrat des Matrixelementes $|\mathcal{M}_{NN\to NR}|^2$ für alle Isospinkanäle den gleichen Wert hat, aus den jeweiligen Clebsch-Gordan Koeffizienten. Es folgt für die Einpionproduktion

$$\sigma_{p\,p\to p\,p\,\pi^0} = \frac{2}{3}\sigma_{3/2} + \frac{1}{3}\sigma_{1/2} \tag{A.16}$$

$$\sigma_{p\,p\to p\,n\,\pi^+} = \frac{10}{3}\sigma_{3/2} + \frac{2}{3}\sigma_{1/2} \tag{A.17}$$

$$\sigma_{p\,n\to p\,p\,\pi^-} = \frac{1}{3}\sigma_{3/2} + \frac{1}{3}\sigma_{1/2} \tag{A.18}$$

$$\sigma_{p\,n\to p\,n\,\pi^0} = \frac{4}{3}\sigma_{3/2} + \frac{1}{3}\sigma_{1/2}. \tag{A.19}$$

Es ist also ein gekoppeltes System von Bestimmungsgleichungen für die Matrixelemente durch Fit an die experimentell gemessenen Wirkungsquerschnitte zu lösen. Die Resultate für die Modellwirkungsquerschnitte zeigt Abbildung A.2, die Matrixelemente sind in Tabelle 2.1 in Kapitel 2 gelistet.

A.1.6 Der Wirkungsquerschnitt für ρ-Produktion

Die Quadrate der Matrixelemente für die Produktion der baryonischen Resonanzen, die in Nukleon und ρ-Meson zerfallen, werden durch einen Fit an die experimentellen Daten für die Reaktion

$$pp \to pp\rho^0$$

bestimmt. Analog zu Gleichung (A.16) ergibt sich der Wirkungsquerschnitt für die ρ^0-Produktion aus der Summe der Beiträge der $I = 3/2$- and $I = 1/2$-Resonanzen,

$$\sigma_{pp\to pp\rho^0} = \frac{2}{3}\sigma_{3/2} + \frac{1}{3}\sigma_{1/2},$$

wobei $\sigma_{3/2}$ und $\sigma_{1/2}$ entsprechend den Gleichungen (A.14) und (A.15) definiert sind. Jedoch erstrecken sich die Summen nur über Resonanzen mit nicht verschwindenden Partialbreiten für den Zerfall in $N\rho$. In Abbildung A.4 ist der so erhaltene Wirkungsquerschnitt im Vergleich zu den experimentellen Daten aus [53] dargestellt.

A.1.7 Der Wirkungsquerschnitt für 2π-Produktion

Wie bei der 1π-Produktion wird zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte der 2π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen angenommen, daß eine Resonanz angeregt wird, die anschließend entsprechend ihrer Partialbreite über den "Umweg" Pion plus zweite Resonanz in ein Nukleon und zwei Pionen zerfällt:

$$1.\ NN \to NR \to \quad N\Delta(1232)\pi \quad \to NN\pi\pi \tag{A.20}$$
$$2.\ NN \to NR \to \quad NN(1440)\pi \quad \to NN\pi\pi \tag{A.21}$$
$$3.\ NN \to NR \to \quad NN\rho \quad \to NN\pi\pi \tag{A.22}$$
$$4.\ NN \to NR \to \quad NN\sigma \quad \to NN\pi\pi. \tag{A.23}$$

Zusätzlich kann die 2π-Produktion auch über die Anregung zweier $\Delta(1232)$ und deren Zerfall in je ein Nukleon und ein Pion erfolgen

$$NN \to \Delta(1232)\Delta(1232) \to NN\pi\pi.$$

Für letzteren Wirkungsquerschnitt wird die Parametrisierung von Huber und Aichelin [98] verwendet. Sie ist in Tabelle A.4 angegeben.

Zur Beschreibung der 2π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen werden $\sigma^i_{3/2}$ und $\sigma^i_{1/2}$ $(i = 1, .., 4)$ definiert, die sich aus den Gleichungen (A.14) und (A.15) ergeben, indem $\Gamma_{R\to N\pi}$ durch die entsprechenden Partialbreiten Γ_i $(i = 1, .., 4)$ für die zweiten Stufen der Reaktionen (A.20) bis (A.23) ersetzt werden. Der Wirkungsquerschnitt für die 2π-Produktion ist damit

$$\sigma_{NN\to NN\pi\pi} = \sum_{i=1}^{4} n_i \sigma^i_{1/2} + \sum_{i=1}^{4} d_i \sigma^i_{3/2} + \sigma_{NN\to\Delta\Delta\to NN\pi\pi} \ ,$$

wobei die n_i und d_i die Produkte der Isospinkoeffizienten der drei Schritte der Reaktionen (A.20) - (A.23) sind. Diese Faktoren sind in Tabelle A.3 für die Isospinkanäle, für die experimentelle Daten vorliegen, angegeben.

$\sigma_{NN\to\Delta(1232)\Delta(1232)\to NN\pi\pi}$ wird analog bestimmt, indem man die Wirkungsquerschnitte $\sigma_{NN\to\Delta(1232)\Delta(1232)}$, die zu einem bestimmten Isospinkanal beitragen können, mit dem Produkt der entsprechenden Isospinkoeffizienten für den Zerfall der beiden $\Delta(1232)$ multipliziert und anschließend inkohärent aufsummiert.

A.1.8 Der $NR \to NN$-Wirkungsquerschnitt

Die Wirkungsquerschnitte der Reaktionen $NR \to NN$ werden wie die Resonanzproduktion aus der Gleichung (A.11) für einen Zwei-Teilchen-Endzustand gewonnen. Die Matrixelemente sind dabei mit denen der Produktion identisch. Damit muß nicht mehr auf detailed-balance-Beschreibungen zur Bestimmung der $NR \to NN$-Wirkungsquerschnitte zurückgegriffen werden, sondern sie sind aufgrund der invarianten Matrixelemente sowohl als Funktion der invarianten Energie wie auch auch als Funktion der Resonanzmasse festgelegt.

A.1.9 Der $NR \to NR'$-Wirkungsquerschnitt

Zur Beschreibung einer Nukleon-Resonanz-Kollision mit erlaubter Massenänderung bzw. einer Änderung des Resonanztyps wird für alle Resonanzen einschließlich des $\Delta(1232)$ ein Quadrat des invarianten Matrixelements verwendet, das sich aus Mittelung über die Quadrate der invarianten Matrixelemente der Reaktionen $NN \to NR$ und $NN \to NR'$ ergibt. Analog zu Gleichung (A.12) ergibt sich folgender Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned} \sigma_{\substack{NR\to NR' \\ R\neq R'}} &= I\, \frac{0.5(|\mathcal{M}_{NN\to NR}|^2 + |\mathcal{M}_{NN\to NR'}|^2)\, 2\,(2J_{R'}+1)}{16\,\pi\, p_i\, s} \\ &\quad \times \int d\mu\, p_f \frac{2}{\pi} \frac{\mu^2\, \Gamma_{R'}(\mu)}{\left(\mu^2 - M^2_{R'}\right)^2 + \mu^2\, \Gamma^2_{R'}(\mu)} \ . \end{aligned}$$

I steht hier für den Isospinkoeffizienten der entsprechenden Reaktion (s. Tabelle A.2) und $J_{R'}$ für den Spin der baryonischen Resonanz im Ausgangszustand der Reaktion.

A.1.10 Direkte Produktion und Absoption von Pionen in NN-Stößen

Die Wirkungsquerschnitte des Resonanzmodells geben die experimentellen Daten der 1π-, 2π, η- und ρ-Produktion oberhalb des Massenbereichs des $\Delta(1232)$ gut wieder. Unterhalb dessen werden die Daten etwas unterschätzt.

Dieses Defizit wird durch die Einführung eines direkten Pion-Produktionskanals behoben. Dazu werden die aus dem Resonanzmodell gewonnenen Wirkungsquerschnitte für die 1π Produktion von den experimentellen Daten subtrahiert, die Differenz bildet den Wirkungsquerschnitt für direkte Pionenproduktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen $\sigma_{NN\to NN\pi}$ und wird durch folgenden Ansatz gefittet:

$$\sigma_{N\,N\to N\,N\,\pi}(x) = A\,x^{n_1}\,e^{-(a\,x^{n_2}+b\,x)} \tag{A.24}$$

mit

$$x = \frac{\sqrt{s}-2M_N-m_\pi}{5\,\mathrm{GeV}}\ .$$

Die Parameter A, a, b, n_1 und n_2 sind in Tabelle A.1 angegeben.

Mit Einführung der Reaktion $NN \to NN\pi$ muß aus Konsistenzgründen auch die Rückreaktion $\pi NN \to NN$ beachtet werden. Dazu wird für jedes Pion die Rate $\pi NN \to NN$ als Funktion der lokalen Protonen- und Neutronendichte berechnet. Die Pionenabsorption geschieht entsprechend dieser Rate an zwei zufällig ausgewählten Nukleonen.

Unter der Annahme, daß das invariante Matrixelement der Reaktion $N_1N_2 \to N_3N_4\pi$ nur von der invarianten Energie der Reaktion abhängt, kann der Wirkungsquerschnitt in folgender Form geschrieben werden [26]:

$$\sigma_{N_1N_2\to N_3N_4\pi}(\sqrt{s}) = \frac{S_{N_1,N_2}}{64\,(2\,\pi)^3\,p_i\,\sqrt{s}^3}\,\left|\mathcal{M}_{N_1\,N_2\to N_3\,N_4\,\pi}(\sqrt{s})\right|^2\int dm_{34}^2\,dm_{3\pi}^2$$

S_{N_1,N_2} ist der Symmetriefaktor für die Nukleonen N_1 und N_2, p_i ist der Betrag des Dreierimpulses im Schwerpunktsystem der Nukleonen im Anfangszustand der Reaktion, und die Massen m_{ij} erhält man aus der Summe der entsprechenden Viererimpulse

$$m_{34}^2 = (p_3+p_4)^2,\ m_{3\pi}^2 = (p_3+p_\pi)^2\ .$$

Die Übergangsrate für die Absorption eines Pions an den Nukleonen N_3 und N_4 ist dann durch den Ausdruck [96]

$$W_{fi} = (2\pi)^4\,\frac{\delta^4\left(p_{N,1}+p_{N,2}-p_{N,3}-p_{N,4}-p_\pi\right)\,|\mathcal{M}|^2}{V^5}\quad ,$$

gegeben. Bei V handelt es sich um ein Normalisierungsvolumen [96]. Multiplikation dieser Gleichung mit den Phasenraumfaktoren der Nukleonen im Endzustand der Reaktion (N_1, N_2) und Integration über $d^3p_{N_1}$ und $d^3p_{N_2}$ ergibt die Rate

$$\Gamma_{\pi N_3 N_4 \to N_1 N_2} = S_{N_1,N_2} \frac{p_f}{4\,\pi\,\sqrt{s}} |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{2\,E_\pi} \frac{\rho_{N,3}}{2E_{N,3}} \frac{\rho_{N,4}}{2E_{N,4}} \,.$$

Die Faktoren $1/(2E)$ ergeben sich aus der Normierung der Wellenfunktionen [96]. Bei p_f handelt es sich hier um den Dreierimpuls der Nukleonen N_1 und N_2 im Schwerpunktsystem der Reaktion, ρ_{N_3} und ρ_{N_4} sind die lokalen Protonen- und Neutronendichten.

Kanal	A [mb]	a	b	n_1	n_2
$p \quad p \to p \quad p \quad \pi^0$	61.3	1.52	2.50	6.18	3.48
$p \quad p \to p \quad n \quad \pi^+$	122.6	1.52	2.50	6.18	3.48
$p \quad n \to p \quad p \quad \pi^-$	24.9	3.30	0.85	1.93	0.002
$p \quad n \to p \quad n \quad \pi^0$	7.25	0.88	0	2.31	3.64

Tab. A.1: Fitparameter für den Wirkungsquerschnitt für direkte Pionenproduktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen $\sigma_{N\,N \to N\,N\,\pi}$ (Gleichung (A.24)).

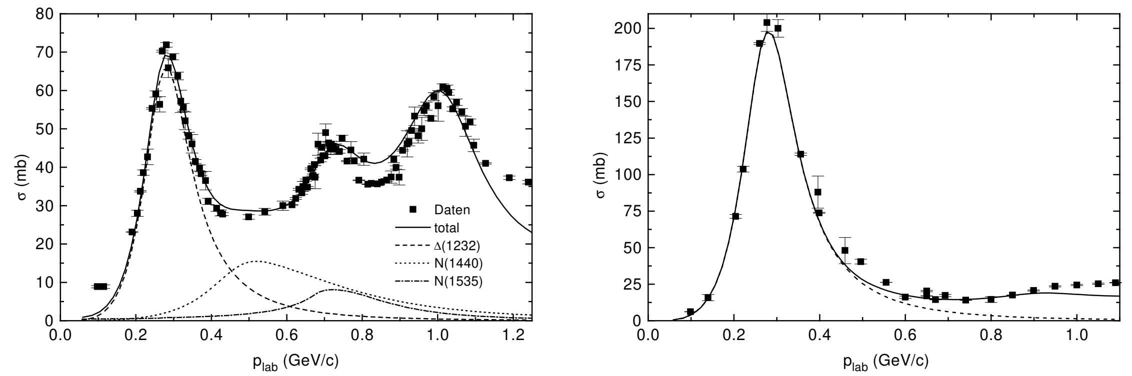
i	f	I
$N^+ \quad N^+$	$N^+ \quad N^+$	1
$N^+ \quad N^0$	$N^+ \quad N^0$	1/2
$N^+ \quad N^+$	$N^0 \quad \Delta^{++}$	3/4
$N^+ \quad N^+$	$N^+ \quad \Delta^+$	1/4
$N^+ \quad N^0$	$N^+ \quad \Delta^0$	1/4

i	f	I
$N^+ \quad \Delta^{++}$	$N^+ \quad \Delta^{++}$	1
$N^+ \quad \Delta^+$	$N^0 \quad \Delta^{++}$	3/8
$N^+ \quad \Delta^+$	$N^+ \quad \Delta^+$	5/8
$N^+ \quad \Delta^0$	$N^+ \quad \Delta^0$	1/2
$N^+ \quad \Delta^-$	$N^+ \quad \Delta^-$	5/8

Tab. A.2: Isospinkoeffizienten I für Baryon-Baryon-Kollisionen. N und Δ repräsentieren Teilchen mit Isospin 1/2 bzw. Isospin 3/2. Die Koeffizienten für Kanäle, die nicht explizit aufgeführt sind, ergeben sich aus Isospinsymmetrie.

	$pp \to pp\pi^+\pi^-$	$pp \to pp\pi^0\pi^0$	$pp \to pn\pi^+\pi^0$	$pn \to pn\pi^+\pi^-$	$pn \to pp\pi^-\pi^0$
n_1	5/9	2/9	2/9	5/9	2/9
n_2	4/9	1/9	4/9	4/9	4/9
n_3	1/3	0	2/3	1/3	2/3
n_4	2/3	1/3	0	2/3	0
d_1	26/45	2/45	22/9	52/45	17/45
d_2	2/9	2/9	14/9	4/9	5/9
d_3	2/3	0	10/3	2/3	1/3
d_4	0	0	0	0	0

Tab. A.3: Produkte der Isospinkoeffizienten für die dritte Stufe der Reaktionen (A.20) - (A.23) für die Isospinkanäle, für die experimentelle Daten vorliegen.



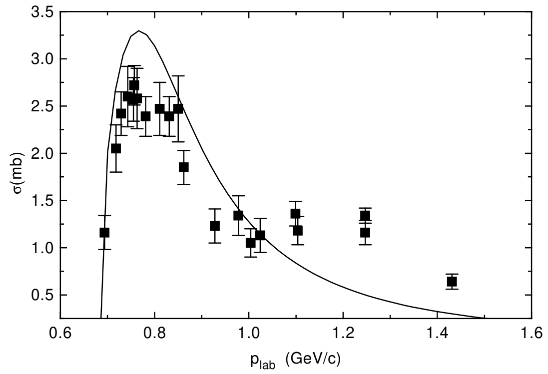


Abb. A.1: Totale Wirkungsquerschnitte der Reaktionen π^--p (links oben), π+-p (oben) und $\pi^- p \to \eta n$ (links, durchgezogene Linien) im Vergleich zu den experimentellen Daten [53].

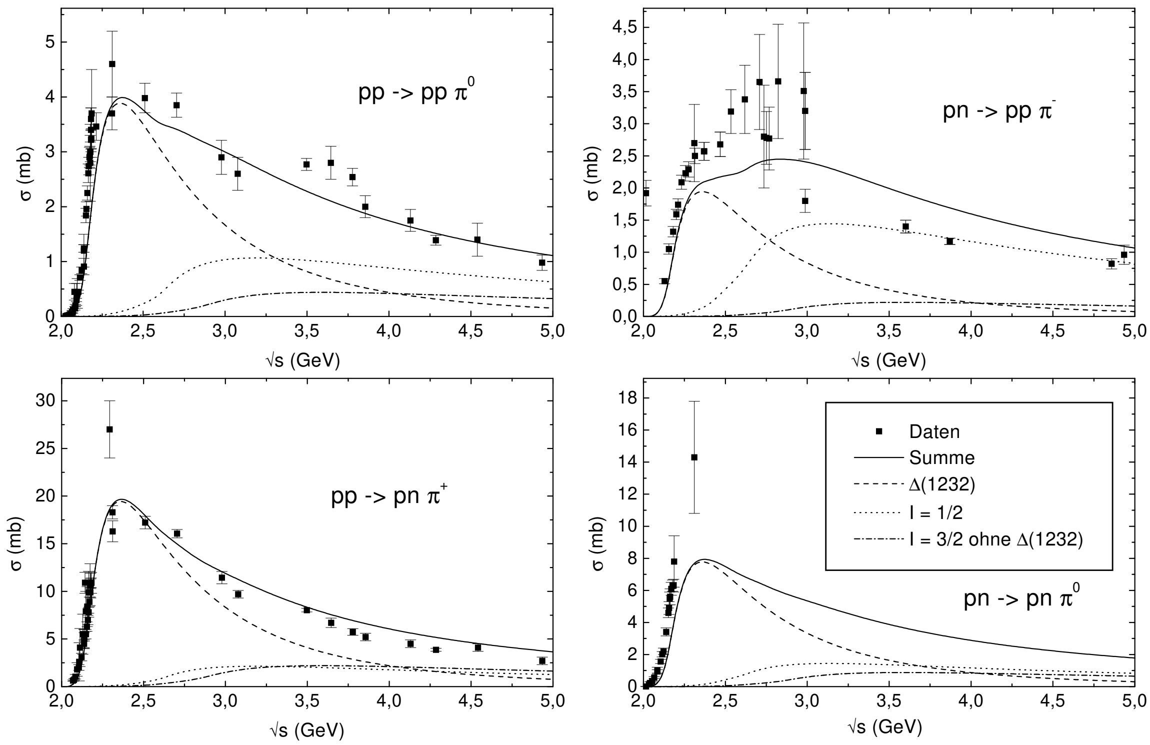


Abb. A.2: Der totale Wirkungsquerschnitt für 1π-Produktion (durchgezogene Linien) aus dem Resonanzmodell für verschiedene Isospinkanäle im Vergleich zu experimentellen Daten [53].

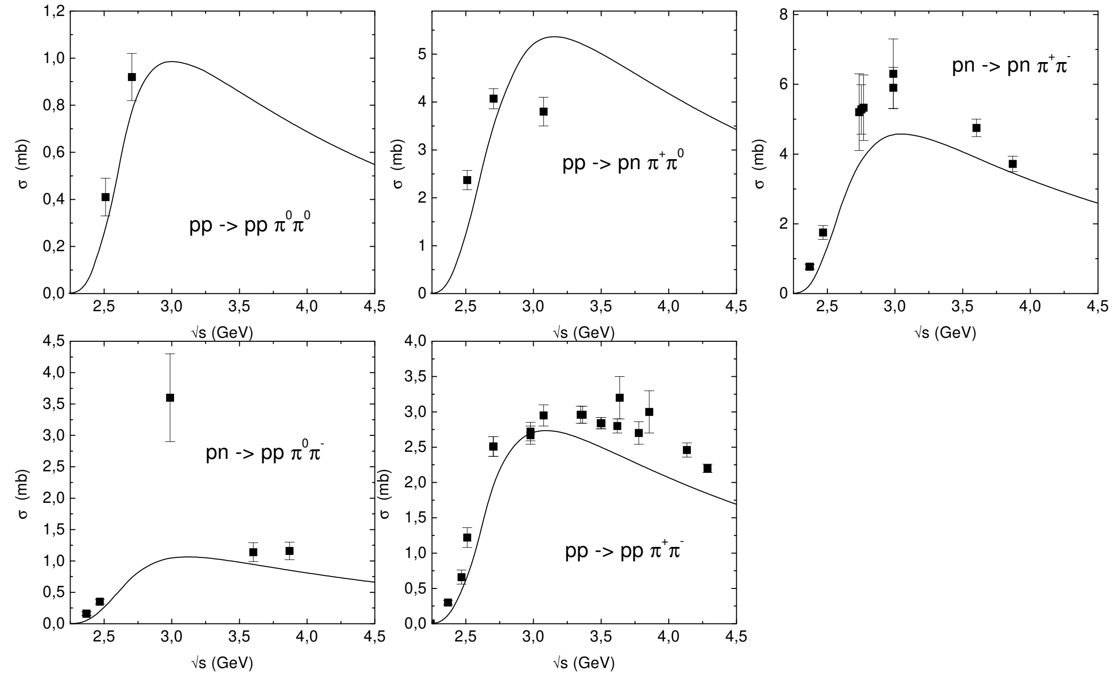


Abb. A.3: Der im Rahmen des Resonanzmodells bestimmte totale Wirkungsquerschnitt für die 2π-Produktion in Nukleon-Nukleon-Kollisionen (durchgezogene Linien) für verschiedene Isospinkanäle als Funktion der invarianten Energie im Vergleich zu experimentellen Daten [53].

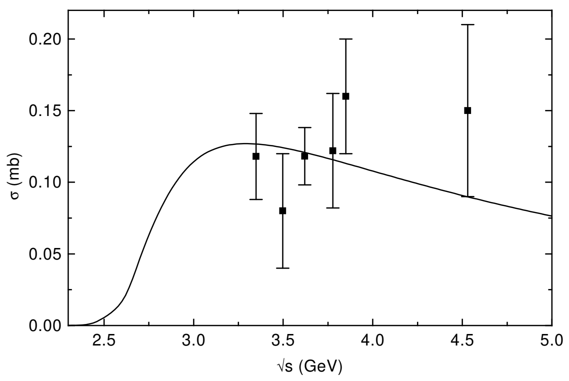


Abb. A.4: Wirkungsquerschnitt der Reaktion $pp \to pp\rho^0$ als Funktion der invarianten Energie im Vergleich zu experimentellen Daten [53]. Die durchgezogene Linie ist das Ergebnis des Resonanzmodells unter Verwendung der in Tabelle 2.1 angegebenen Quadrate der invarianten Matrixelemente.

$\mathbf{pp \to \Delta^0\Delta^{++}}$:

$x = \sqrt{s}$ (GeV)	σ (mb)
$2.016 - 2.33$	$1.361(x - 2.152)^{5.299}$
$2.33 - 2.63$	$2.794x - 6.626$
$2.63 - 2.98$	$0.9205 - 2.763(x - 2.898)^2$
$2.98 - 3.24$	$2.192 - 0.4320x$
$3.24 - 4.5$	$6.898x^{-1.417} - 0.5140$

$\mathbf{pn \to \Delta^0\Delta^{+}}$:

$x = \sqrt{s}$ (GeV)	σ (mb)
$2.152 - 2.412$	$144.8(x - 2.152)^{5.083}$
$2.412 - 2.58$	$2.841x - 6.707$
$2.58 - 2.98$	$0.7819 - 1.777(x - 2.869)^2$
$2.98 - 3.26$	$1.894 - 0.3798x$
$3.26 - 4.5$	$8.371x^{-1.926} - 0.2035$

$\mathbf{pn \to \Delta^-\Delta^{++}}$:

$x = \sqrt{s}$ (GeV)	σ (mb)
$2.152 - 2.412$	$239.6(x - 2.152)^{5.148}$
$2.412 - 2.6$	$4.738x - 11.21$
$2.6 - 2.98$	$1.395 - 3.615(x - 2.884)^2$
$2.98 - 3.69$	$3.517 - 0.7197x$
$3.69 - 4.5$	$9.358x^{-1.242} - 0.9878$

Tab. A.4: Parametrisierungen der $\Delta(1232)\Delta(1232)$-Produktionswirkungsquerschnitte aus [98]. Den Wirkungsquerschnitt der Reaktion $pp \to \Delta^+\Delta^+$ erhält man aus dem der Reaktion $pp \to \Delta^0\Delta^{++}$ durch Multiplikation mit 2/3. Aufgrund der Isospinsymmetrie sind die Querschnitte der Reaktionen $nn \to \Delta^+\Delta^-$ und $pp \to \Delta^0\Delta^{++}$ identisch, ebenso die der Reaktionen $nn \to \Delta^0\Delta^0$ und $pp \to \Delta^+\Delta^+$.

A.2 Numerik

A.2.1 Dichten und Ströme

Dichten und Ströme an einem Ort $\vec{r}$ werden durch Integration der Phasenraumdichte über den Impuls

$$j^\mu(\vec{r},t) = \int \frac{d^3p}{E}\, p^\mu\, f(\vec{r},\vec{p},t)\ ,$$

mit $p^\mu = (E, \vec{p})$ und $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^*(\vec{r},\vec{p})^2}$ erhalten. Im Testteilchenbild bedeutet dies eine Summation über alle Testteilchen in einer Gitterzelle V_k

$$j^\mu(x_k, y_k, z_k) = \frac{1}{n} \sum_{i:\vec{r_i}\epsilon V_k} \frac{p_i^\mu}{E_i}\ .$$

Es zeigt sich, daß die so berechneten Dichten j_0 und Ströme $\vec{j}$ starken numerischen Fluktuationen unterliegen. Diese statistischen Schwankungen führen zu unphysikalischen Gradienten des Potentials und so zu einer Beeinträchtigung der Teilchenpropagation und Kernstabilität. Daher kommt ein "Smearing"-Algorithmus zum Einsatz, der dazu führt, daß ein Testteilchen i nicht nur in der Gitterzelle, in der es sich befindet, zur Dichte und zu den Strömen beiträgt, sondern auch – entsprechend einem Gauß-Gewicht – in den Nachbarzellen. Die geschmierten j^μ sind gegeben durch:

$$j^\mu(x_k, y_k, z_k) = \frac{1}{n} \sum_{l=k\pm 2} \sum_{i\epsilon V_l} \frac{p_i^\mu}{E_i} \frac{1}{(2\pi\Delta^2)^{3/2}}\, e^{\frac{-(\vec{r_i}-\vec{r_k})^2}{2\Delta^2}}\ , \tag{A.25}$$

wobei die i nun auch alle Testteilchen der die Zelle k umgebenden Zellen erfaßt. Die Breite Δ in Gleichung (A.25) ist auf den Wert 1 fm gesetzt; der Zellenindex l läuft daher über $k \pm 2$. Zur Beschleunigung dieser Berechnung wird jede Gitterzelle in 5 feinere unterrastert. Die Gewichte, mit der ein Teilchen in einer Unterzelle $m \in l$ zur Dichte in der Zelle k beiträgt, werden in der Initialisierung einmal berechnet und abgespeichert; in der laufenden Berechnung wird dann nur noch eine Zuordnung der Testteilchen zu den Unterzellen vorgenommen. Die Abweichungen zu einer Gewichtung der Testteilchen anhand ihrer tatsächlichen Position ist minimal.

A.2.2 Kollisionskriterium

Im CBUU-Modell kollidieren zwei Teilchen, wenn sie zu einem gegebenen Zeitschritt den Punkt ihrer nächsten Annäherung erreicht haben und dieser kleiner ist als eine vom Gesamtwirkungsquerschnitt vorgegebene Distanz. Bei den hohen Teilchengeschwindigkeiten muß jedoch ein relativistisch kovarianter Ausdruck für den Abstand und eine gemeinsame Zeit für die Kollision gefunden werden. Dazu wird der Algorithmus von Kodama et al. [45] verwendet.

Die Teilchen 1 und 2 werden in dem "Laborsystem", in dem die Transportrechnung durchgeführt wird, zur Zeit t durch ihre Ortskoordinaten $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ und ihre Viererimpulse p_1 und p_2 charakterisiert. Eine Lorentz-Transformation in das Schwerpunktsystem der beiden Teilchen ergibt die Koordinaten $(t_1^{cm}, \vec{x}_1^{cm})$, $(t_2^{cm}, \vec{x}_2^{cm})$ und die Viererimpulse $(E_1^{cm}, \vec{p}_1^{cm})$, $(E_2^{cm}, \vec{p}_2^{cm})$. In diesem CM-System gilt

$$\begin{array}{lrcl} & \vec{x}_i^{cm}(t^{cm}) & = & \vec{x}_i^{cm}(t_i^{cm}) + \vec{v}_i^{cm}(t^{cm} - t_i^{cm}) \\ \text{mit} & \vec{v}_i^{cm} & = & \dfrac{\vec{p}_i^{cm}}{E_i^{cm}} \,. \end{array} \tag{A.26}$$

t^{cm} ist die Zeit im Schwerpunktsystem der beiden Teilchen.

Das Quadrat des räumlichen Abstands d beider Teilchen im CM-System zu einem Zeitpunkt t^{cm} ist

$$\begin{array}{lrcl} & d^2(t^{cm}) & = & (\vec{x}_{12}^{cm} + \vec{v}_{12}^{cm} t^{cm})^2 \,, \\ \text{mit} & \vec{x}_{12}^{cm} & = & \vec{x}_1^{\,cm} - \vec{x}_2^{\,cm} - \vec{v}_1^{\,cm}\, t_1^{cm} + \vec{v}_2^{\,cm}\, t_2^{cm} \\ \text{und} & \vec{v}_{12}^{cm} & = & \vec{v}_1^{\,cm} - \vec{v}_2^{\,cm} \end{array}$$

Der Stoßparameter b ist definiert als der minimale Abstand beider Teilchen. Dieser minimale Abstand wird zur Zeit

$$t_{min}^{cm} = -\frac{\vec{x}_{12}^{cm} \cdot \vec{v}_{12}^{cm}}{(\vec{v}_{12}^{cm})^2} \tag{A.27}$$

angenommen. Das Quadrat des Stoßparameters ist

$$b^2 = (\vec{x}_{12}^{cm})^2 - \frac{(\vec{x}_{12}^{cm} \cdot \vec{v}_{12}^{cm})^2}{(\vec{v}_{12}^{cm})^2} \;; \tag{A.28}$$

ausgedrückt durch Koordinaten im Laborsystem:

$$\begin{array}{lrcl} & b^2 & = & R_{12}^2 - \dfrac{h_{12}^2}{v_{12}^2} \\ \text{mit} & R_{12}^2 & = & (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 + ((\vec{p}_1 \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1))/m_1)^2 \\ & h_{12} & = & \vec{p}_1 \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)/m_1 - (\vec{p}_2 \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1))m_1/(p_1 \cdot p_2) \\ & v_{12}^2 & = & 1 - \left(\dfrac{m_1\, m_2}{p_1 \cdot p_2}\right) . \end{array} \tag{A.29}$$

Dieser Abstand wird mit dem von Wirkungsquerschnitt vorgegebenen,

$$b_{max} = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}$$

verglichen.

Der Zeitpunkt der Kollision ist im Schwerpunktsystem der beiden Teilchen durch t^{cm}_{min} gegeben. Transformiert man t^{cm}_{min} für beide Teilchen ins Laborsystem, so ergeben sich dort im allgemeinen zwei unterschiedliche Kollisionszeitpunkte. Um einen gemeinsamen Zeitpunkt zu approximieren, wird im Ruhesystem des Teilchens 1 der Zeitpunkt t^1_{min} der nähesten Annäherung sowie der kürzeste räumliche Abstand von Teilchen 1 und 2 berechnet. $\Delta\tau_{12}$ ist dann das Eigenzeitintervall von Teilchen 1, in dem es in seinem Ruhesystem von seiner Ausgangskoordinate $\vec{x}_1$ zum Kollisionsort propagiert, sie ergibt sich aus der Differenz der Zeit t im Eigensystem und t^1_{min}. Ausgedrückt durch die Koordinaten der Teilchen 1 und 2 im Laborsystem ist

$$\Delta\tau_{12} = \vec{p}_1 \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)/m_1 - h_{12}/v^2_{12}\ . \tag{A.30}$$

Eine Lorentz-Transformation ins Laborsystem ergibt

$$\Delta t_{12} = \frac{E_1}{m_1}\,\Delta\tau_{12}\ ; \tag{A.31}$$

analog eine Zeit Δt_{21} für Teilchen 2.

Das zeitliche Kollisionskriterium im Laborsystem ist dann

$$|\Delta t_{12} + \Delta t_{21}| \leq \Delta t \quad , \tag{A.32}$$

wobei Δt die in der Simulationsrechnung verwendete Zeitschrittweite ist.

A.2.3 Energieerhaltung in den Kollisionen

Im CBUU-Modell wird das Potential als nullte Komponente eines Vektorpotentials behandelt, vergleiche Kapitel 2. Zur numerischen Vereinfachung wird das Potential im LRF in ein skalares bzw. in eine effektive Masse m^* umgerechnet:

$$\begin{aligned} E_{\text{sca}} &= E_{\text{vec}} \\ \sqrt{p^2 + (m+U')^2} &= \sqrt{p^2 + m^2} + U \end{aligned}$$

mit $m^* = (m + U')$. Diese effektive Masse behält das Teilchen unabhängig vom Bezugssystem. Die Propagationsgleichung ergibt sich damit zu

$$\partial_t f + \left(\frac{\vec{p}}{E} + \frac{m^*}{E}\vec{\nabla}_p U'\right)\vec{\nabla}_r f + \frac{m^*}{E}\vec{\nabla}_r U'\,\vec{\nabla}_p f \;=\; I_{\text{coll}} \quad ,$$

und die Energieerhaltung in den Teilchenkollisionen formuliert sich einfach zu

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= E_3 + E_4 \\ \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_1^{*2}} + \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^{*2}} &= \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^{*2}} + \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_4^{*2}}\ . \end{aligned}$$

Für die Impulserhaltung ergibt sich

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4\ .$$

A.2.4 Initialisierung

Die Kerne werden im CBUU-Modell in Ortsraum in einem frei wählbaren Oberflächenabstand R_{dist} initialisiert, so daß sich der Abstand der Kernzentren zu

$$R = R_{dist} + r_{0_1} + r_{0_2}$$

ergibt. Die Zentren werden so gelegt, daß ein Maximum der Kollision auf dem Gitter, auf dem die Dichten und Ströme berechnet werden, stattfindet. Üblicherweise entspricht das "Gittersystem" dem CM-System der Reaktion und der Schwerpunkt des untersuchten Systems dem Gittermittelpunkt.

Bei der Ortsrauminitialisierung der Testteilchen wird angenommen, daß der Verlauf der Protonen- und Neutronendichte identisch ist. Die Verteilung erfolgt entsprechend einer radialsymmetrischen Woods-Saxon-Verteilung

$$\rho(r) = \rho_0 \, \frac{1}{\left[1 + e^{\frac{r - r_0}{\alpha}}\right]} \; ,$$

wobei für die Parameter r_0, α und ρ_0 Werte aus Hartree-Fock Rechnungen für stabile Kerne [41] verwendet werden; sie sind in Tabelle A.2.4 gelistet.

Der Impulsrauminitialisierung liegt die lokale Thomas-Fermi Näherung zugrunde. D. h., daß an einem Ort $\vec{r}$ mit der Baryonendichte $\rho(\vec{r})$ alle Zustände im Impulsraum gleichmäßig bis zu dem lokalen Fermiimpuls von

$$p_F(\vec{r}) = \left(\frac{3}{2}\pi^2 \rho(\vec{r})\right)^{\frac{1}{3}}$$

gefüllt sind. Die Impulse der Testteilchen werden also homogen in dieser Fermikugel, deren Radius der lokale Fermiimpuls $p^F(\vec{r})$ ist, verteilt.

Anschließend werden die einzelnen Ensembles auf Gesamtimpuls null zentriert, mit der eingestellten Energie geboostet und in z-Richtung mit dem entsprechende γ-Faktor kontrahiert.

Kern	r_0 [fm]	α [fm]	ρ_0 [fm^{-3}]
$^{12}_{6}$C	2,209	0,479	0,182
$^{40}_{20}$Ca	3,614	0,479	0,172
$^{58}_{28}$Ni	4,176	0,478	0,168
$^{98}_{42}$Zr	5,108	0,476	0,162
$^{197}_{79}$Au	6,619	0,476	0,154
$^{208}_{82}$Pb	6,755	0,476	0,154

Tab. A.5: Radien r_0, Oberflächendicken α und resultierende zentrale Dichten augewählter Kerne entsprechend den Hartree-Fock Rechnungen [41].

A.2.5 Bindungsenergie

Die Bindungsenergie der Kerne im CBUU-Modell wurde in [42] durch Einführung einer Symmetrieenergie

$$U_{\rm sym} = D\ \frac{\rho_p - \rho_n}{\rho_0}\,\tau_z \tag{A.33}$$

mit D = 30 MeV and $\tau_z = \pm 1$ für Protonen und Neutronen optimiert. Sie entspricht damit weitgehend der Weizsäcker'schen Massenformel [11], wie in Abbildung A.5 dargestellt ist.

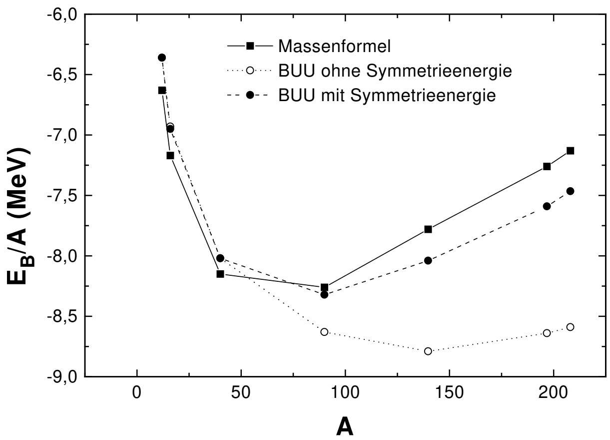


Abb. A.5: Bindungsenergie der CBUU-Kerne im Vergleich zur Weizsäcker'schen Massenformel. Abbildung aus [42].

Anhang B

Dispersion

Real- und Imaginärteil eines optischen Potentials sind über eine sogenannte Dispersionsrelation miteinander gekoppelt. Dies herzuleiten, erfordert zwei Schritte:

- Zum einen muß man zeigen, daß aus dem Prinzip der Kausalität der Wechselwirkung die Analytizität des Potentials in der oberen Halbebene (OHE) der komplexen Energie-Ebene folgt, und
- zum anderen, daß aus der Analytizität einer beliebigen Funktion in der OHE ein fester Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil dieser Funktion folgt.

B.1 Grundlegendes

In der Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t\Psi = \left\{-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + U\right\}\Psi \tag{B.1}$$

stellt das Potential U eine Mittelung über viele Wechselwirkungen mit anderen Teilchen dar, die alle

- an anderen Orten und
- zu früheren Zeiten

stattfanden. Dies kann man wiedergeben, indem man statt des Potentials U einen Wechselwirkung-Kern $\mathcal{M}$ verwendet,

$$i\hbar\partial_t\Psi(r,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(r,t) + \int dr' \int dt' \mathcal{M}(r,r',t-t')\Psi(r',t') \ . \tag{B.2}$$

Die Nichtlokalität im Ort führt dabei über eine Fouriertransformation zu einer Impulsabhängigkeit des Potentials, die Nichtlokalität in der Zeit zu einer Energieabhängigkeit:

$$\begin{aligned} M(r,r',\omega) &= (2\pi)^{-1}\int d\tau \mathcal{M}(r,r',\tau)e^{iE\tau} , \\ M(R,k,\tau) &= (2\pi)^{-1}\int dr \mathcal{M}(R,r,\tau)e^{ikr} , \end{aligned} \tag{B.3}$$

mit $\tau = t' - t$ und $R = r - r'$. D. h., die Schrödingergleichung liest sich eigentlich

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\Psi + U(r,k,\omega)\Psi , \tag{B.4}$$

wobei nur die Energieabhängigkeit zur Dispersionsrelation beiträgt.

Zerlegt man das Potential U in einen lediglich impulsabhängigen Realteil V_0 und einen impuls- und energieabhängigen Real- und Imaginärteil ΔV und W

$$U(k,\omega) = V_0(k) + \Delta V(k,\omega) + iW(k,\omega) \tag{B.5}$$

so ergeben sich ΔV und W über Dispersionsrelationen auseinander, wobei die Energieabhängigkeit von W oder ΔV bei jedem Impulswert k anders aussehen kann. Die Energie ω ist hier unabhängig von k.

B.2 Von der Kausalität zur Analytizität in der OHE

Der Weg von der Kausalität einer Wechselwirkung zur Analytizität in der oberen Energie-Halbebene sei am Beispiel einer Green-Funktion dargestellt:

Eine inhomogene Wellengleichung

$$\triangle_r\Psi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\Psi = f(\vec{r},t) \tag{B.6}$$

kann formal mit einer Green-Funktion gelöst werden, die die Gleichung

$$\left(\triangle_r - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') = \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t') \tag{B.7}$$

löst und die Ausbreitung der Welle beschreibt. Es gilt

$$\psi(\vec{r},t) = \int d^3r' \int dt'\; G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')\, f(\vec{r}\,',t') \tag{B.8}$$

Die Green-Funktion G erhält man aus ihrer Fouriertransformierten (FT)

$$\begin{aligned} G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k \int d\omega\, g(\vec{k},\omega)\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}e^{-i\omega(t-t')} , \qquad (B.9) \\ \Box G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t') &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k \int d\omega\, g(\vec{k},\omega)\left[-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right] e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}e^{-i\omega(t-t')} , \end{aligned}$$

wobei $\Box = \triangle_r - \frac{1}{c^2}\partial_t^2$ ist, indem man diese mit den FT der δ-Funktionen vergleicht

$$\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k \int d\omega\; e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}e^{-i\omega(t-t')} \tag{B.10}$$

Daraus folgt

$$g(k,\omega) = \frac{c^2}{\omega^2 - \vec{k}^2c^2}\;, \tag{B.11}$$

d. h., die FT von G ist singulär an $\omega = \pm kc$. Da dies Pole 1. Ordnung sind, kann man das Zeit-Integral in Gleichung (B.9) einfach mit dem Residuensatz lösen.

Die Lage der Pole ergibt sich dabei aus der Kausalitätsannahme. Schließt man den Kreis gemäß der Funktion $e^{-i\omega(t-t')}$ für $t < t'$ in der OHE, so bedeutet dies physikalisch, daß auf das Teilchen Ψ zur Zeit t Einflüsse aus *späteren* Zeiten t' einwirken. Das darf aber nicht sein. Daher müssen alle Pole in der UHE liegen, womit sich $t > t'$ ergibt. D. h., eine kausale Wechselwirkung vorausgesetzt, muß die Funktion, die diese Wechselwirkung beschreibt, in der OHE analytisch sein.

Für die hier als Beispiel genommene Greenfunktion ergibt sich somit als Lösung

$$G = \begin{cases} \frac{1}{\pi R}\left[\delta(\tau - \frac{R}{c}) - \delta(\tau + \frac{R}{c})\right] & (\tau > 0) \\ 0 & (\tau < 0) \end{cases} \tag{B.12}$$

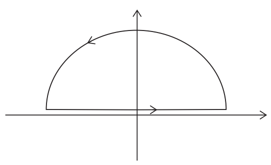
mit $\tau = t - t'$, $R = |\vec{r}-\vec{r}\,'|$.

B.3 Von der Analytizität zur Dispersionsrelation

Für eine beliebige Funktion, die analytisch in der OHE ist, kann man eine Dispersionsrelation herleiten. Sie basiert auf Cauchys Theorem

$$\oint \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i \cdot f(z_0)\;. \tag{B.13}$$

Der Weg, über den integriert wird, ist dabei beliebig, kann also die gesamte OHE umfassen.



Gilt nun $f(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$, so trägt der Bogen im Unendlichen nicht bei, und es ist

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{f(x)}{x - z_0}\;. \tag{B.14}$$

Für $z_0 = x_0 + i\epsilon$, $\epsilon \to 0^+$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{f(x)}{x - (x_0 + i\epsilon)} \\ &= \frac{\mathcal{P}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{f(x)}{x - x_0} \; . \end{aligned} \tag{B.15}$$

Ist f komplexwertig, folgen daraus direkt die Dispersionsrelationen

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int dx \, \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - x_0} \tag{B.16}$$

und

$$\operatorname{Im} f(x_0) = -\frac{\mathcal{P}}{\pi} \int dx \, \frac{\operatorname{Re} f(x)}{x - x_0} \; . \tag{B.17}$$