Quarkphasen in Neutronensternen und die Dritte Familie kompakter Sterne

Inaugural-Dissertation

zur
Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Justus-Liebig-Universität Gießen
Fachbereich Physik

vorgelegt von
Klaus Schertler
aus Braunfels

Gießen 1999

D26
Dekan: Prof. Dr. Karl-Heinz Schartner
I. Berichterstatter: PD Dr. Markus H. Thoma
II. Berichterstatter: Prof. Dr. Werner Scheid
Tag der mündlichen Prüfung: 27.08.1999

But I don't have to know an answer. I don't feel frightened by not knowing things, by being lost in the mysterious universe without having any purpose, which is the way it really is, as far as I can tell, possibly. It doesn't frighten me.

R.P. Feynman

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

> *"I bow low. I have observed the apparition of a guest star. Its color was an iridescent yellow... The land will know great prosperity."*
>
> *Yang Wei-Tek, Chinesischer Hofastronom, 1054.*

Unter der Vielfalt astronomischer Himmelsobjekte und Erscheinungen gehören Neutronensterne wohl zu den extremsten und faszinierendsten Objekten, die der Mensch in der Lage ist, von seiner irdischen Warte aus zu studieren. Schon die Geburt eines Neutronensterns in einer Supernovaexplosion gehört zu den spektakulärsten und energetischsten Prozessen unseres Universums. Die am Lebensende eines massiven Sterns freiwerdende gravitative Bindungsenergie des im Zentrum der Supernova entstehenden Neutronensterns ist sogar größer als die in dem etwa 10 Millionen Jahre dauernden Leben des Vorgängersterns abgestrahlte Fusionsenergie. Im Juli 1054 beobachteten chinesische Astronomen die Ankunft eines „Gaststerns", welcher mehrere Wochen lang selbst am Taghimmel zu sehen war. Dabei handelte es sich um eine Supernova, deren eindrucksvolle Überreste wir heute noch als den Krebsnebel beobachten können. Dieser Nebel ist die während der Supernova abgestoßene Gashülle des Vorgängersterns. Im Zentrum des Krebsnebels befindet sich ein rotierender Neutronenstern, der Krebs-Pulsar. Dieser rotiert etwa 30 mal in der Sekunde um seine eigene Achse. Heute sind uns weit über 800 Pulsare bekannt, welche mit Frequenzen bis zu 640 Umdrehungen pro Sekunde rotieren. Schon ein Jahr nach der Entdeckung des Neutrons durch Chadwick im Jahre 1932 wurde von Walter Baade und Fritz Zwicky vermutet, daß während einer Supernova ein sehr kompaktes Objekt aus Neutronen – ein Neutronenstern – entstehen könnte.

> *"With all reserve we advance the view that supernovae represent the transition from ordinary stars into* <u>*neutron stars*</u> *which in their final stages consist of closly packed neutrons."*
>
> *W. Baade und F. Zwicky, 1933 [1].*

Baade und Zwicky führten den Neutronenstern ein, um die bei einer Supernova freiwerdende Energie als gravitative Bindungsenergie deuten zu können. Nur ein sehr kompaktes Objekt konnte dafür in Frage kommen. Inzwischen sind uns etwa 10 Neutronensterne bekannt, bei denen die Assoziation mit Supernovaüberresten heute noch möglich ist [2]. K.S. Thorne bezeichnet die Veröffentlichung [1] von Baade und Zwicky als eine der „vorausblickendsten Dokumente in der Geschichte der Physik und Astronomie“ [3]. Schließlich dauerte es etwa 40 Jahre, bis die Existenz von Neutronensternen durch die Beobachtung von Pulsaren [4] und deren Interpretation als rotierende Neutronensterne [5] gesichert war. Die ersten theoretischen Beschreibungen eines Objektes von „dicht gepackten Neutronen“ erfolgte (indirekt) durch Landau in seiner Arbeit “Origin of Stellar Energy” aus dem Jahre 1938 [6]. Landau schlug vor, daß die Erzeugung von Energie in Sternen durch das Herabfallen von Atomen auf einen hochdichten Neutronenkern[1] innerhalb des Sterns erfolge. Letztlich versuchte Landau durch diese Arbeit die Aufmerksamkeit der Öffentlichkeit auf sich zu lenken, um dem Terror von Stalins Säuberungsaktionen in der Mitte der 30er Jahre durch ausreichende Popularität entgehen zu können[2] [3]. So bat er Niels Bohr um eine Stellungnahme zu seiner Arbeit, um diese in einer einflußreichen Moskauer Zeitung zu veröffentlichen [3]. Zwei Monate nach der Veröffentlichung seiner Arbeit in der Zeitschrift Nature kam Landau unter dem Vorwurf der Spionage für Deutschland in ein Moskauer Gefängnis. Noch im gleichen Jahr widerlegten J.R. Oppenheimer und R. Serber die Arbeit von Landau [7]. Dennoch entsprechen Landaus Neutronenkerne exakt der Idee der Neutronensterne von Baade und Zwicky[3]. Auf die Arbeit von Landau folgten die wichtigen Arbeiten von J.R. Oppenheimer und G. Volkoff [10] in Zusammenarbeit mit R.C. Tolman [11]. In diesen Arbeiten wurden zum ersten Mal die Gleichungen des allgemeinrelativistischen hydrostatischen Gleichgewichts für sphärische Sterne abgeleitet. Diese Gleichungen sind heute als Oppenheimer-Volkoff-Tolman-Gleichungen (TOV-Gleichungen) bekannt. Sie spielen eine zentrale Rolle in der Untersuchung der Struktur von Neutronensternen. So verbinden die TOV-Gleichungen die Eigenschaften der Neutronensternmaterie (d.h. ihrer Zustandsgleichung) mit den Massen und Radien der Neutronensterne. In der Arbeit von Oppenheimer und Volkoff [10] wurde angenommen, daß ein Neutronenstern aus einem freien Fermigas von Neutronen aufgebaut ist. Daraus berechneten sie eine Maximalmasse des Neutronensterns von $0.7\,M_\odot$ ($M_\odot$ ist die Sonnenmasse) bei einem Radius von etwa 10 km. Neutronensterne mußten also sehr kleine Objekte mit enormen mitt-

[1]Landau benutzte nicht den Begriff des Neutronensterns von Baade und Zwicky.

[2]Landau war von 1929 bis 1930 als Postdoc in Westeuropa, u.a. in Deutschland.

[3]Man sagt sogar [8, 9], daß von Landau schon am Abend, an dem die Entdeckung des Neutrons in Kopenhagen bekannt wurde, im Gespräch mit Bohr und Rosenfeld (über die Konsequenzen dieser Entdeckung) auch die Möglichkeit von kalten und dichten Sternen aus Neutronen erwähnt wurde.

leren Dichten im Bereich von normaler Kerndichte sein[4]. Die Verbindung zwischen der Zustandsgleichung (EOS) der kalten Materie und den Massen und Radien der daraus berechneten Neutronensterne durch die TOV-Gleichungen versetzt uns heute in die einmalige Lage, aus beobachteten Massen und Radien Rückschlüsse auf die Eigenschaften der EOS zu ziehen. So wissen wir heute, daß die meisten der beobachteten Neutronensterne Massen im Bereich von $1.4\,M_\odot$ besitzen (siehe Abbildung 1). Daraus können wir z.B. ersehen, daß Oppenheimers Annahme eines freien Neutronengases im Neutronenstern (mit einer Maximalmasse von $0.7\,M_\odot$) nicht richtig zu sein scheint. Man benötigt offensichtlich die repulsiven Kernkräfte der starken Wechselwirkung, um auch Sterne höherer Masse erklären zu können. So benutzen wir heute Modelle, die neben den Neutronen weitere hadronische Freiheitsgrade im schwachen Gleichgewicht mit Leptonen beinhalten und ihre Wechselwirkung untereinander berücksichtigen. Die beobachteten Massen setzen Bedingungen an die Eigenschaften (z.B. an die Steifheit[5]) der EOS. Weitere Bedingungen könnten im Falle bekannter Neutronensternradien an die EOS gestellt werden. Die modernen experimentellen Beobachtungsmöglichkeiten der Astrophysik in verschiedenen Wellenlängenbereichen erlauben in letzter Zeit auch diesbezüglich vermehrt interessante Aussagen. In Abbildung 2 sind einige experimentelle Radiusabschätzungen für Neutronensterne zusammengestellt. Die Abschätzungen der Radien sind allerdings nur indirekt unter zusätzlichen Modellannahmen [14] - [20] möglich und daher mit gewisser Vorsicht zu betrachten. Um so mehr ist in Abbildung 2 bemerkenswert, daß trotz der Unterschiedlichkeit der betrachteten Systeme (vergleiche Tabelle 1) und der Unsicherheiten in den Abschätzungen alle Radien bei sehr kleinen Werten unterhalb von etwa 11 km zu liegen scheinen. Wenn sich diese Tendenz als richtig herausstellen sollte und z.B. Neutronensterne mit Radien von 9 km existieren würden, so hätte dies wichtige Konsequenzen für unser Verständnis der EOS bei hohen Dichten. Rein hadronische EOS's (d.h. EOS's mit Nukleonen und Hyperonen als wesentliche Freiheitsgrade) hätten z.B. Schwierigkeiten, solch kleine Radien erklären zu können. (Wir diskutieren die hadronischen EOS's in Kapitel 1). Löst man die TOV-Gleichungen mit diesen EOS's, so sieht man, daß Radien für einen Neutronenstern mit $1.4\,M_\odot$ im Bereich von $13-15$ km liegen - also viel zu groß sind[6]. Die Lösungen der TOV-Gleichungen – die sogenannten Masse-Radius-Relationen – sind für vier hadronische EOS's in Abbildung 3 gezeigt. Die experimentellen Hinweise auf sehr kleine Neu-

[4]Multiplizieren wir z.B. naiv die normale Energiedichte des Atomkerns von etwa $140\,\mathrm{MeV/fm^3}$ mit dem Volumen eines Sterns mit 10 km Radius, so erhalten wir etwa $0.6\cdot 10^{60}$ MeV. Dies entspricht etwa einer Masse von $0.5\,M_\odot$.

[5]Wir werden später noch genauer spezifizieren, was wir unter der „Steifheit“ der EOS verstehen.

[6]Auch die Radien von weicheren, nichtrelativistischen hadronischen EOS's unterschreiten typischerweise nicht den Bereich von $11-12$ km [21].

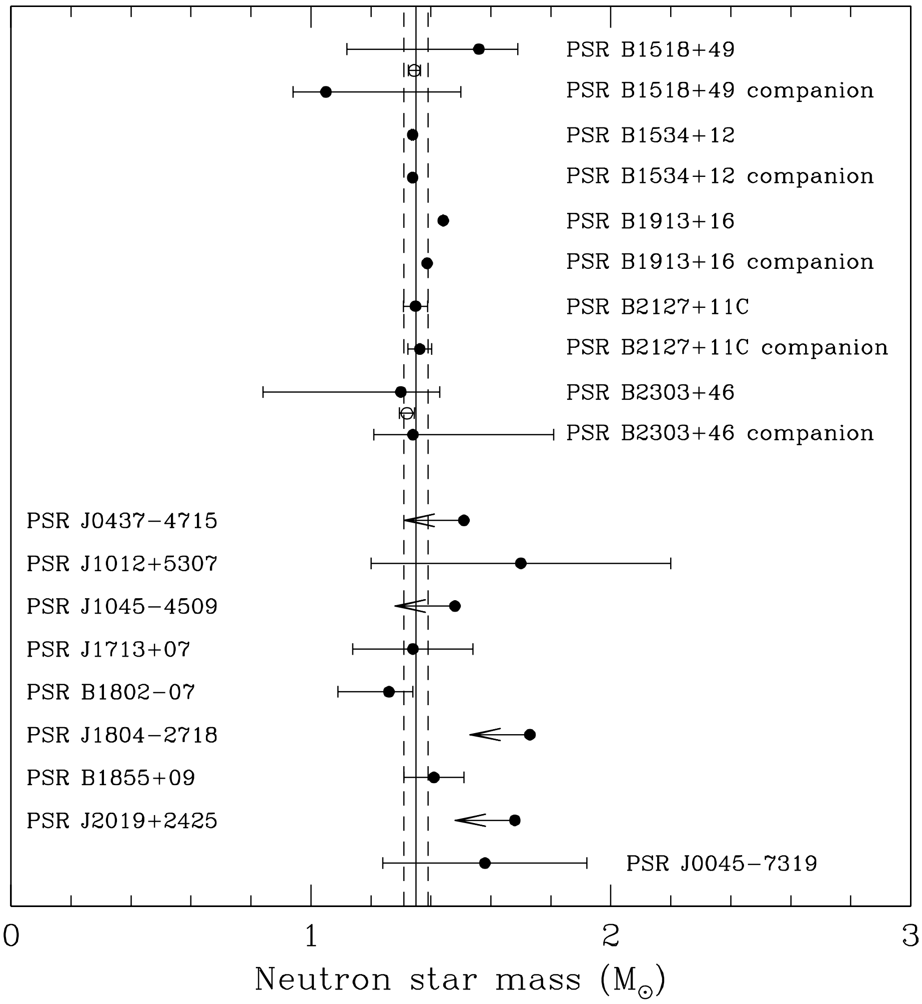

Abbildung 1: Beobachtete Neutronensternmassen in Einheiten der Sonnenmasse $M_\odot$ [12]. Bei den ersten 10 Einträgen handelt es sich um Massenbestimmungen in Doppelsternsystemen aus zwei Neutronensternen (Radiopulsaren). Der Pulsar PSR B1913+16 ist der berühmte Hulse-Taylor-Pulsar [13]. Die Massen dieser Sterne sind teilweise bis auf Fehler von nur $10^{-3}\,M_\odot$ bekannt. Bei den weiteren Einträgen handelt es sich um Neutronensterne in Binärsystemen mit Weißen Zwergen bzw. mit einem Hauptreihenstern (letzter Eintrag).

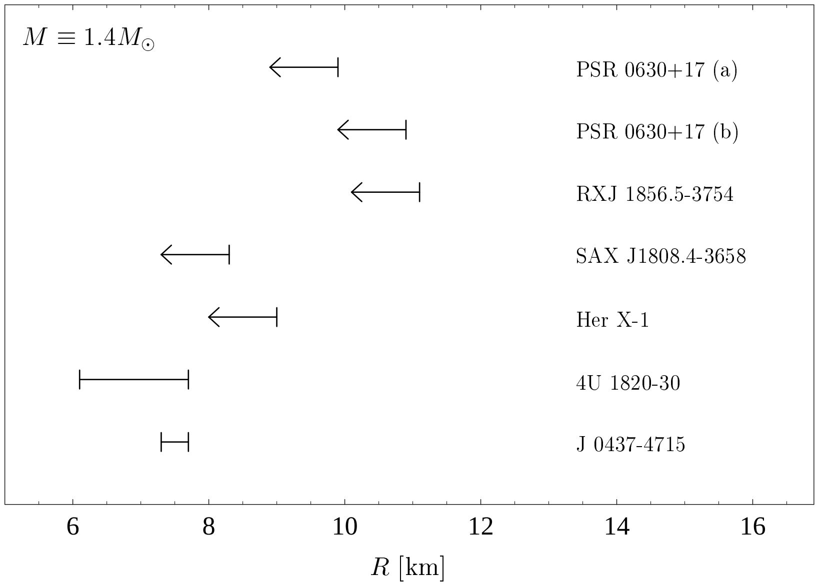

Abbildung 2: Radienabschätzungen für verschiedene Neutronensterne unter der Annahme, daß diese eine typische Neutronensternmasse von $M = 1.4M_\odot$ aufweisen. Für den Neutronenstern PSR 0630+17 wurde (a) Schwarzkörperstrahlung und (b) eine Wasserstoff-Atmosphäre angenommen [14]. Die Referenzen können Tabelle 1 entnommen werden.

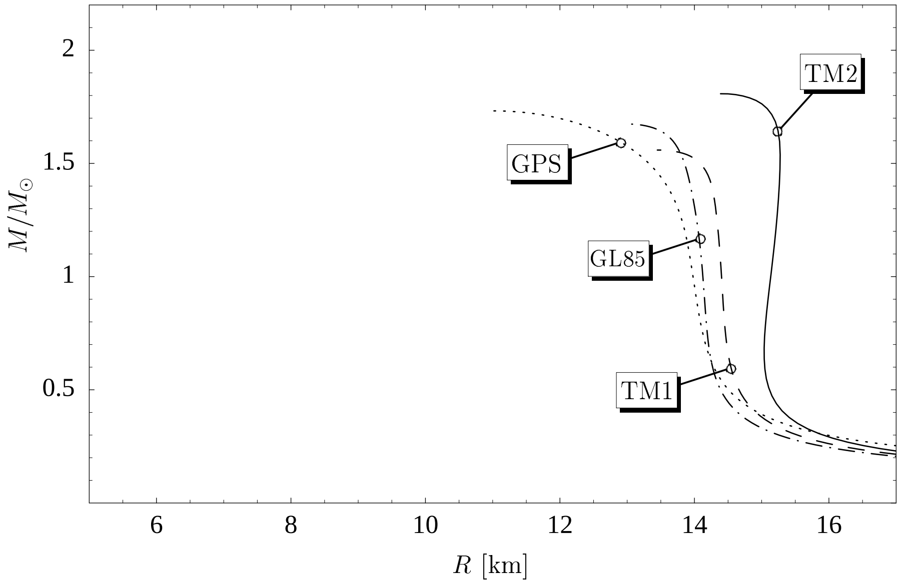

Abbildung 3: Masse-Radius Relationen für vier verschiedene hadronische EOS's (siehe Kapitel 1). Die Radien für typische Neutronensternmassen ($M \approx 1.4M_\odot$) liegen im Bereich von $13 - 15$ km. Die experimentellen Radiusabschätzungen aus Abbildung 2 scheinen mit diesen EOS's nicht erklärbar zu sein.

Neutronensterne mit Radiusabschätzungen			
Name	Typ	Begleiter	Ref.
PSR 0630+17 (Geminga)	Isolierter Neutronenst.	-	[14]
RXJ 1856.5-3754	Isolierter Neutronenst.	-	[15]
SAX J1808.4-3658	X-ray Burster	Stern	[16]
Hercules X-1	X-ray Pulsar	Stern	[17, 18]
4U 1820-30	X-ray Burster	Weißer Zwerg	[19]
J 0437-4715	X-ray Pulsar	Weißer Zwerg	[20]

Tabelle 1: Neutronensterne mit Radiusabschätzungen aus Abbildung 2.

tronensternradien stehen also mit den Vorhersagen der hadronischen EOS's nicht im Einklang. Kleine Radien scheinen indes auf eine weichere EOS hinzudeuten, bei der die gravitative Anziehungskraft im Stern in der Lage ist, diesen stärker zu komprimieren. Eines der faszinierendsten Szenarien zur Erklärung einer „weichen Phase“ im Neutronenstern ist wohl die hypothetische Existenz eines Deconfinement-Phasenübergangs im Inneren des Sterns. Beim Deconfinement-Phasenübergang lösen sich die Hadronen in ihre Substruktur, die Quarks, auf. Man erwartet diesen Phasenübergang sowohl bei sehr hohen Temperaturen (wie sie in Schwerionenkollisionen erzeugt werden können) als auch bei niedrigen Temperaturen und hohen Dichten (wie sie auf natürliche Weise im Inneren von Neutronensternen vorkommen). Eines der wesentlichen Ziele dieser Arbeit ist die Untersuchung des Einflusses von Quarkphasen auf die Struktur von Neutronensternen. So werden wir u.a. versuchen, die Frage zu beantworten, um welchen Anteil sich der Radius eines rein hadronischen Sterns reduziert, wenn tatsächlich Quarkphasen im Neutronenstern existieren würden. Da wir in naher Zukunft vermehrt mit experimentellen Ergebnissen über Massen und Radien von Neutronensternen rechnen können, sind solche Untersuchungen unerläßlich für eine sinnvolle Interpretation dieser Daten unter Benutzung verschiedener Modelle und Szenarien für den Aufbau eines Neutronensterns.

In den vergangenen knapp 70 Jahren seit der Postulierung des Neutronensterns durch Baade und Zwicky hat dieses extreme Objekt nichts von seiner Faszination verloren. Noch immer stellen wir uns die Frage, wie die Materie in einem Objekt aufgebaut sein kann, in dem ein Kubikzentimeter die unvorstellbare Masse von einer Milliarde Tonnen besitzt. Wir wissen es nicht. Vielleicht können uns aber schon jetzt die Radien der Neutronensterne andeuten, wonach wir suchen müssen.

Modellübersicht

Die Berechnung von Massen und Radien von Neutronensternen setzt die Kenntnis der Zustandsgleichung (EOS) von kalter und dichter Materie in einem Dichtebereich voraus, welcher sich über etwa 14 Größenordnungen erstreckt. In dieser EOS müssen sowohl die Eigenschaften von atomarem Eisen enthalten sein als auch die von hochkomprimierter neutronenreicher Kernmaterie. Auch das Szenario einer Quarkphase – welches wir in dieser Arbeit vorrangig studieren – ist im Inneren eines Neutronensterns denkbar. Leider gibt es gegenwärtig keine *einzelne* Theorie, die in der Lage wäre, die verschiedenen Dichtebereiche mit ihren individuellen Freiheitsgraden und relevanten Wechselwirkungen gemeinsam zu beschreiben. Wir sind aus diesem Grunde darauf angewiesen, verschiedene EOS's zu verwenden, die in einem beschränkten Dichtebereich in der Lage sein sollten, die Eigenschaften der dort populierten Freiheitsgrade angemessen zu beschreiben (Teil I dieser Arbeit).

In dem von uns verwendeten Modell wollen wir zwischen EOS's zur Beschreibung der hadronischen Materie und EOS's zur Beschreibung der Quarkphase unterscheiden. Diese Unterscheidung scheint sinnvoll, da erwartet wird, daß sich beim sogenannten Deconfinement-Phasenübergang (d.h. beim Übergang von Hadronen zu den Konstituenten der Hadronen – den Quarks) die Eigenschaften der EOS beträchtlich ändern. Zur Beschreibung der hadronischen Phase benutzen wir das sogenannte „Relativistic Mean-Field“-Modell (RMF-Modell). Dieses besprechen wir in Kapitel 1.2. In diesem Modell sind im wesentlichen nukleonische bzw. baryonische Freiheitsgrade enthalten. Bei subnuklearen Dichten, bei denen die Nukleonen noch in Kernen gebunden sind, verwenden wir die sogenannte Baym-Pethick-Sutherland EOS (BPS-EOS) die wir in Kapitel 1.1 diskutieren. Die BPS-EOS beschreibt die „Kruste“ des Neutronensterns. Die Beschreibung der Quarkphase erfolgt in dieser Arbeit alternativ im Bag-Modell (Kapitel 2.1) oder im NJL-Modell (Kapitel 2.2). Die Berechnung des Deconfinement-Phasenübergangs von der hadronischen Phase zur Quarkphase diskutieren wir in Kapitel 3 unter Verwendung der Gibbs-Bedingung. Die Eigenschaften der durch die Phasenübergangsrechnung erhaltenen EOS's diskutieren wir in Kapitel 4. Aus ihnen berechnen wir in Teil II dieser Arbeit sowohl die Massen und Radien von Neutronensternen als auch deren innere Struktur (Kapitel 6). Besonderen Wert legen wir hierbei auf eine systematische Untersuchung des Einflusses der Modellparameter auf die Struktur und die Radien der Neutronensterne.

Interessanterweise finden wir unter den von uns berechneten EOS's Lösungen, welche die Existenz einer „Dritten Familie“ von kompakten Sternen (neben den bekannten Familien der Neutronensterne und der Weißen Zwerge) ermöglichen. Die daraus folgenden wichtigen Konsequenzen für einen experimentellen Nachweis eines Phasenübergangs in Neutronensternen werden in Teil III dieser Arbeit erläutert.

Häufig benutzte Abkürzungen und Variablenbezeichnungen sind im Anhang A auf Seite 105 zusammengestellt.

Teil I

Zustandsgleichungen und Phasenübergang

Kapitel 1

Beschreibung der hadronischen Phase

Kapitelübersicht

1.1 Subnukleare Dichten

Neutronensternmaterie[1] deckt einen Dichtebereich von etwa 14 Größenordnungen ab. Beginnend von der Oberfläche des Neutronensterns, welche aus Eisen (^{56}Fe) mit einer Dichte von $\epsilon \approx 8\,\mathrm{g/cm^3}$ besteht, können im Zentrum des Sterns Dichten von einem Vielfachen der normalen Kerndichte von $\epsilon_0 \approx 2.5 \times 10^{14}\,\mathrm{g/cm^3}$ erreicht werden. Da gegenwärtig keine *einzelne* Theorie existiert, welche den gesamten Dichtebereich mit seinen spezifischen Freiheitsgraden angemessen beschreiben kann, sind wir gezwungen, auf verschiedene Modelle zurückzugreifen. Diese sollten geeignet sein, einen beschränkten Dichtebereich mit seinen jeweiligen Freiheitsgraden sinnvoll zu beschreiben. In diesem Kapitel beschreiben wir die EOS's, welche wir für subnukleare Dichten, d.h. für $\epsilon \lesssim \epsilon_0$ verwenden. Die im Neutronenstern mit diesem Dichtebereich verbundene äußere Schicht wird als *Neutronensternkruste* bezeichnet. Obwohl die subnuklearen Dichten etwa 13 Größenordnungen der EOS überdecken, trägt die Neutronensternkruste nur einen geringen Anteil (etwa 1%) zur Gesamtmasse des Sterns bei. Ihre Dicke liegt typischerweise im Bereich von 10% des Neutronensternradius [22]. Für einen Überblick über die Physik der Neutronensternkruste siehe [22, 23].

[1]Damit bezeichnen wir kalte, ladungsneutrale Materie im schwachen Gleichgewicht (siehe Anhang B für eine Diskussion des schwachen Gleichgewichts).

Wir benutzen für subnukleare Dichten die sogenannte Baym-Pethick-Sutherland-EOS (BPS-EOS) [24, 8]. Diese setzt sich wiederum (wie in Tabelle 1.1 gezeigt) aus verschiedenen EOS's zusammen. Für niedrige Dichten von $\epsilon \approx 10\,\mathrm{g/cm^3}$ bis etwa $10^7\mathrm{g/cm^3}$

Dichtebereich [g/cm^3]	Freiheitsgrade	Druck	Referenz
$8 \times 10^0 - 1 \times 10^4$	e^-, ${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}$	e^-	Feynman, Metropolis, Teller [25]
$1 \times 10^4 - 1 \times 10^7$	e^-, ${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}$	e^-	Baym Pethick, Sutherland [24]
1×10^7	$\Rightarrow e^-$ werden relativistisch und Kerne neutronenreicher		
$1 \times 10^7 - 4 \times 10^{11}$	e^-, Kerne	e^-	Baym Pethick, Sutherland [24]
4×10^{11}	$\Rightarrow n$ „tropfen“ aus den Kernen (neutron drip)		
$4 \times 10^{11} - 1 \times 10^{14}$	e^-, Kerne, n	e^-, n	Baym, Bethe, Pethick [26]

Tabelle 1.1: Zustandsgleichungen für subnukleare Dichten und ihre wesentlichen Freiheitsgrade. Der Druck wird in allen Dichtebereichen von den entarteten Elektronen dominiert. Ab $\epsilon \approx 10^7\mathrm{g/cm^3}$ werden die Elektronen relativistisch und die Kerne mit steigender Dichte neutronenreicher. Erst über der *neutron drip density* von $\epsilon_{drip} \approx 4 \times 10^{11}\mathrm{g/cm^3}$ steigt langsam der Entartungsdruck der Neutronen.

besteht die Materie aus ${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}$. Dieses liegt bei geringen Dichten atomar vor, wird aber mit steigender Dichte mehr und mehr ionisiert. Die ionisierten Kerne richten sich in einem Gitter aus, um die Coulomb-Energie zu minimieren. Der Druck der Materie wird durch den Entartungsdruck der Elektronen dominiert, während die Kerne primär zur Energiedichte beitragen. Mit weiter steigender Dichte (und dem damit verbundenem Anstieg des chemischen Potentials der Elektronen μ_e) wird der inverse β-Zerfall

$$ {}^{A}Z + e^- \longrightarrow {}^{A}(Z-1) + \nu \tag{1.1}$$

möglich. Dadurch werden Elektronen in den Protonen der Kerne absorbiert, wodurch die Kerne neutronenreicher werden. (Die Neutrinos verlassen den Stern). Diese sogenannte *neutronization*[2] beginnt bei Dichten von etwa $\epsilon \approx 10^7\mathrm{g/cm^3}$. Die Kerne werden nun immer masse- und neutronenreicher bis bei einer Dichte von $\epsilon_{drip} \approx 4 \times 10^{11}\mathrm{g/cm^3}$ (der *neutron drip density*) die am schwächsten gebundenen Neutronen die Kerne verlassen. Die freien Neutronen bilden ein Fermi-Gas, welches mit weiter steigender Dichte den Entartungsdruck der Elektronen langsam substituiert. Bei Dichten von $\epsilon \approx 10^{12}\mathrm{g/cm^3}$ beträgt der Anteil der Neutronen am Gesamtdruck etwa 20%, bei

[2] Durch das dadurch bedingte Absinken des Entartungsdruckes der Elektronen wird letztlich der stabile Dichtebereich von Weißen Zwergen auf maximale Zentraldichten von etwa $\epsilon \approx 10^9\mathrm{g/cm^3}$ beschränkt.

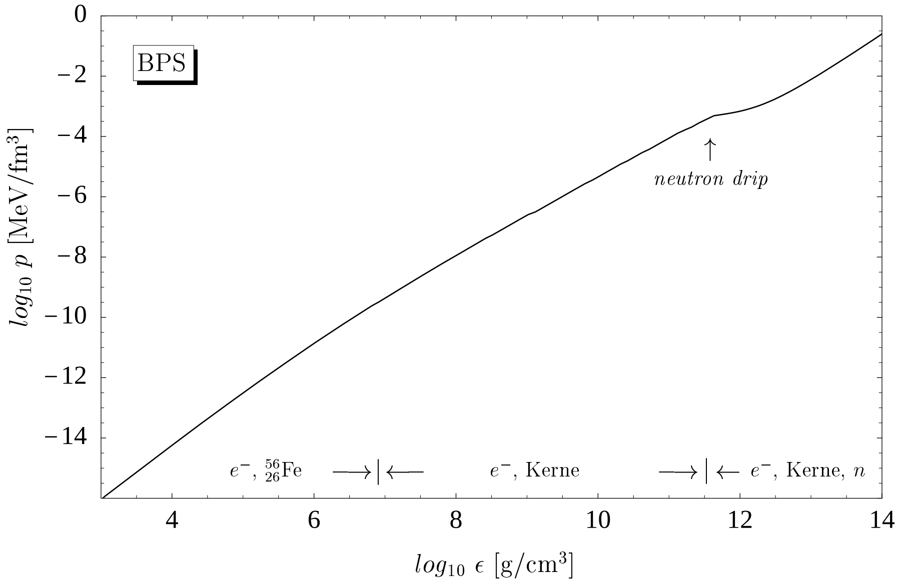

Abbildung 1.1: BPS Zustandsgleichung [24] für subnukleare Dichten.

$\epsilon \approx 10^{13}$g/cm^3 schon 80% [8]. Die Struktur von individuellen Kernen bleibt bis zu Dichten von $\epsilon \approx 10^{14}$g/cm^3 erhalten. Darüber hinaus benutzen wir das RMF-Modell (s. Kapitel 1.2) zur Beschreibung von Kernmaterie mit Nukleonen als elementaren Freiheitsgraden. Als Übergangsdichte von der subnuklearen EOS zur EOS der Kernmaterie benutzen wir den Schnittpunkt beider EOS's in der Form $p = p(\epsilon)$. Die so erhaltene Übergangsdichte liegt (bei den verwendeten EOS's) bei etwa $0.3\rho_0$ mit $\rho_0 = 0.17\,\mathrm{fm}^{-3}$. Dies ist (in Anbetracht der einfachen Konstruktion) in angemessener Übereinstimmung mit dem Ergebnis von $0.6\rho_0$ für die Übergangsdichte aus [23]. Abbildung 1.1 zeigt die verwendete BPS-EOS mit ihren jeweiligen Freiheitsgraden.

1.2 RMF-Modelle

Bei Dichten im Bereich von normaler Kerndichte beginnen die Atomkerne zu überlappen und sich in ihre nukleonischen Freiheitsgrade aufzulösen. Zur Beschreibung der dann vorliegenden Kernmaterie benutzen wir die Ergebnisse des sogenannten *relativistic mean-field-models* (RMF-Modells), welches eine Erweiterung des Walecka-Modells [27] ist. Das RMF-Modell wird weithin zur Beschreibung von dichter Kernmaterie, insbesondere in Neutronensternen benutzt [28, 29, 30]. (Für eine alternative Beschreibung der EOS in nichtrelativistischen Modellen siehe z.B. [21]). Im Rahmen des RMF-Modells verwenden wir 3 EOS's (GL85, TM1 und TM2) aus einer Arbeit von Schaffner und Mishustin [30] sowie eine EOS von Ghosh, Phatak und Sahu (GPS) [31].

Einige Eigenschaften dieser EOS's für symmetrische Kernmaterie bei Sättigungsdichte ρ_S sind in Tabelle 1.2 angegeben[3]. All diese EOS's enthalten neben den Nukleonen (n

RMF-EOS	TM1	TM2	GL85	GPS
Referenz	[30, 32]	[30, 32]	[30, 33, 29]	[31]
ρ_S [fm^{-3}]	0.145	0.132	0.145	0.150
B/A [MeV]	-16.3	-16.2	-15.95	-16.0
K [MeV]	281	344	285	300
m_N^*/m_n	0.634	0.571	0.770	0.830
a_{sym} [MeV]	36.9	35.8	36.8	32.5
Freiheitsgrade	a	a	a	b

a) n, p, e$^-$, μ^-, Λ, Σ^-, Σ^0, Σ^+, Ξ^-, Ξ^0

b) n, p, e$^-$, μ^-, Λ, Σ^-

Tabelle 1.2: Eigenschaften der Kernmaterie bei Sättigungsdichte ρ_S. B/A ist die Bindungsenergie, K die Inkompressibilität, m_N^*/m_n die effektive Nukleonenmasse und a_{sym} die Asymmetrie-Energie. Die angegebenen Freiheitsgrade (Teilchen) beziehen sich auf die Zustandsgleichung im schwachen Gleichgewicht.

und p) und den Leptonen (e^- und μ^-) auch hyperonische Freiheitsgrade, welche im schwachen Gleichgewicht ab Dichten von etwa 2–3ρ_0 populiert werden. Die EOS's TM1, TM2 und GL85 enthalten die Hyperonen Λ, Σ^-, Σ^0, Σ^+, Ξ^- und Ξ^0, während in der GPS-EOS nur die Hyperonen Λ und Σ^- enthalten sind. Da RMF-Modelle ausführlich in der Literatur diskutiert sind, wollen wir uns hier auf eine Diskussion der Ergebnisse und ihrer Relevanz für Neutronensterne beschränken und verweisen auf Glendenning [34] für eine Einführung in die RMF-Modelle und auf [30, 31] für Details der verwendeten EOS's.

Abbildung 1.2 zeigt den Druck als Funktion der Energiedichte für die betrachteten RMF-EOS's für ladungsneutrale Materie im schwachen Gleichgewicht[4]. Abbildung 1.3 zeigt die gleichen EOS's im Bereich niedrigerer Dichten. Offensichtlich nehmen die Unsicherheiten in den EOS's mit steigender Dichte stark zu. Diese Unsicherheiten mögen einerseits in dem noch unvollkommenen Verständnis der starken Wechselwirkung begründet sein, andererseits kann sich bei sehr hohen Dichten auch eine Grenze der Anwendbarkeit des RMF-Modells andeuten [21]. Wie wir in Kapitel 6 noch sehen werden, liegen die zentralen Energiedichten für einen typischen Neutronenstern der

[3] Wir bezeichnen die Sättigungs-Kerndichte der jeweiligen EOS hier mit ρ_S um diese von dem in dieser Arbeit durchgehend zur Skalierung verwendeten Wert von $\rho_0 = 0.17\,\mathrm{fm}^{-3}$ zu unterscheiden.

[4] Siehe Anhang B für eine Diskussion des schwachen Gleichgewichts.

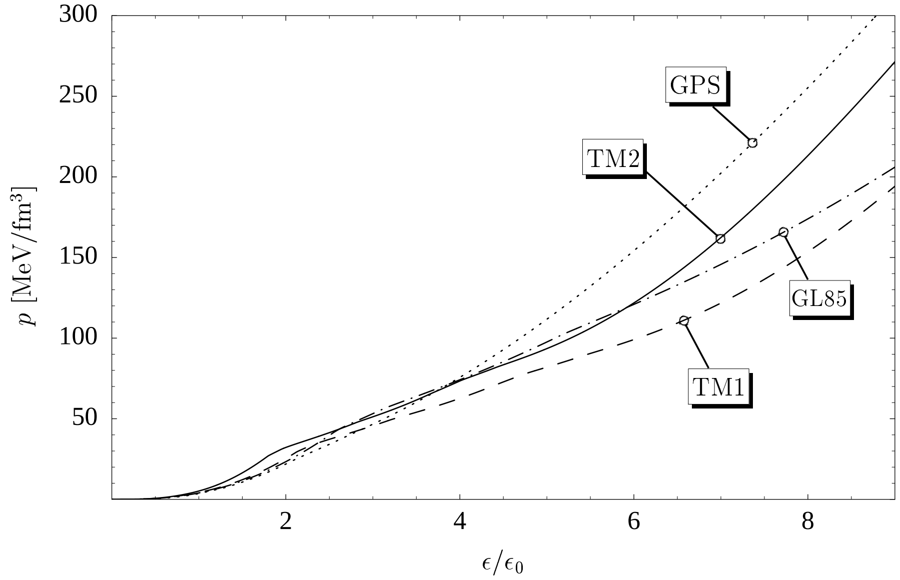

Abbildung 1.2: Druck als Funktion der Energiedichte für die benutzten ladungsneutralen RMF-EOS's [30] im schwachen Gleichgewicht. Die zentrale Energiedichte von typischen Neutronensternen liegt für diese EOS's bei $\epsilon \approx 2-4\epsilon_0$.

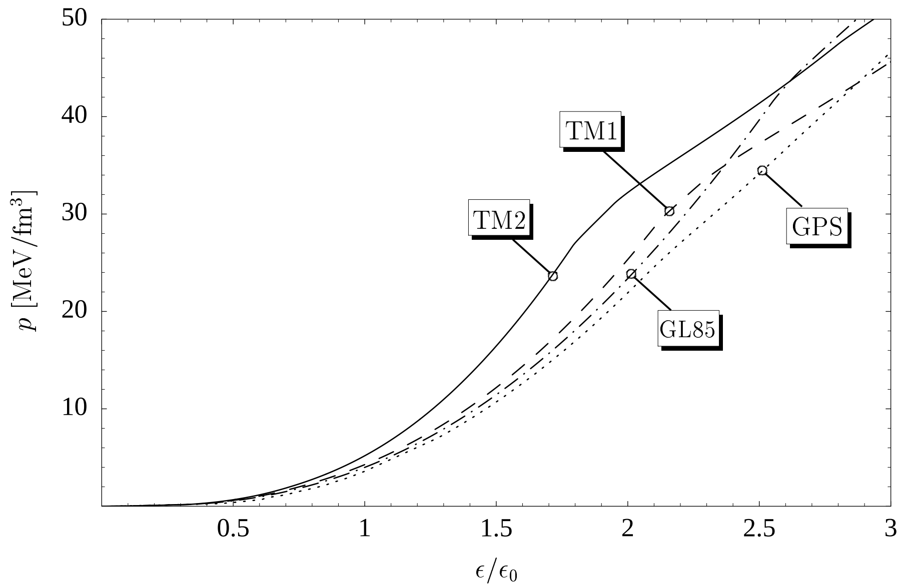

Abbildung 1.3: Druck als Funktion der Energiedichte (wie Abbildung 1.2) für niedrige Dichten. An dem Verlauf der TM2-EOS läßt sich knapp unterhalb von $2\epsilon_0$ leicht das Einsetzen der Hyperonen durch die weicher werdende EOS erkennen.

Masse $M = 1.4\,M_\odot$ für diese EOS's im Bereich von $2-4\epsilon_0$. Aber auch in diesem Dichtebereich können die Unsicherheiten in den hadronischen EOS Radiusdifferenzen von bis zu 2 km für diese Neutronensterne implizieren. Wir werden jedoch später (insbesondere im Zusammenhang mit der Kompaktheit von Neutronensternen mit Quarkphasen) sehen, daß einige Ergebnisse weitgehend unabhängig von der verwendeten hadronischen EOS's sind. In diesem Sinne ist es sogar fruchtbar, eine breitere Klasse an EOS's zu verwenden, um die Ergebnisse nicht von Artefakten einzelner EOS's abhängig zu machen.

In Abbildung 1.3 ist insbesondere bei der TM2-EOS der Einfluß der Hyperonen auf die EOS zu erkennen. Bei Dichten knapp unter $2\epsilon_0$ knickt die EOS etwas zu kleinerer Steigung ab. Dies liegt an dem Auftreten der Hyperonen in diesem Dichtebereich. Durch die erhöhte Anzahl von Freiheitsgraden wird der Druckanstieg leicht reduziert. Im allgemeinen wollen wir eine EOS als „weicher“ (oder „härter“) als eine andere EOS bezeichnen, falls ihr Druck bei gegebener Energiedichte kleiner (oder größer) als der Druck der anderen EOS ist. Dieser Sprachgebrauch ist allerdings mit etwas Vorsicht zu verwenden, da z.B. die GPS-EOS bei hohen Dichten (Abbildung 1.2) die härteste EOS ist, während sie bei niedrigeren Dichten (Abbildung 1.3) die weicheste ist. Entscheidend ist also der betrachtete Dichtebereich und seine Relevanz für die Struktur des Neutronensterns. Nach dem oben gesagten ist z.B. für einen (rein hadronischen) Stern mit $M = 1.4\,M_\odot$ der niedrigere Dichtebereich ($\lesssim 4\epsilon_0$) der wesentliche. Demnach ist unter den betrachteten EOS's für einen typischen Neutronenstern die GPS-EOS die weicheste und die TM2-EOS die härteste EOS (s. Abbildung 1.3). Tatsächlich haben wir schon in Abbildung 3 auf Seite 7 gesehen, daß die GPS-EOS in diesem Massebereich zu den kleinsten Neutronensternradien und die TM2-EOS zu den größten Radien führt. Dieser Zusammenhang zwischen der „Härte“ der EOS und dem Radius (und der Masse) von Neutronensternen begründet letztlich die Definition von „hart“ und „weich“ über den Druck als Funktion der Energiedichte[5]. Wir kommen in späteren Kapiteln mehrfach auf diesen Zusammenhang zurück.

Wie läßt sich die „Härte“ der EOS auf die Eigenschaften der Kernmaterie aus Tabelle 1.2 zurückführen? Bei dieser Frage ist zu beachten, daß die aufgeführten Werte nur die Eigenschaften der Materie bei Sättigungsdichte ρ_S der Kernmaterie widerspiegeln. Eine Extrapolation zu höheren Dichten ist demnach nur beschränkt möglich. Allerdings läßt sich z.B. bei Betrachtung der Tabelle 1.2 erkennen, daß die Weichheit der GPS-EOS im Vergleich zur TM2-EOS mit der kleineren Asymmetrie-Energie a_{sym}

[5]Üblicherweise wird in der Kernphysik die „Härte“ der EOS über die Energie pro Baryon als Funktion der Baryonendichte definiert. Diese Definition ist im Zusammenhang mit Neutronensternen aber weniger sinnvoll.

in Verbindung steht.

Zusammenfassend wollen wir im folgenden die BPS-EOS in Kombination mit den RMF-EOS's als die *hadronische Zustandsgleichung* oder die *hadronische Phase* (HP) bezeichnen.

1.3 Zusammenfassung

Im Kapitel 1 wurden die im Rest dieser Arbeit verwendeten hadronischen EOS's für den Bereich der subnuklearen (Kapitel 1.1) und nuklearen Dichten (Kapitel 1.2) vorgestellt.

- Für den subnuklearen Dichtebereich ($\epsilon \lesssim \epsilon_0$) verwenden wir die Baym-Pethick-Sutherland-EOS (BPS-EOS) [24]. Die wesentlichen Freiheitsgrade dieser EOS sind Elektronen und Atomkerne ($^{56}_{26}$Fe für $\epsilon \lesssim 10^7$g/cm^3), welche in einem Coulomb-Gitter angeordnet sind. Bei Dichten über der *neutron drip density* von $\epsilon_{drip} \approx 4 \times 10^{11}$g/cm^3 liegen auch ungebundene Neutronen vor. Der Druck der BPS-EOS wird primär vom Fermidruck der entarteten Elektronen erzeugt, wird aber für Dichten im Bereich von $\epsilon \approx 10^{13}$g/cm^3 durch den Fermidruck der Neutronen substituiert. Die Struktur der Atomkerne bleibt bis zu Dichten von etwa $\epsilon \approx 10^{14}$g/cm^3 erhalten. Die Tabelle 1.1 auf Seite 14 faßt wesentliche Eigenschaften der BPS-EOS in verschiedenen Dichtebereichen zusammen. Abbildung 1.1 auf Seite 15 zeigt den Druck der BPS-EOS als Funktion der Energiedichte.

- Die BPS-EOS beschreibt die Kruste eines Neutronensterns. Diese trägt nur zu einem geringem Anteil von etwa 1% zur Gesamtmasse eines typischen Neutronensterns bei. Die Dicke der Kruste liegt typischerweise im Bereich von 10% des Neutronensternradius.

- Bei Dichten oberhalb von etwa $\epsilon \approx 10^{14}$g/cm^3 lösen sich die Atomkerne in ihre nukleare Substruktur auf. Nun sind Nukleonen (n, p) die wesentlichen Freiheitsgrade. Zur Beschreibung dieser Phase greifen wir auf Ergebnisse von Schaffner und Mishustin [30] und Ghosh, Phatak und Sahu [31] im Rahmen des *relativistic mean-field-models* (RMF-Modells) zurück. Die vier benutzten EOS's (TM1, TM2, GL85 und GPS) sind in den Abbildungen 1.2 und 1.3 auf Seite 17 gezeigt. Ihre Eigenschaften bei Sättigungsdichte sind in Tabelle 1.2 auf Seite 16 zusammengefaßt.

- Die benutzen RMF-Modelle enthalten neben den Nukleonen (n und p) und den Leptonen (e^- und μ^-) auch hyperonische Freiheitsgrade, welche im schwachen Gleichgewicht ab Dichten von etwa 2–3ρ_0 populiert werden. Der Einfluß der Hyperonen auf die EOS's läßt sich in Abbildung 1.3 auf Seite 17 durch das abknicken der EOS's leicht erkennen.

Kapitel 2

Beschreibung der Quarkphase

Kapitelübersicht

2.1 Das Bag-Modell

2.1.1 Modellbeschreibung

In diesem Kapitel stellen wir die Beschreibung der Quarkphase (QP) in einem um Mediumeffekte erweiterten MIT Bag-Modell (kurz Bag-Modell) [35, 36] vor. Dabei beschreiben wir die Mediumeffekte durch die thermodynamisch selbstkonsistente Einführung von effektiven, dichteabhängigen Quarkmassen in die Zustandsgleichungen des Bag-Modells [37, 38]. Die so erhaltene EOS der QP werden wir in Kapitel 3 benutzen, um den Deconfinement Phasenübergang von der HP zur QP zu berechnen und die mögliche Existenz der QP in Neutronensternen im Teil II zu untersuchen. Die Verwendung von effektiven, dichteabhängigen Quarkmassen im Rahmen des Bag-Modells ist durch eine analoge Vorgehensweise bei endlichen Temperaturen motiviert [39, 40]. Dort führt die Verwendung von effektiven, temperaturabhängigen Gluonenmassen in einem idealen Gas zu einer ausgezeichneten Übereinstimmung mit Gitterrechnungen.

Die in diesem Kapitel berechnete EOS der QP beschreibt ein Quark-Gas aus u-, d- und s-Quarks im schwachen Gleichgewicht mit Elektronen, d.h. wir erlauben die Reaktionen

$$\begin{aligned} d &\longrightarrow u + e^- + \bar{\nu}_{e^-}, \\ s &\longrightarrow u + e^- + \bar{\nu}_{e^-}, \\ s + u &\longleftrightarrow d + u, \end{aligned} \tag{2.1}$$

welche folgende Relationen zwischen den chemischen Potentialen μ_u, μ_d, μ_s, μ_e bedingen[1]:

$$\begin{aligned} \mu_d &= \mu_u + \mu_e, \\ \mu_d &= \mu_s. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Da die Neutrinos auf einer kurzen Zeitskala von 10-15s aus dem Protoneutronenstern herausdiffundieren, können wir die chemischen Potentiale der Neutrinos vernachlässigen. Die Anzahl der unabhängigen chemischen Potentiale ist demnach auf zwei reduziert. Wir wählen das Paar (μ_n, μ_e) mit dem chemischen Potential μ_n der Neutronen

$$\mu_n \equiv \mu_u + 2\mu_d.$$

Die Definition von μ_n über den „Quark-Inhalt“ des Neutrons ist konsistent mit den Relationen zwischen den chemischen Potentialen, welche im Anhang B abgeleitet sind (siehe Tabelle B.1, Seite 108). In einer reinen QP haben wir die zusätzliche Bedingung der Ladungsneutralität[2]

$$\rho_c^{\mathrm{QP}} = \frac{2}{3}\rho_u - \frac{1}{3}\rho_d - \frac{1}{3}\rho_s - \rho_e = 0. \tag{2.3}$$

Hier ist ρ_c^{QP} die Ladungsdichte der Quarkphase und ρ_f $(f \in u, d, s)$, ρ_e sind die Teilchendichten der Quarks und Elektronen. Die EOS läßt sich nun mit einem unabhängigen chemischen Potential (z.B. μ_n) parametrisieren.

Wie schon erwähnt, beschreiben wir die QP im Rahmen des Bag-Modells [35, 36], indem wir Mediumeffekte im Quasiteilchenbild durch effektive, dichteabhängige Quarkmassen einführen [37, 38]. Die effektiven Quarkmassen folgen von den Polen des resummierten One-Loop Quark-Propagators bei endlichem chemischen Potential und Temperatur $T = 0$ im Limes Impuls $p \to 0$ (siehe Abbildung 2.1). Für Details der Berechnung

[1] Wie im Anhang B (Seite 107) gezeigt, lassen sich allgemeine Relationen zwischen den chemischen Potentialen beliebiger Konstituenten im schwachen Gleichgewicht durch eine Minimierung der Gesamtenergiedichte bei festgehaltener Ladung und Baryonenzahl ableiten.

[2] Für eine ausführliche Diskussion über die Anzahl der unabhängigen chemischen Potentiale und die Forderung der Ladungsneutralität siehe Anhang C (Seite 109).

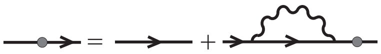

Abbildung 2.1: Resummierter One-Loop Quark-Propagator

der effektiven Quarkmassen in der sog. Hochdichtenäherung verweisen wir auf [37]. Man erhält [37, 41]

$$m_f^*(\mu_f) = \frac{m_f}{2} + \sqrt{\frac{m_f^2}{4} + \frac{g^2\mu_f^2}{6\pi^2}}, \tag{2.4}$$

mit den Stromquarkmassen m_f des Quarkflavors f und der starken Kopplungskonstanten g. Die effektiven Quarkmassen zeigen das Verhalten von steigender Masse mit steigender Dichte (chemischen Potential). Für die Stromquarkmassen wählen wir $m_u = m_d = 0$ und $m_s = 150\,\mathrm{MeV}$. Die effektiven Massen (2.4) benutzen wir nach [42] in dem Fermi-Gas Ausdruck für die Teilchendichte

$$\rho_f(\mu_f) = \frac{d_f}{6\pi^2}\left[\mu_f^2 - m_f^{*\,2}(\mu_f)\right]^{3/2}, \tag{2.5}$$

wobei d_f der Entartungsgrad ist. Der Druck p_f und die Energiedichte ϵ_f kann nun aus den thermodynamischen Relationen

$$\rho_f(\mu_f) = \frac{dp_f(\mu_f)}{d\mu_f} \quad \text{und} \quad \epsilon_f(\mu_f) + p_f(\mu_f) = \mu_f\rho_f(\mu_f) \tag{2.6}$$

ausgerechnet werden. Diese Vorgehensweise sichert uns die thermodynamisch selbstkonsistente Einführung der effektiven Quarkmassen. Für $g \to 0$ gehen die effektiven Quarkmassen (2.4) in die Stromquarkmassen m_f über. In diesem Grenzfall entsprechen die Zustandsgleichungen denen des freien Fermigases. Wir können somit g benutzen, um den Einfluß der Mediumeffekte auf die EOS zu studieren. Aus diesem Grund nehmen wir g als Parameter mit Werten im Bereich von $g = 0$ (keine Mediumeffekte) bis $g \approx 2 - 3$ ($\alpha_s \approx 0.31 - 0.72$). Auch wenn realistische Werte für g im Bereich unserer oberen Grenze für g liegen, ist bei solch hohen Kopplungskonstanten etwas Vorsicht in Kombination mit den störungstheoretisch abgeleiteten effektiven Quarkmassen geboten.

Die Gesamtenergiedichte ϵ_{QP} und der Druck p_{QP} der QP ist die Summe über alle Flavor plus Fermi-Gas Beiträge ϵ_e, p_e des gleichförmigen Hintergrundes von Elektronen. Zusätzlich treten im Bag-Modell die Beiträge der phänomenologischen Bagkonstanten (Bagdruck) B auf:

$$\epsilon_{\mathrm{QP}} = \epsilon_u + \epsilon_d + \epsilon_s + \epsilon_e + B, \tag{2.7}$$

$$p_{\mathrm{QP}} = p_u + p_d + p_s + p_e - B. \tag{2.8}$$

Hierin ist

$$\epsilon_e = \frac{\mu_e^4}{4\pi^2} \quad \text{und} \quad p_e = \frac{\mu_e^4}{12\pi^2}. \tag{2.9}$$

Die Bagkonstante wurde wie üblich durch Addition zur Energiedichte und Subtraktion vom Druck eingeführt [34]. Durch den phänomenologischen Charakter der Bagkonstanten ist allerdings ein exakter Wert von B nicht bekannt. Aus diesem Grund wollen wir B (primär im Teil II dieser Arbeit) als freien Parameter im Bereich von $B^{1/4} = 165\,\mathrm{MeV}$ ($B \approx 96\,\mathrm{MeV/fm^3}$) bis $B^{1/4} \approx 200\,\mathrm{MeV}$ ($B \approx 208\,\mathrm{MeV/fm^3}$) behandeln. Wir werden im Teil II dieser Arbeit sehen, daß die untere Beschränkung an den Wert von B durch die Bedingung gerechtfertigt ist, daß der Deconfinement Phasenübergang nicht unterhalb von normaler Kerndichte $\epsilon \approx \epsilon_0$ stattfinden sollte. Dies wäre bei kleinerem B der Fall. Für kleineres B kann desweiteren der von Witten [43] diskutierte Fall eintreten, daß die Energie pro Baryon der QP im Gleichgewicht ($p = 0$) niedriger wäre als die von ^{56}Fe mit $E/A \approx 930\,\mathrm{MeV}$. Dies würde die Existenz von sog. „seltsamen Sternen“ ermöglichen, welche vollständig aus einer QP bestehen. Für eine Diskussion dieser Möglichkeiten verweisen wir auf [34, 44, 45, 46]. Auch die Untersuchung von höheren Bagkonstanten ($B^{1/4} \gtrsim 200\,\mathrm{MeV}$) ist weitgehend uninteressant, da wir später sehen werden, daß bei solch hohen Bagkonstanten die Quarkphase durch (2.7) energetisch so ungünstig wird, daß diese nicht mehr im Inneren von Neutronensternen existieren kann. In Tabelle 2.1 sind die Parameter des hier verwendeten Bag-Modells zusammengefaßt.

Parameter des Bag-Modells		
Stromquarkmassen	m_u [MeV]	0
	m_d [MeV]	0
	m_s [MeV]	150 (465)
Bagkonstante	$B^{1/4}[MeV]$	$\approx 165 - 200$
	B [MeV/fm^3]	$\approx 96 - 208$
Kopplungskonstante	g	$\lesssim 2 - 3$
	$\alpha_s = g^2/4\pi$	$\lesssim 0.31 - 0.72$

Tabelle 2.1: Parameter des in dieser Arbeit verwendeten Bag-Modells. Die hohe s-Quark Masse von 465 MeV wird in Kapitel 2.2 zum Vergleich des Bag-Modells mit dem NJL-Modell verwendet. Die Parameter B und g werden im Teil II dieser Arbeit in den angegebenen Bereichen variiert, um deren Einfluß auf die Struktur von Neutronensternen mit QP zu studieren.

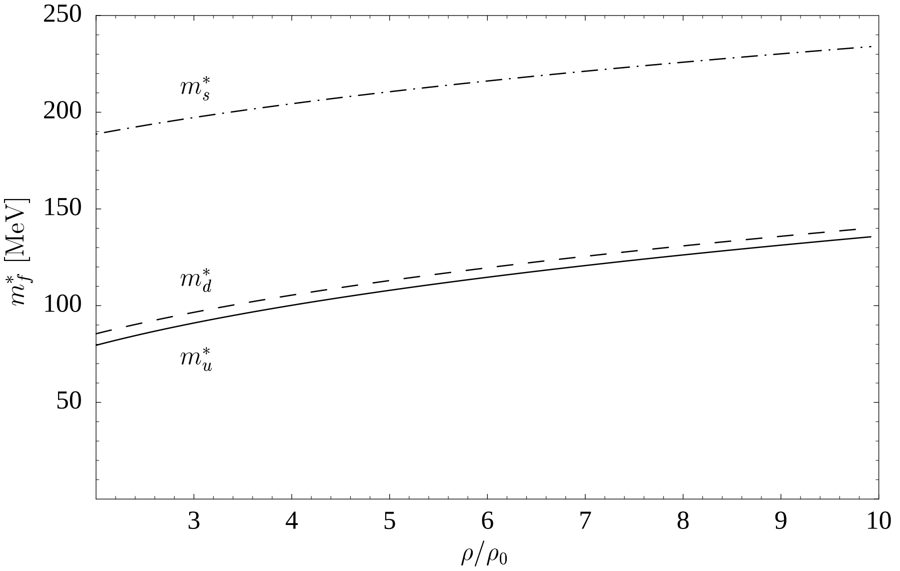

Abbildung 2.2: Effektive Quarkmassen als Funktion der Baryonendichte für ein ladungsneutrales System von Quarks und Elektronen im schwachen Gleichgewicht. Die Kopplungskonstante ist $g = 2$.

2.1.2 Ergebnisse

Abbildung 2.2 zeigt den Anstieg der effektiven Quarkmassen für eine Kopplungskonstante von $g = 2$ und beliebiger Bagkonstante[3]. Die effektiven Massen von u- und d-Quarks sind nahezu gleich, da sich ihre chemischen Potentiale nach (2.2) nur um den Betrag von μ_e unterscheiden und sie die gleiche Stromquarkmasse besitzen. (Das chemische Potential μ_e der Elektronen liegt für die ladungsneutrale QP im schwachen Gleichgewicht typischerweise im Bereich von $10 - 30\,\mathrm{MeV}$). Die effektive Masse der s-Quarks liegt ca. 100 MeV über denen der leichten Quarks. Die typische Massenskala (für $g = 2$) liegt offensichtlich im Bereich von 100 MeV für die leichten Quarks und bei 200 MeV für die s-Quarks. Die wesentliche Massenmodifikation (im Vergleich zu den Stromquarkmassen aus Tabelle 2.1) ergibt sich somit für die leichten Quarks mit einer Massenzunahme von ca. 100 MeV. Die Massen der s-Quarks sind im Vergleich zu den Stromquarkmassen nur um etwa 50 MeV angestiegen. Die Auswirkung dieser Massenzunahme auf die EOS zeigt sich recht deutlich bei Betrachtung der Energie pro Baryon E/A in Abbildung 2.3. Von $g = 0$ (keine Mediumeffekte, Stromquarkmassen) ausgehend erhöht sich E/A um ca. $40 - 50\,\mathrm{MeV}$ bei Einbeziehung der Mediumeffekte ($g = 2$). Somit machen Mediumeffekte die QP energetisch ungünstiger. Dieser Effekt

[3]Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Bagkonstanten, da die effektiven Massen (2.4) direkt in die Teilchendichten (2.5) und somit in die Baryonendichte eingeht.

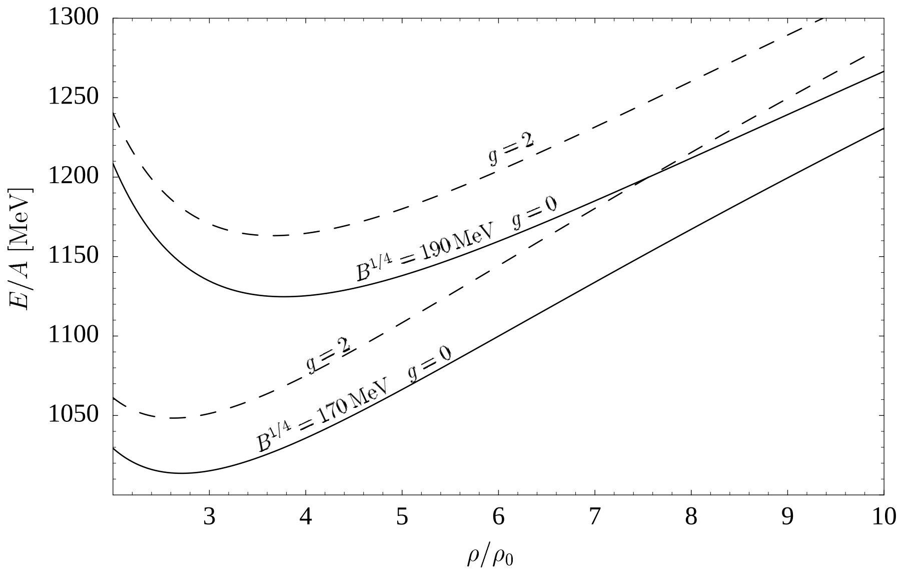

Abbildung 2.3: Energie pro Baryon als Funktion der Baryonendichte für verschiedene Bagkonstanten B und Kopplungskonstanten g. Offensichtlich machen Mediumeffekte die Quarkphase energetisch ungünstiger.

hat wichtige Konsequenzen auf die Struktur von Neutronensternen mit QP, welche wir im Teil II dieser Arbeit untersuchen werden.

Desweiteren erkennen wir in Abbildung 2.3 durch die Relation [34]

$$p = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{E}{A}, \tag{2.10}$$

daß der Zustand mit $p = 0$ (das Minimum der E/A-Kurve) bei endlichen Dichten im Bereich von $2 - 4\,\rho_0$ erreicht wird. Obwohl sowohl eine Erhöhung von B als auch von g die Werte von E/A erhöht, beobachtet man einen unterschiedlichen Einfluß auf die Minima (Gleichgewichtsdichten) der Kurven. Während eine Erhöhung von B die Gleichgewichtsdichte zu höheren Werten schiebt, wird diese durch Mediumeffekte erniedrigt. Dies zeigt uns, daß der Einfluß von Mediumeffekten nicht durch die Bagkonstante beschrieben werden kann. Dies wurde schon in [37] bemerkt.

Eine weitere wichtige Relation ist die EOS in der Form $p = p(\mu)$. Diese wird in Kapitel 3 im Zusammenhang mit der Konstruktion eines Gibbs-Phasenübergangs von der HP zur QP relevant. Abbildung 2.4 zeigt diese Relation und den Einfluß der Parameter B und g. Da in der Gibbs-Konstruktion bei gegebenem chemischen Potential (z.B. μ_n) diejenige Phase physikalisch realisiert ist, welche den größeren Druck hat, zeigt uns Abbildung 2.4 schon jetzt, daß sowohl der Einfluß der Mediumeffekte, als auch eine erhöhte Bagkonstante den HP$\rightarrow$QP Phasenübergang tendenziell zu höheren Dichten verschieben werden. Offensichtlich sinkt bei konstantem μ_n der Druck mit

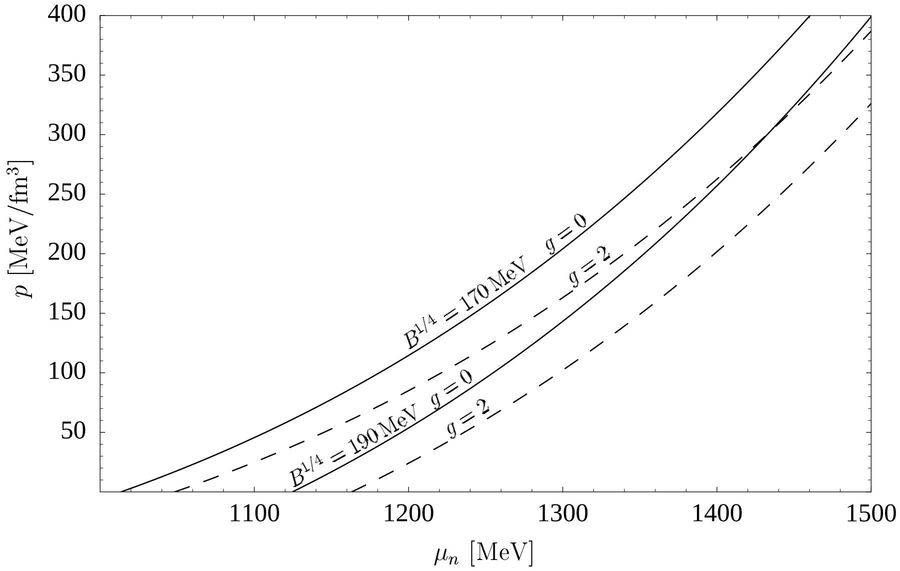

Abbildung 2.4: Druck als Funktion des baryochemischen Potentials μ_n für verschiedene Bagkonstanten B und Kopplungskonstanten g.

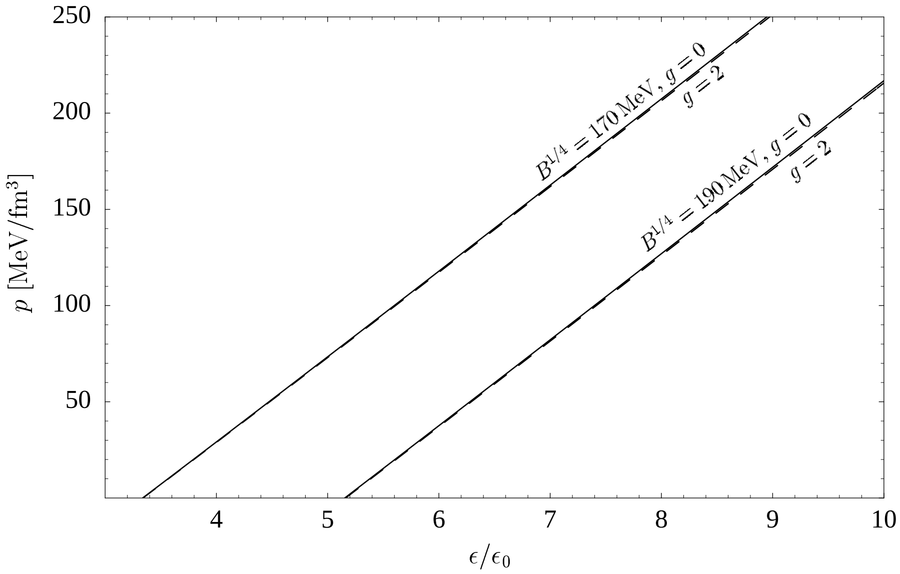

Abbildung 2.5: Druck als Funktion der Energiedichte ϵ für verschiedene Bagkonstanten B und Kopplungskonstanten g. Offensichtlich ist der Einfluß der Mediumeffekte auf die EOS in der Form $p = p(\epsilon)$ zu vernachlässigen, $\epsilon_0 = 140\,\mathrm{MeV}$.

steigendem B und g.

Abbildung 2.5 zeigt die EOS in der Form $p = p(\epsilon)$ wie sie zur Lösung der TOV-Gleichungen [10] benötigt wird. Verwunderlich ist (im Vergleich zu vorherigen Abbildungen) der hier zu vernachlässigende Einfluß der Mediumeffekte auf die EOS in dieser Form. Es läßt sich allerdings zeigen [37], daß für effektive Massen die linear im chemischen Potential sind ($m^* \propto g\,\mu$), die EOS die Form des masselosen freien Bag-Modells beibehält

$$p(\epsilon) = (\epsilon - 4B)/3 \tag{2.11}$$

und somit unabhängig von g ist. Für die leichten Quarks mit (2.4)

$$m^*_{u,d} = \frac{g\,\mu_{u,d}}{\sqrt{6}\pi} \tag{2.12}$$

ist diese Bedingung erfüllt und die EOS somit unabhängig von g. Die kleine Abweichung der $g = 2$-Kurve von der $g = 0$-Kurve kommt daher durch die s-Quarks. Da zumindest lineare Anteile in den effektiven Massen aus der EOS herausskalieren, scheint diese in der Form $p = p(\epsilon)$ weniger sensitiv auf Massenmodifikation zu sein. Diese Eigenschaft wird uns noch einmal in Kapitel 2.2 im Rahmen des NJL-Modells zur Beschreibung der QP begegnen.

2.1.3 Zusammenfassung

Im Kapitel 2.1 wurde eine modifizierte Fassung des Bag-Modells [35, 36] zur Beschreibung einer QP aus u-, d- und s-Quarks im schwachen Gleichgewicht mit Elektronen vorgestellt. Dabei wurde das Bag-Modell durch die thermodynamisch selbstkonsistente Einführung von effektiven, dichteabhängigen Quarkmassen um *Mediumeffekte* erweitert [37, 38] und deren Einfluß auf die EOS der QP diskutiert.

- Die Quarks ($f \in u, d, s$) erhalten eine effektive Quarkmasse der Form

  $$m_f^*(\mu_f) = \frac{m_f}{2} + \sqrt{\frac{m_f^2}{4} + \frac{g^2\mu_f^2}{6\pi^2}}, \qquad \text{(Gleichung (2.4), Seite 23)}$$

  durch Wechselwirkungen mit den anderen Quarks im Medium. Die effektive Quarkmasse steigt mit der Dichte (siehe Abbildung 2.2, Seite 25).

- Die durch Mediumeffekte mit der Dichte ansteigenden effektiven Quarkmassen machen die QP energetisch ungünstiger (siehe Abbildung 2.3, Seite 26). Dieser Effekt kann einen Einfluß auf die Existenz von Quarkphasen in Neutronensternen haben. Dies wird im Teil II dieser Arbeit untersucht.

- Der durch Mediumeffekte bei gegebenem chemischen Potential sinkende Druck (siehe Abbildung 2.4, Seite 27) deutet an, daß der Deconfinement Phasenübergang durch Mediumeffekte zu höheren Dichten verschoben wird. Dieses qualitative Ergebnis wird in Kapitel 4 genauer untersucht werden.

- Für die EOS der QP in der Form $p = p(\epsilon)$ können Mediumeffekte vernachlässigt werden (siehe Abbildung 2.5, Seite 27).

2.2 Das NJL-Modell

Alternativ zur Beschreibung der Quarkphase (QP) im Bag-Modell (Kapitel 2.1) wollen wir die Eigenschaften der QP im Nambu–Jona-Lasinio–Modell (NJL-Modell) [47, 48, 49, 50] studieren und mit den Ergebnissen des Bag-Modells vergleichen. Dabei benutzen wir die drei-Flavor Erweiterung des NJL-Modells von Buballa und Oertel [51]. Das NJL-Modell ermöglicht eine Beschreibung der spontanen Brechung der im wahren (nicht perturbativen) Vakuum der QCD gegebenen chiralen Symmetrie. Außerdem kann in diesem Modell das Spektrum der niedrig liegenden Mesonen, welches direkt mit der Brechung der chiralen Symmetrie sowie mit anderen Niederenergie-Phänomenen der starken Wechselwirkung verknüpft ist, sehr gut erklärt werden [48, 49, 50]. Bei hohen Dichten oder Temperaturen sagt das NJL-Modell einen Übergang zu einem Zustand mit restaurierter chiraler Symmetrie voraus. Neben den vielversprechenden Eigenschaften des NJL-Modells, welche es zu einem geeigneten Kandidaten zur Modellierung des Niedrig- und Hochdichtebereichs von Neutronensternmaterie machen könnte, hat es einen gravierenden Mangel - es besitzt kein Confinement. Aber gerade bei niedrigen Dichten sind die Eigenschaften von stark wechselwirkender Materie durch das Confinement der Quarks bestimmt. Deshalb können wir nicht erwarten, daß uns das NJL-Modell in der von uns betrachteten Version bei niedrigen Dichten, d.h. im Bereich der hadronischen Phase (HP), sinnvolle Ergebnisse liefert. Aus diesem Grund werden wir (wie auch für das Bag-Modell) das RMF-Modell (Kapitel 1.2) zur Beschreibung der Confined-Phase der Neutronensternmaterie bei niedrigen Dichten heranziehen. Im Bereich hoher Dichten, in dem der Einfluß des Confinements vernachlässigbar ist, können wir jedoch das NJL-Modell anwenden. Natürlich wäre es wünschenswert, einen Lagrangian für die HP zu besitzen, welcher auch die Restaurierung der chiralen Symmetrie beinhaltet. Solche Lagrangians wurden z.B. in [52, 53, 54] konstruiert. Erste Anwendungen dieser Modelle auf Neutronensternmaterie scheinen aber anzudeuten, daß ihre Modifikationen im Vergleich zu den in dieser Arbeit benutzten RMF-Modellen eher klein sind [55]. Der Einfachheit halber beschränken wir uns deswegen auf die Verwendung des RMF-Modells unterhalb des Deconfinement-Phasenübergangs und des NJL-Modells darüber. Die Berechnung des Phasenübergangs von der Confinement- zur Deconfinement-Phase diskutieren wir in Kapitel 3. Diese Herangehensweise ermöglicht es uns, die Eigenschaften des NJL-Modells in einem für seine Anwendung sinnvollen Dichtebereich zu studieren und den Einfluß von nichtperturbativen Effekten (wie sie durch den chiralen Phasenübergang entstehen) auf den Aufbau von Neutronensternen zu untersuchen. Die Anwendung des NJL-Modells auf die QP in Neutronensternen wurde zum ersten Mal in [56] untersucht.

2.2.1 Modellbeschreibung

Zur Beschreibung der QP im NJL-Modell benutzen wir die drei-Flavor Erweiterung in der Hartree (mean field) Näherung von Buballa und Oertel [51]. Der Lagrangian ist gegeben durch [51, 57]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & \bar{q}\,(i\partial\!\!\!/ - \hat{m})\,q + G\sum_{k=0}^{8}[\,(\bar{q}\lambda_k q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\lambda_k q)^2\,] \\ & - K\,[\,\mathrm{det}_f(\bar{q}\,(1+\gamma_5)\,q) + \mathrm{det}_f(\bar{q}\,(1-\gamma_5)\,q)\,],\end{aligned} \tag{2.13}$$

wobei q die Quarkfelder mit drei Flavors (u, d und s) und drei Farben darstellt. $\hat{m} = \mathrm{diag}(m_u, m_d, m_s)$ ist eine 3×3 Matrix im Flavor-Raum. Der Einfachheit halber benutzen wir den Isospin-symmetrischen Fall $m_u = m_d \equiv m_q$. Die λ_k Matrizen wirken im Flavor-Raum. Für $k = 1, \ldots, 8$ sind sie die Generatoren der $SU(3)_f$, und λ_0 ist proportional zur Einheitsmatrix im Flavor-Raum [49]. Durch die Terme mit endlichen Massen wird eine zusätzliche explizite Brechung der chiralen Symmetrie eingeführt. Die Kopplungskonstanten G und K aus (2.13) haben die Einheit [Energie^{-2}] und [Energie^{-5}]. Zur Regularisierung benutzen wir einen scharfen Cut-Off Λ im Raum der Dreierimpulse. Demnach haben wir insgesamt 5 Parameter, nämlich die Stromquarkmassen m_q und m_s, die Kopplungskonstanten G und K sowie den Cut-Off Λ. Wir benutzen den in Tabelle 2.2 gezeigten Parametersatz [57]: Diese Parameter sind so gewählt, daß die

Parameter des NJL-Modells		
Stromquarkmassen	m_u [MeV]	5.5
	m_d [MeV]	5.5
	m_s [MeV]	140.7
Cut-Off	Λ [MeV]	602.3
Kopplungskonstanten	$G\Lambda^2$	1.835
	$K\Lambda^5$	12.36

Tabelle 2.2: Parametersatz des in dieser Arbeit verwendeten NJL-Modells [57].

empirischen Werte der Pion-Zerfallskonstante sowie die Mesonenmassen des Pions, des Kaons und des η' reproduziert werden können. (Damit ergibt sich eine um ca. 6% unterschätzte Masse des η-Mesons). Die Behandlung des drei-Flavor NJL-Modells in der Hartree-Näherung führt auf eine selbstkonsistent zu lösende Gap-Gleichung [51, 57]

$$m_i^* = m_i - 4G\langle\bar{q}_i q_i\rangle + 2K\langle\bar{q}_j q_j\rangle\langle\bar{q}_k q_k\rangle \tag{2.14}$$

für die dynamisch generierten effektiven (constituent) Quarkmassen, wobei (i, j, k) beliebige Permutationen von (u, d, s) sind. Bei Temperatur Null und endlichem quarkchemischen Potential sind die Quarkkondensate gegeben durch

$$\langle \bar{q}_i q_i \rangle = -2N_c \int\limits_{p_F^i < |\vec{p}| < \Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m_i^*}{\sqrt{(m_i^*)^2 + \vec{p}^{\,2}}} = -\frac{3}{\pi^2} \int\limits_{p_F^i}^{\Lambda} dp\, p^2 \frac{m_i^*}{\sqrt{(m_i^*)^2 + p^2}}, \tag{2.15}$$

wobei die Anzahl der Farben auf $N_c = 3$ festgelegt wurde. Der Fermi-Impuls des Quark-Flavors i wird mit p_F^i bezeichnet. Dieser ist mit dem entsprechenden quarkchemischen Potential μ_i durch

$$p_F^i = \sqrt{\mu_i^2 - (m_i^*)^2}\, \Theta(\mu_i - m_i^*) \tag{2.16}$$

verknüpft. Die entsprechende Teilchendichte der Quarks ist gegeben durch

$$\rho_i = 2N_c \int\limits_{|\vec{p}| < p_F^i} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{(p_F^i)^3}{\pi^2}\,. \tag{2.17}$$

Die Gleichungen (2.14) und (2.15) dienen der Berechnung der effektiven Quarkmassen, die von ihren Vakuumwerten $m_{q,\mathrm{vac}}^* = 367.7\,\mathrm{MeV}$ und $m_{s,\mathrm{vac}}^* = 549.5\,\mathrm{MeV}$ mit steigender Dichte sinken. Die Baryonendichte sei definiert durch

$$\rho \equiv \frac{1}{3}(\rho_u + \rho_d + \rho_s)\,. \tag{2.18}$$

Für die Berechnung der Zustandsgleichung benötigen wir desweiteren die Energiedichte. Diese ergibt sich zu [51]

$$\epsilon_{\mathrm{NJL}} = \sum_{i=u,d,s} \frac{3}{\pi^2} \int\limits_0^{p_F^i} dp\, p^2 \sqrt{(m_i^*)^2 + p^2} + B_{\mathrm{eff}}. \tag{2.19}$$

Druck und Energiedichte sind (für $T = 0$) durch die thermodynamische Relation

$$p_{\mathrm{NJL}} + \epsilon_{\mathrm{NJL}} = \sum_{i=u,d,s} \rho_i\, \mu_i \tag{2.20}$$

miteinander verknüpft, wobei die effektive Bagkonstante B_{eff} durch

$$B_{\mathrm{eff}} = B_0 - B \tag{2.21}$$

gegeben ist mit

$$\begin{aligned} B \;=\; & \sum_{i=u,d,s} \left[\frac{3}{\pi^2} \int\limits_0^{\Lambda} dp\, p^2 \left(\sqrt{(m_i^*)^2 + p^2} - \sqrt{(m_i)^2 + p^2} \right) - 2G \langle \bar{q}_i q_i \rangle^2 \right] \\ & + 4K \langle \bar{u}u \rangle \langle \bar{d}d \rangle \langle \bar{s}s \rangle \end{aligned} \tag{2.22}$$

und

$$B_0 = B|_{\rho_u=\rho_d=\rho_s=0} = (217.6\,\mathrm{MeV})^4\ . \tag{2.23}$$

Man beachte, daß B implizit über die effektiven Quarkmassen von den Quarkdichten abhängig ist. Die dichteunabhängige Konstante B_0 ist so gewählt, daß Druck und Energiedichte im Vakuum verschwinden. Wir bemerken schon hier, daß diese Forderung den dichteunabhängigen Anteil von B_{eff} festlegt und demnach die EOS über (2.19) und (2.20) beeinflußt. Dies hat einen direkten Einfluß auf den möglichen Phasenübergang von der HP zur QP. Wir werden später auf diesen Punkt zurückkommen.

2.2.2 Ergebnisse

Im folgenden werden wir häufig die Ergebnisse für die EOS des NJL-Modells mit denen des MIT Bag-Modells [35, 36] vergleichen. Der Einfachheit halber benutzen wir für diese Vergleiche das Bag-Modell ohne die in Kapitel 2.1 vorgestellten Erweiterungen um Mediumeffekte (d.h. wir setzen $g = 0$). Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem NJL- und dem Bag-Modell ist, daß das NJL-Modell eine dichteabhängige Bagkonstante B_{eff} (2.21) vorhersagt, während die Bagkonstante B_{MIT} im Bag-Modell ein dichteunabhängiger, freier Parameter ist. Desweiteren werden die Quarkmassen m_i^{MIT} im Bag-Modell gewöhnlich als konstant angenommen. (Eine Ausnahme davon ist das in Kapitel 2.1 vorgestellte Modell [37, 38]). Wie schon in Kapitel 2.1 beschrieben, berechnen wir die EOS der QP unter Einbeziehung von Elektronen und den Bedingungen der Ladungsneutralität und des schwachen Gleichgewichts. Das schwache Gleichgewicht (2.1) verknüpft die chemischen Potentiale der Quarks mit dem chemischen Potential der Elektronen μ_e durch (siehe Anhang B)

$$\mu_s = \mu_d = \mu_u + \mu_e\,. \tag{2.24}$$

Abbildung 2.6 zeigt die so in der QP erhaltenen Fermi-Impulse der Quarks als Funktion der Baryonendichte. Die Fermi-Impulse bleiben offensichtlich für den betrachteten Bereich unter dem Cut-Off von $\Lambda \approx 600\,\mathrm{MeV}$. Offensichtlich werden die s-Quarks erst ab etwa 4 facher normaler Kerndichte ρ_0 populiert. Abbildung 2.7 und 2.8 zeigen die Quarkkondensate und die effektiven Massen als eine Funktion der Baryonendichte.
Man beachte, daß diese Abbildungen erst bei einer Baryonendichte von etwa zweifacher normaler Kerndichte starten, da wir diese EOS's nur im Bereich hoher Dichten zur Beschreibung der QP anwenden wollen. Für eine Diskussion des Niedrigdichtebereichs des drei-Flavor NJL-Modells verweisen wir auf [51]. Dort wurde gezeigt, daß die Energie pro Baryon E/A des hier beschriebenen Systems ein Minimum bei etwa zwei ρ_0 aufweist. Dies bedeutet, daß unterhalb dieser Dichte der Druck der QP negativ wird.

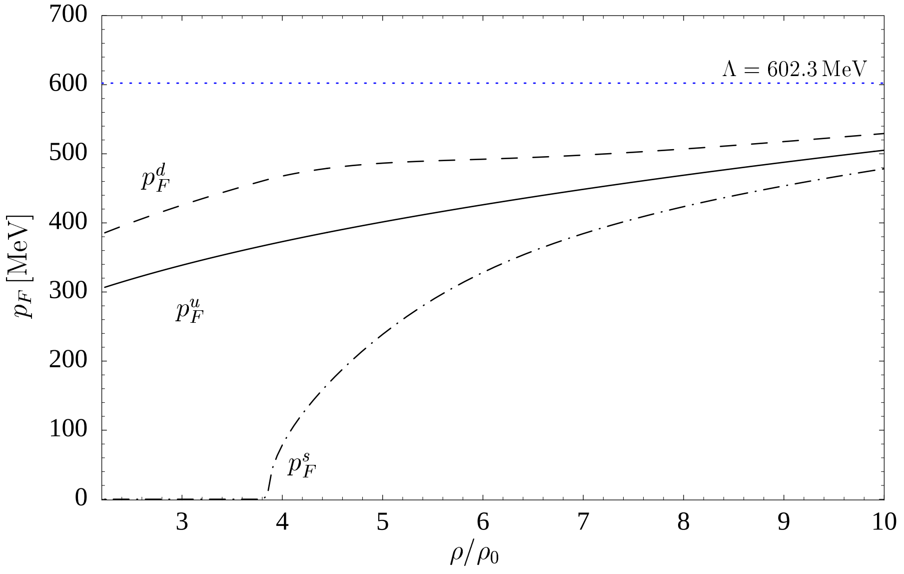

Abbildung 2.6: Fermi-Impulse der Quarks als Funktion der Baryonendichte für ein ladungsneutrales System von Quarks und Elektronen im schwachen Gleichgewicht. Der Cut-Off Λ wird zur Regularisierung des NJL-Modells eingeführt. $\rho_0 = 0.17\,\mathrm{fm}^{-3}$ ist die normale Kerndichte.

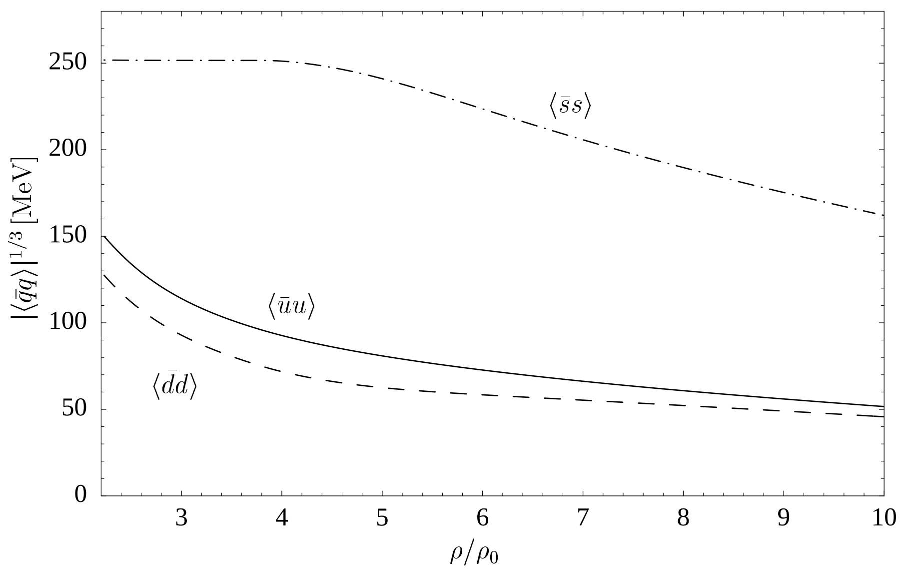

Abbildung 2.7: Quarkkondensate als Funktion der Baryonendichte für ein ladungsneutrales System von Quarks und Elektronen im schwachen Gleichgewicht. Man beachte, daß alle Kondensate negative Vorzeichen besitzen (vergl. Gleichung (2.15)).

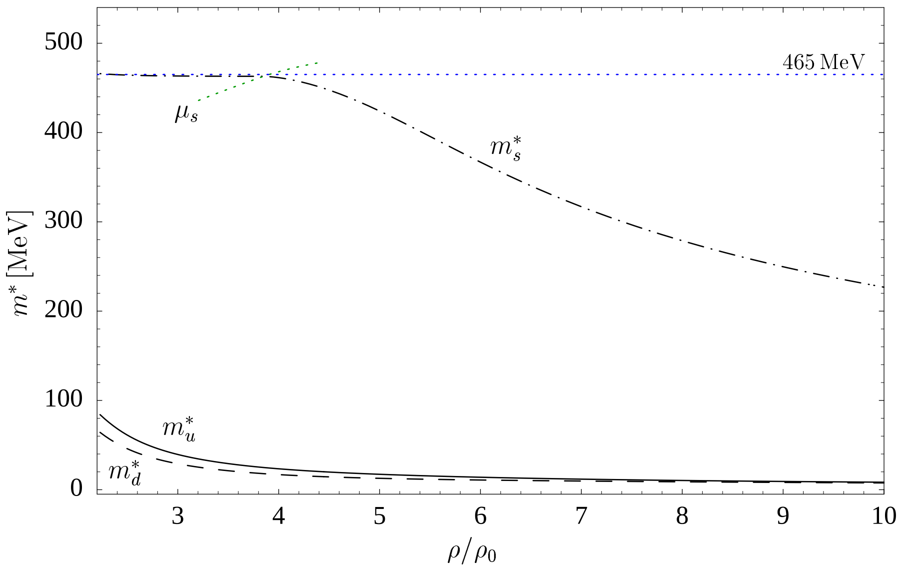

Abbildung 2.8: Effektive Quarkmassen als Funktion der Baryonendichte für ein ladungsneutrales System von Quarks und Elektronen im schwachen Gleichgewicht. Durch Angabe des chemischen Potentials der s-Quarks μ_s ist der Punkt gezeigt, an dem μ_s zum ersten Mal die effektive Masse übersteigt und somit seltsame Quarks populiert werden.

Da negative Drücke im Neutronenstern nicht realisiert sein können, zeigen wir in den Abbildungen nur den Bereich positiver Drücke. Abbildungen 2.7 und 2.8 zeigen, daß das Kondensat und die effektive Masse der s-Quarks solange konstant sind, bis das chemische Potential μ_s die effektive Strangequarkmasse überschreitet. Erst dann werden durch (2.16) die Teilchendichte ρ_s und der entsprechende Fermi-Impuls p_F^s von Null verschieden (s. Abbildung 2.6). Dies verursacht einen Abfall von $|\langle\bar{s}s\rangle|$ und m_s^*. Man beachte, daß alle Kondensate negative Vorzeichen besitzen (vergl. Gleichung (2.15)). Man könnte sich nun fragen, warum der Abfall der Kondensate der leichten u- und d-Quarks nicht die Strangequarkmasse durch den letzten Term in (2.14) erniedrigen. In der Tat sind die Masse und das Kondensat der s-Quarks durch die Kopplung mit den Kondensaten der u- und d-Quarks bereits in dem Bereich der (hier nicht gezeigten) niedrigen Dichten von ihren Vakuumwerten auf ihre in Abbildung 2.7 und 2.8 gezeigten Plateauwerte abgefallen. Allerdings sind die Kondensate der leichten Quarks im Plateaubereich schon soweit abgefallen, daß ihr Einfluß auf die s-Quarks vernachlässigt werden kann [51]. Wie wir später sehen werden, hat der hohe Plateauwert der Strangequarkmasse einen beträchtlichen Einfluß auf die mögliche Existenz von Quarkphasen in Neutronensternen.

Abbildung 2.9 zeigt die Bagkonstante B_{eff} als Funktion der Baryonendichte.

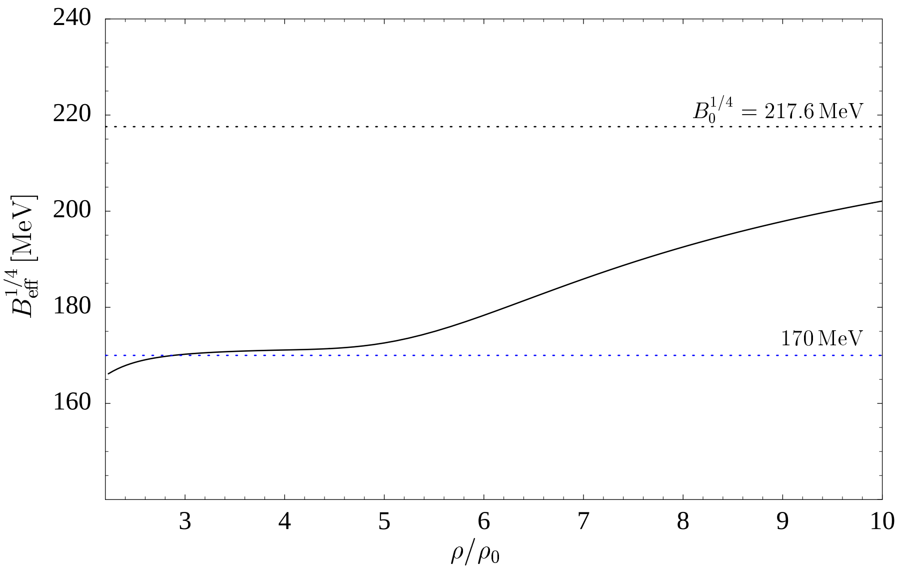

Abbildung 2.9: Effektive Bagkonstante des NJL-Modells als Funktion der Baryonendichte für ein ladungsneutrales System von Quarks und Elektronen im schwachen Gleichgewicht.

Nachdem auch diese bis zu annähernd 5 facher normaler Kerndichte nahezu konstant bleibt, beginnt sie in Richtung des Wertes von B_0 anzusteigen, dem sie sich aber nur sehr langsam nähert. Auch hier kann der Anstieg von B_{eff} auf den bei höheren Dichten steigenden Einfluß der s-Quarks zurückgeführt werden.

Verschiedene thermodynamische Größen sind in den Abbildungen 2.10-2.12 gezeigt. Zum Vergleich sind einige Kurven hinzugefügt, welche im MIT Bag-Modell (Kapitel 2.1 mit $g = 0$) berechnet wurden. Tabelle 2.3 listet die im Bag-Modell verwendeten Parameter für Massen und Bagkonstante auf. Die Kurven mit dem Label „MIT“ verwenden die Plateauwerte aus den Abbildungen 2.8 und 2.9. Abbildung 2.10 zeigt die Energie pro Baryon E/A als eine Funktion der Baryonendichte. Offensichtlich lassen sich die Ergebnisse des NJL-Modells (Kurvenlabel „NJL“) bei Verwendung der Stromquarkmassen im Bag-Modell nicht reproduzieren, unabhängig davon, welche Bagkonstante gewählt wird (Kurvenlabel „$B_{\mathrm{MIT}}^{1/4}$“). Der Grund dafür ist, daß im NJL-Modell bis zu

Kurvenlabel	Kurvenstil	m_q [MeV]	m_s [MeV]	$B_{\mathrm{MIT}}^{1/4}$ [MeV]
MIT	$- \cdot - \cdot -$	5.5	465 (s. Abb. 2.8)	170 (s. Abb. 2.9)
$B_{\mathrm{MIT}}^{1/4}$	$- - - -$	5.5	140.7	170, 195, 215

Tabelle 2.3: Parameter der Bag-Modell Vergleichskurven der Abbildungen 2.10-2.12.

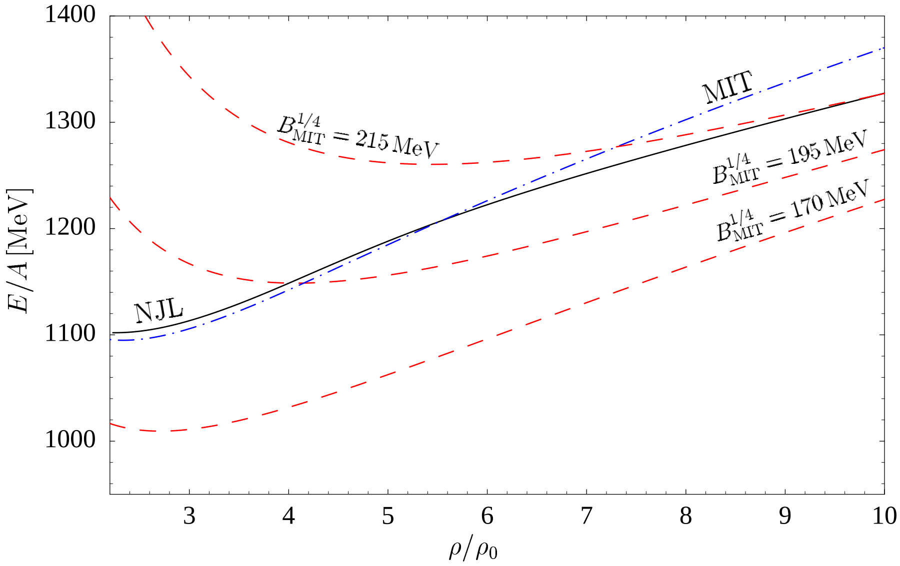

Abbildung 2.10: Energie pro Baryon als Funktion der Baryonendichte für das NJL-Modell und verschiedene Bag-Modell Vergleichskurven (siehe Tabelle 2.3).

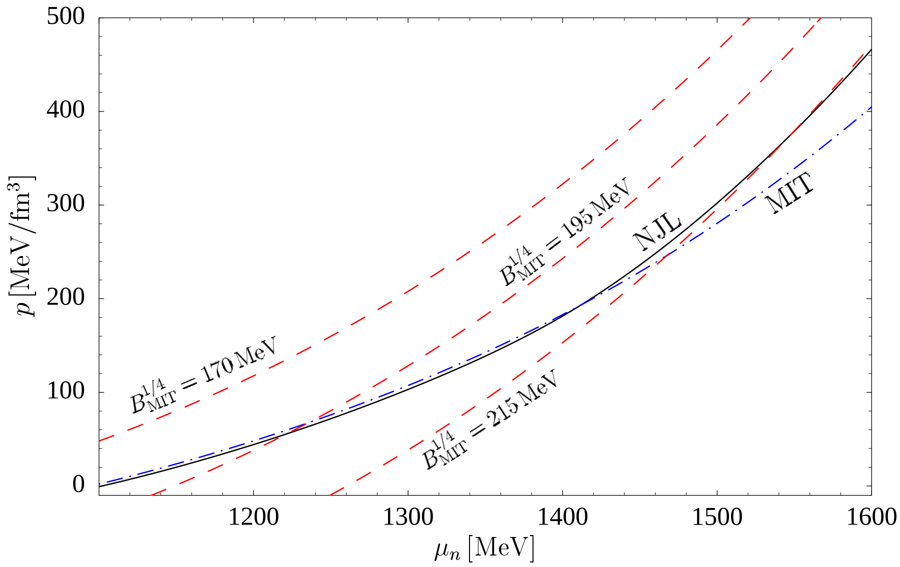

Abbildung 2.11: Druck als Funktion des baryochemischen Potentials μ_n für das NJL-Modell und verschiedene Bag-Modell Vergleichskurven (siehe Tabelle 2.3).

etwa 4 facher normaler Kerndichte keine s-Quarks populiert sind (siehe Abbildung 2.6), während im Bag-Modell durch die Verwendung der niedrigen Stromquarkmassen schon bei verschwindendem Druck (typischerweise bei 2–3 facher normaler Kerndichte ρ_0) ein beträchtlicher Anteil an s-Quarks vorhanden ist. Verwenden wir andererseits im Bag-Modell die Plateauwerte des NJL-Modells, so erhalten wir eine ausgezeichnete Übereinstimmung beider Modelle bis zu etwa 6−7 facher normaler Kerndichte ρ_0. Demnach ließen sich die Ergebnisse des NJL-Modells im Rahmen eines Bag-Modells verstehen, wenn man eine (nicht untypische) Bagkonstante von $B_{\rm MIT}^{1/4} = 170\,{\rm MeV}$ in Kombination mit einer hohen (effektiven) Strangequarkmasse von $m_s = 465\,{\rm MeV}$ annimmt. Für höhere Dichten wird das NJL-Ergebnis allerdings besser durch ein Bag-Modell mit Stromquarkmassen und einer höheren Bagkonstante von etwa $B_{\rm MIT}^{1/4} = 215\,{\rm MeV}$ beschrieben. Dies ist auch verständlich, da sich bei diesen Dichten die effektiven Massen den Stromquarkmassen annähern (siehe Abbildung 2.8) und die effektive Bagkonstante langsam gegen $B_0^{1/4} = 217.6\,{\rm MeV}$ strebt (siehe Abbildung 2.9). Vergleichbares gilt auch für den in Abbildung 2.11 gezeigten Druck p als Funktion des baryochemischen Potentials μ_n. Auch hier stimmt das NJL-Ergebnis mit dem Bag-Modell, unter Verwendung der Plateauwerte, bis zu einem chemischen Potential von etwa $\mu_n = 1450\,{\rm MeV}$ gut überein. Dies entspricht im NJL-Modell einer Dichte von etwa $6\,\rho_0$. Generell spielt die EOS in der Form $p = p(\mu)$ eine wichtige Rolle in der Berechnung des Phasenübergangs, welchen wir in Kapitel 3 besprechen.

Die bisher gefundene weitgehende Übereinstimmung des NJL-Modells mit dem Bag-Modell unter Verwendung der Plateauwerte wird etwas modifiziert, wenn wir uns Abbildung 2.12 ansehen, die den Druck als Funktion der Energiedichte ϵ zeigt ($\epsilon_0 = 140\,{\rm MeV}$). Zustandsgleichungen der Form $p = p(\epsilon)$ gehen in die TOV-Gleichungen [10] ein, welche letztlich die Struktur von Neutronensternen bestimmen[4]. Man sieht, daß bis etwa $6\,\epsilon_0$ (entsprechen ca. $4.5\,\rho_0$) das NJL-Ergebnis mit den Bag-Modell Rechnungen für die Plateau-Bagkonstante von $B_{\rm MIT}^{1/4} = 170\,{\rm MeV}$ gut übereinstimmt. Dies ist unabhängig davon, ob nun Stromquarkmassen oder Plateauwerte für die Massen verwendet wurden. Der Grund dafür ist, daß EOS's in der Form $p = p(\epsilon)$ generell wenig sensitiv auf die verwendeten Massen sind. In einem etwas anderem Zusammenhang wurde dies schon im Rahmen des Bag-Modells (siehe Abbildung 2.5) beobachtet. Die EOS in dieser Form wird primär durch den Wert der Bagkonstanten dominiert, was sich daran erkennen läßt, daß das NJL-Ergebnis mit steigender effektiver Bagkonstanten stark zur Bag-Modell Kurve mit $B_{\rm MIT}^{1/4} = 215\,{\rm MeV}$ tendiert.

[4] Allerdings würde die Benutzung der EOS's aus Abbildung 2.12 nur zur Berechnung von reinen Quarksternen, sog. „seltsamen Sternen“, führen (siehe z.B. [37]), die wir in dieser Arbeit nur am Rande betrachten.

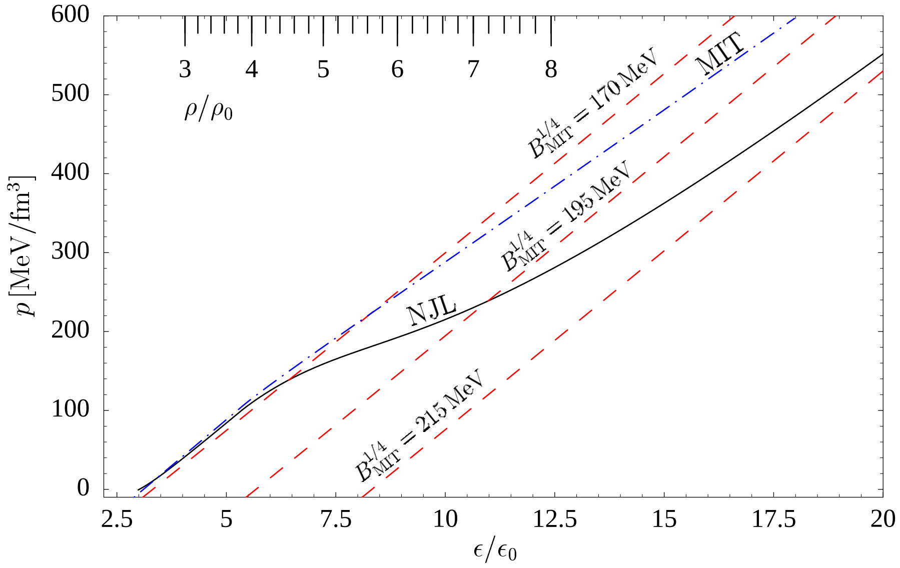

Abbildung 2.12: Druck als Funktion der Energiedichte ϵ für das NJL-Modell und verschiedene Bag-Modell Vergleichskurven. Zum Vergleich ist im oberen Bereich der Abbildung eine Teilchendichte-Skala für das NJL-Modell gezeigt, $\epsilon_0 = 140\,\mathrm{MeV}$.

Bevor wir die Ergebnisse des NJL-Modells zusammenfassen, wollen wir kurz mögliche Beschränkungen des NJL-Modells in der hier verwendeten Fassung diskutieren. Wie schon erwähnt verwenden wir zur Regularisierung des Modells einen Cut-Off Λ für die Dreierimpulse. Dieser Cut-Off bewirkt eine Einschränkung der Anwendbarkeit des NJL-Modells auf nicht zu hohe Dichten. Bei steigender Dichte steigen durch das Pauli-Prinzip auch die Fermi-Impulse der Quarks. Diese könnten letztlich den Cut-Off übersteigen und somit die Anwendung des Modells bei diesen Dichten verbieten. Wir haben sichergestellt, daß in dem von uns betrachteten Dichtebereich die Fermi-Impulse den Cut-Off nicht übersteigen (siehe Abbildung 2.6). Trotzdem ist gerade bei hohen Dichten Vorsicht geboten, da die Werte der Fermi-Impulse die gleiche Größenordnung erreichen wie der Cut-Off[5]. Bei hohen Dichten erreicht man vermutlich einen Bereich, der besser durch resummierte Störungstheorie beschrieben werden kann. Während die nichtperturbativen Effekte des NJL-Modells (wie die hohen effektiven Strangequarkmassen) mit steigender Dichte verschwinden, können z.B. Mediumeffekte mit der Dichte steigen [37, 38]. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß das NJL-Modell bezüglich der Berechnung der EOS weder bei allzu niedrigen Dichten (bei denen Confinement wich-

[5]Wir werden allerdings später in der Anwendung des NJL-Modells auf Neutronensterne sehen, daß wir für die dort gefundenen Ergebnisse die NJL-Zustandsgleichungen nur in einem Dichtebereich bis etwa $3\,\rho_0$ benötigen. In diesem Bereich liegen die Fermi-Impulse unterhalb von etwa 400 MeV, was zu vergleichen ist mit dem Cut-Off Λ von ca. 600 MeV.

tig ist), noch bei zu hohen Dichten angewendet werden sollte. Dennoch könnte das NJL-Modell sinnvolle Ergebnisse in einem dazwischenliegenden Dichtebereich liefern, in dem Confinement nicht mehr wesentlich ist, aber die Effekte der chiralen Symmetriebrechung wesentliche Modifikationen an der EOS liefern könnten.

2.2.3 Zusammenfassung

Im Kapitel 2.2 wurde das Nambu–Jona-Lasinio-Modell (NJL-Modell) zur Beschreibung einer QP aus u-, d- und s-Quarks im schwachen Gleichgewicht mit Elektronen vorgestellt. Das verwendete NJL-Modell in der Hartree-Näherung basiert auf den Arbeiten von Buballa und Oertel [51].

- Die interessanteste Eigenschaft des NJL-Modells ist das Aufzeigen eines chiralen Phasenübergangs. Damit verbunden sagt das NJL-Modell (über einen weiten Dichtebereich) eine im Vergleich zur Stromquarkmasse *hohe effektive Strangequarkmasse* vorher. Diese fällt von ihrem Plateauwert von etwa
$$m_s \approx 465\,\mathrm{MeV} \qquad \text{(Abbildung 2.8, Seite 35)}$$
erst bei Dichten über $4\,\rho_0$ langsam ab. Selbst bei Dichten von etwa $7\,\rho_0$ ist die effektive Masse noch doppelt so groß wie die Stromquarkmasse von ca. $150\,\mathrm{MeV}$.

- Auch die dichteabhängige effektive Bagkonstante B_{eff} des NJL-Modells (siehe Gleichungen (2.21)-(2.23)) zeigt einen Plateauwert. Dieser liegt bei Dichten bis zu etwa $5\,\rho_0$ bei der (moderaten) Bagkonstanten von
$$B_{\mathrm{eff}} \approx 170\,\mathrm{MeV} \qquad \text{(Abbildung 2.9, Seite 36).}$$

- Durch die Plateauwerte der Strangequarkmasse und der effektiven Bagkonstanten lassen sich die Ergebnisse des NJL-Modells leicht im einfacheren MIT Bag-Modell reproduzieren und interpretieren. Bis zu Dichten von etwa 5-6 ρ_0 entsprechen die Ergebnisse des Bag-Modells unter Verwendung obiger (konstanter) Plateauwerte denen des NJL-Modells. Dazu vergleiche man in den Abbildungen 2.10-2.12 (S. 37-39) die Kurven mit den Labeln „NJL“ und „MIT“.

- Schon hier läßt sich vermuten, daß NJL-Quarkphasen in Neutronensternen durch die hohen effektiven Strangequarkmassen (bei einer typischen Bagkonstanten) energetisch unterdrückt sind. Dies wird im Teil II dieser Arbeit untersucht.

Kapitel 3

Konstruktion des Phasenübergangs

Kapitelübersicht

3.1 Die Gibbs-Bedingung im Neutronenstern

Nach unseren Vorarbeiten in den Kapitel 1 und 2, in denen wir die Zustandsgleichungen der hadronischen Phase (HP) und der Quarkphase (QP) vorgestellt haben, sind wir nun in der Lage, den Deconfinement-Phasenübergang von der HP zur QP zu berechnen. Als Gleichgewichtsbedingung zwischen der HP und der QP verwenden wir dabei die Gibbs-Bedingungen des thermischen Gleichgewichts

$$T^{\mathrm{HP}} = T^{\mathrm{QP}}, \tag{3.1}$$

des mechanischen Gleichgewichts

$$p^{\mathrm{HP}} = p^{\mathrm{QP}} \tag{3.2}$$

und des chemischen Gleichgewichts

$$\mu_i^{\mathrm{HP}} = \mu_i^{\mathrm{QP}}. \tag{3.3}$$

Im Ausdruck (3.3) läuft i über alle N unabhängigen chemischen Potentiale. Wir benutzen im folgenden eine Konstruktion des Phasenübergangs, die zum ersten Mal von Glendenning [58] auf den Deconfinement-Phasenübergang in Neutronensternen angewendet wurde. Der wesentliche Punkt in dieser Konstruktion ist, daß in der Mischphase (MP) entgegengesetzte elektrische Ladungen der einzelnen Komponenten (HP und QP) zugelassen sind. Diese müssen sich aber durch geeignet gewählte Volumenanteile der beiden Komponenten gegenseitig ausgleichen, um letztlich eine ladungsneutrale MP zu erhalten. Befinden sich beide Phasen im schwachen Gleichgewicht (siehe Anhang B) mit beliebiger elektrischer Ladung, so reduziert sich die Anzahl der unabhängigen chemischen Potentiale auf $N = 2$. Dafür wählen wir das Paar $(\mu_n,\ \mu_e)$, d.h. die chemischen Potentiale der Neutronen[1] und der Elektronen. Man bezeichnet ein solches System auch als zweikomponentiges System. Für eine Diskussion über den Einfluß der Anzahl der unabhängigen chemischen Potentiale (der Komponenten) auf eine mögliche MP im Neutronenstern siehe Anhang C.

Da wir uns bei der Berechnung der EOS's auf $T = 0$ beschränkt haben, reduzieren sich die Gleichungen (3.1) bis (3.3) nun auf die Gibbs-Bedingung in der Form

$$p_{\mathrm{HP}}(\mu_n, \mu_e) = p_{\mathrm{QP}}(\mu_n, \mu_e). \tag{3.4}$$

Alle $(\mu_n,\ \mu_e)$, welche bei gegebenen EOS's die Gibbs-Bedingung (3.4) erfüllen, legen im Prinzip die Zustände der MP fest. Allerdings erfüllen nicht alle Lösungen die zusätzliche Bedingung, daß die MP ladungsneutral einstellbar ist. D.h., wir müssen bei der Konstruktion der MP zusätzlich fordern, daß es einen Volumenanteil

$$\chi = \frac{V_{\mathrm{QP}}}{V_{\mathrm{QP}} + V_{\mathrm{HP}}} \tag{3.5}$$

der QP-Komponente gibt, der die Bedingung der Ladungsneutralität der MP

$$\chi\, \rho_c^{\mathrm{QP}}(\mu_n, \mu_e) + (1 - \chi)\, \rho_c^{\mathrm{HP}}(\mu_n, \mu_e) = 0 \tag{3.6}$$

erfüllt. Dabei sind ρ_c^{QP} und ρ_c^{HP} die Ladungsdichten der jeweiligen Komponenten. Hat man alle Lösungen $(\mu_n,\ \mu_e)$ und χ der Gleichungen (3.4) und (3.6) gefunden, so lassen sich alle weiteren thermodynamischen Größen der MP berechnen. Während der Druck p_{MP} durch Gleichung (3.4) festgelegt ist, lassen sich die Baryonendichte ρ_{MP} und die Energiedichte ϵ_{MP} der MP über

$$\rho_{\mathrm{MP}} = \chi\, \rho_{\mathrm{QP}} + (1 - \chi)\, \rho_{\mathrm{HP}}, \tag{3.7}$$

$$\epsilon_{\mathrm{MP}} = \chi\, \epsilon_{\mathrm{QP}} + (1 - \chi)\, \epsilon_{\mathrm{HP}} \tag{3.8}$$

berechnen.

[1]In der QP entspricht μ_n der Summe aus den chemischen Potentialen der im Neutron enthaltenen Constituent-Quarks, d.h. $\mu_n = \mu_u + 2\mu_d$. Siehe Kapitel 2.1.

3.2 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden wir die in Kapitel 3.1 vorgestellte Konstruktion des Phasenübergangs für zwei konkrete EOS's veranschaulichen und geometrisch interpretieren. Zur Erfüllung der Gibbs-Bedingung aus Gleichung (3.4) müssen wir die Schnittlinie der durch (μ_n, μ_e) aufgespannten Druckebenen $p_{\mathrm{HP}}(\mu_n, \mu_e)$ und $p_{\mathrm{QP}}(\mu_n, \mu_e)$ finden. Für unser erstes Beispiel wollen wir für die HP die GPS-EOS des RMF-Modells (siehe Kapitel 1.2) und für die QP das Bag-Modell (siehe Kapitel 2.1) mit den Parametern $B^{1/4} = 170\,\mathrm{MeV}$ und $g = 2$ benutzen. Abbildung 3.1 zeigt die beiden Druckebenen als Funktion der unabhängigen chemischen Potentiale. Die mit MP bezeichnete Schnitt-

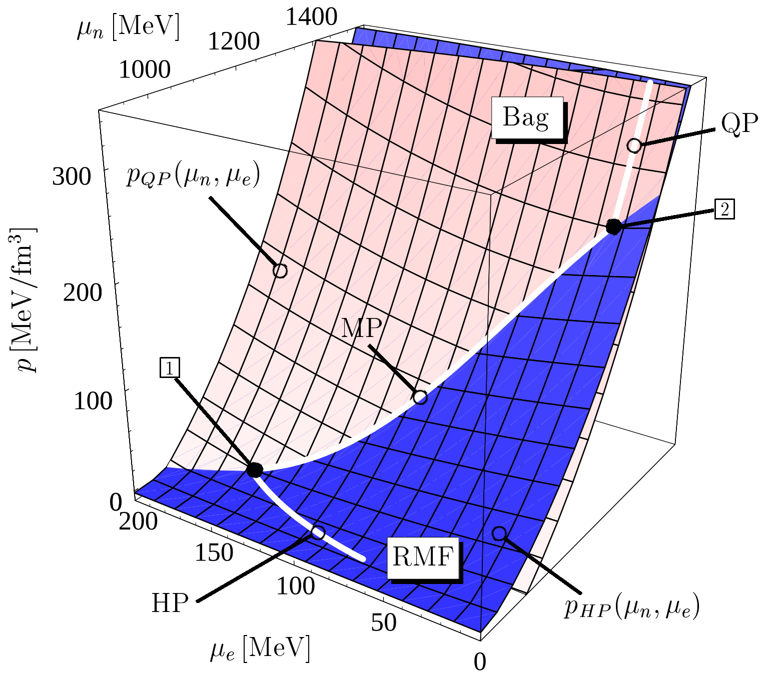

Abbildung 3.1: Konstruktion des Gibbs-Phasenübergangs. Mit steigendem Druck p wird die hadronische Phase (HP), die Mischphase (MP) und die Quarkphase (QP) durchlaufen. Die Schnittlinie zwischen der $p_{\mathrm{HP}}(\mu_n, \mu_e)$ und der $p_{\mathrm{QP}}(\mu_n, \mu_e)$ Ebene ist die Lösung der Gibbs-Bedingung (3.4). Für die QP-EOS verwenden wir das Bag-Modell aus Kapitel 2.1 mit $B^{1/4} = 170\,\mathrm{MeV}$ und $g = 2$. Die HP-EOS (GPS) ist im RMF-Modell (Kapitel 1.2) berechnet.

linie beider Ebenen ist die Lösungen der Gibbs-Bedingung (3.4). Die mit HP und QP bezeichneten Kurven sind die ladungsneutralen Kurven der jeweiligen Phase. Für niedrige Drücke ($p \lesssim 15\mathrm{MeV/fm}^3$) befindet sich die Neutronensternmaterie in ihrer ladungsneutralen HP. Der HP$\rightarrow$MP Phasenübergang findet statt, wenn die Kurve der ladungsneutralen HP die Druckebene der QP trifft. Dies geschieht in Punkt $\boxed{1}$. Bis zu diesem Punkt ist der Druck der QP kleiner als der Druck der HP, womit die HP die physikalisch realisierte Phase ist (stabil ist). Entlang der MP-Kurve im Druckbereich von Punkt $\boxed{1}$ bis Punkt $\boxed{2}$ ($p \approx 240\,\mathrm{MeV/fm^3}$) befindet sich die Materie in der MP. (Wir werden weiter unten sehen, daß zwischen Punkt $\boxed{1}$ und Punkt $\boxed{2}$ neben der erfüllten Gibbs-Bedingung auch die Bedingung der Ladungsneutralität (3.6) erfüllt werden kann). Im Punkt $\boxed{2}$ trifft die MP-Kurve auf die ladungsneutrale QP-Kurve. Dies ist der MP$\rightarrow$QP Phasenübergang, da ab diesem Punkt der Druck der QP größer als der Druck der HP ist. Demnach ist die Materie bei Drücken über $p \approx 240\,\mathrm{MeV/fm^3}$ im Zustand der ladungsneutralen QP.

Die Darstellung der Analyse des Phasenübergangs in der in Abbildung 3.1 gezeigten Form ist sehr sinnvoll. Es läßt sich z.B. in dieser Darstellung qualitativ leicht erkennen, welchen Einfluß eine Veränderung der Modellparameter B und g der QP auf den Phasenübergang hat. Wir werden solche Analysen zwar in späteren Kapiteln noch quantitativ durchführen, aber letztlich sind alle Ergebnisse, die wir dort erhalten, auf die Art und Weise zurückzuführen, wie sich die Ebenen der HP und der QP in Abbildung 3.1 schneiden. Sehen wir uns z.B. den Einfluß der Bagkonstanten B an. Aus Gleichung (2.8) auf Seite 23 geht hervor, daß eine Erhöhung von B zu einem Absinken des Druckes führt. Die QP-Ebene in Abbildung 3.1 wird sich dadurch nach unten schieben, wodurch die Phasenübergangspunke $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ zu höheren Drücken (Dichten) geschoben werden. Vergleichbares läßt sich auch über den Einfluß der durch die Kopplungskonstante g parametrisierten Mediumeffekte aussagen. In Abbildung 2.4 auf Seite 27 ist die ladungsneutrale EOS der QP gezeigt. (Die gestrichelte Linie mit $B^{1/4} = 170\,\mathrm{MeV}$ und $g = 2$ entspricht gerade der Projektion der QP-Kurve von Abbildung 3.1 auf die p-μ_n-Ebene). Vernachlässigen wir die Mediumeffekte, indem wir $g = 0$ setzen, so sehen wir, daß sich der Druck der QP erhöht. Somit wird sich in Abbildung 3.1 die QP-Ebene nach oben schieben. Eine Vernachlässigung der Mediumeffekte führt demnach zu einer Unterschätzung der Phasenübergangsdichten.

Abbildung 3.2 zeigt eine Projektion der HP-, MP- und QP-Kurven aus Abbildung 3.1 auf die μ_n-μ_e-Ebene. Die HP- und QP-Kurven (welche in Punkt $\boxed{1}$ bzw. Punkt $\boxed{2}$ in die gestrichelten Linien übergehen) stellen die chemischen Potentiale der ladungsneutralen Phasen dar. Erhöhen wir das chemische Potential μ_e der Elektronen, d.h. verlassen wir die ladungsneutralen Kurven nach oben, so wird die Ladungsdichte der jeweiligen Phase negativ ($\rho_c < 0$). Unterhalb der Kurven ist sie positiv ($\rho_c > 0$). Demnach kann sich in dem dazwischenliegenden Bereich (MP) die positive Ladung der HP-Komponente mit der negativen Ladung der QP-Komponente entsprechend Gleichung (3.6) durch geeignete Wahl von χ ausgleichen. Auf der MP-Kurve in der Nähe von Punkt $\boxed{1}$ ist die HP-Komponente nur leicht positiv geladen. Die QP-Komponente

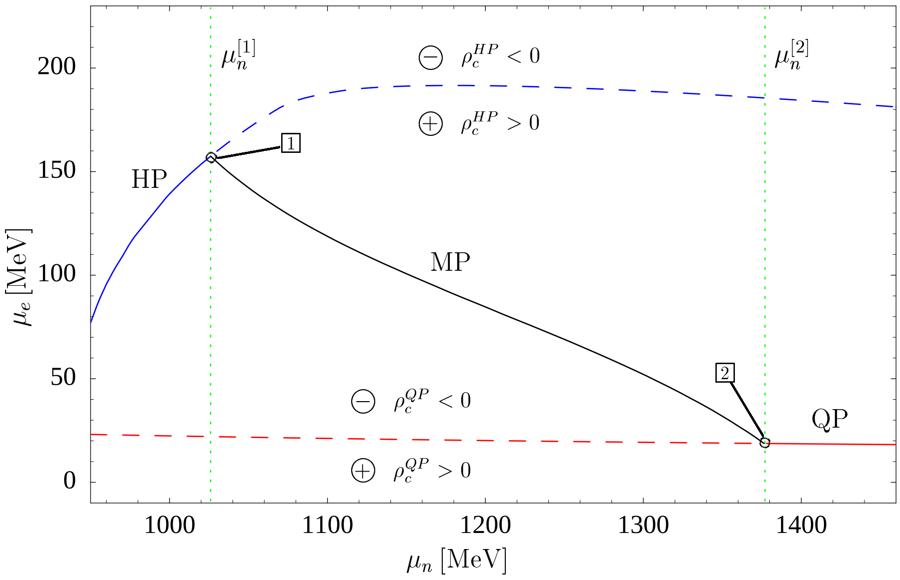

Abbildung 3.2: Chemisches Potential μ_e als Funktion von μ_n. Bis zu $\mu_n^{[1]}$ besteht die Materie aus der ladungsneutralen HP. In der MP von $\mu_n^{[1]}$ bis $\mu_n^{[2]}$ kann die positive Ladung der HP-Komponente ($\rho_c^{\mathrm{HP}} > 0$) durch die negative Ladung der QP-Komponente ($\rho_c^{\mathrm{QP}} < 0$) kompensiert werden. Die MP-Kurve ist Lösung der Gibbs-Bedingung (3.4). Über $\mu_n^{[2]}$ besteht die Materie aus der ladungsneutralen QP. Die gestrichelten Kurven sind Fortsetzungen der ladungsneutralen reinen Phasen.

ist aber weit von ihrer ladungsneutralen Kurve entfernt und demnach stark negativ. Um Ladungsneutralität zu erzeugen, muß χ somit sehr klein sein. Die QP-Komponente belegt also in der Nähe von Punkt $\boxed{1}$ nur einen verschwindenden Volumenanteil ($\chi = 0$ bei $\mu_n^{[1]}$). Erhöhen wir μ_n weiter, so erhöht sich χ monoton bis auf $\chi = 1$ bei $\mu_n^{[2]}$. Dort geht die MP kontinuierlich in die QP über[2]. Der Anstieg von μ_e der ladungsneutralen HP-Kurve für kleine μ_n wird dadurch verursacht, daß die Elektronen die Protonen neutralisieren müssen, welche im schwachen Gleichgewicht bei steigendem μ_n populiert werden. Erreicht μ_n nun die Größenordnung der Massen der negativ geladenen Hyperonen (z.B. $m_{\Sigma^-} \approx 1200\,\mathrm{MeV}$), so geht negative Ladung auf die Hyperonen über und μ_e sättigt im Bereich von typischerweise 200 MeV ab. (Bei dieser Überlegung ist natürlich zu berücksichtigen, daß die effektiven Massen der Hyperonen im Medium abgesenkt sind (siehe z.B. [30])).

Als weiteres Beispiel der Phasenübergangskonstruktion wollen wir nun den Fall betrachten, daß wir für die QP die Bag-Modell Rechnung durch die NJL-Modell Rechnung

[2] Für eine Diskussion der kristallinen Struktur, in der sich die Komponenten der MP durch Minimierung der (von uns hier nicht betrachteten) Coulomb- und Oberflächenenergien ausrichten, verweisen wir auf [59, 60, 61].

aus Kapitel 2.2 ersetzen. Abbildung 3.3 zeigt die zu Abbildung 3.1 analoge Darstellung im NJL-Modell. Im Vergleich zu Abbildung 3.1 fällt sofort auf, daß sich die ladungs-

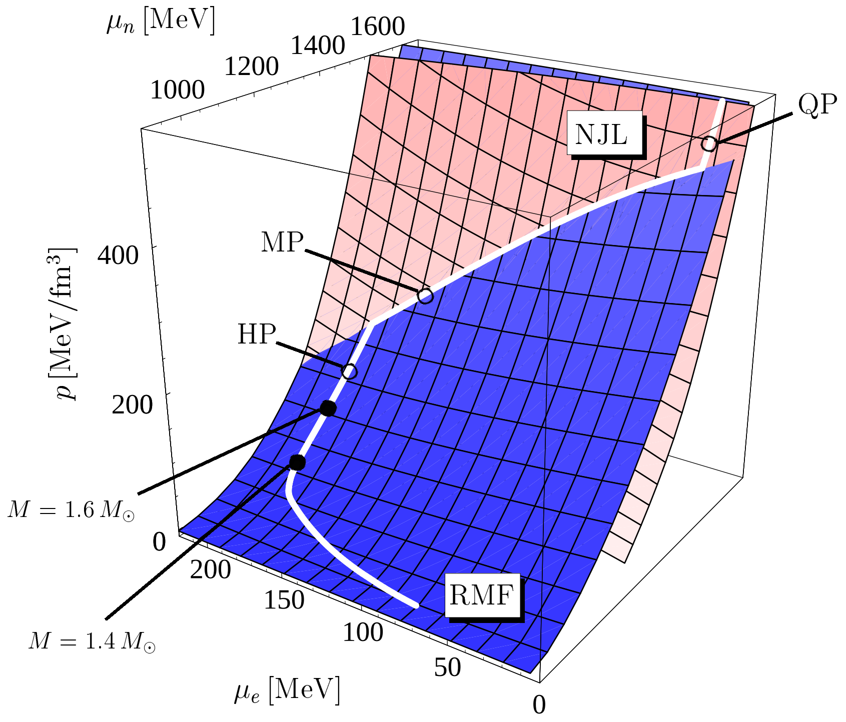

Abbildung 3.3: Konstruktion des Gibbs-Phasenübergangs analog zu Abbildung 3.1. Für die QP verwenden wir statt des Bag-Modells das NJL-Modell aus Kapitel 2.2. Die HP-EOS ist weiterhin die GPS-EOS des RMF-Modells (Kapitel 1.2).

neutrale HP-Kurve bis hin zu Drücken im Bereich von $p \approx 200\,\mathrm{MeV/fm^3}$ erstreckt. (Im Beispiel des Bag-Modells erhielten wir den HP$\rightarrow$MP Phasenübergang schon bei $p \approx 15\,\mathrm{MeV/fm^3}$). Auch der Druck des MP$\rightarrow$QP Phasenübergangs hat sich zu höheren Drücken verschoben. Da wir die HP-EOS unverändert gelassen haben, muß sich die QP-Druckebene im Vergleich zum Bag-Modell nach unten bewegt haben. Die Ursache dafür wurde schon in Kapitel 2.2 in den erhöhten Strangequarkmassen im Bereich von $m_s = 465\,\mathrm{MeV}$ gefunden. Abbildung 2.11 auf Seite 37 zeigt uns (für die ladungsneutrale EOS), wie der Druck der obersten gestrichelte Kurve (Bag-Modell mit $m_s = 140.7\,\mathrm{MeV}$) durch Erhöhen der Strangequarkmasse auf 465 MeV auf die Kurve mit dem Label „MIT“ abgesenkt wird. Diese Kurve entspricht weitgehend der Kurve des NJL-Modells. Schon hier sehen wir also qualitativ, daß die erhöhten Strangequarkmassen im NJL-Modell einen direkten Einfluß auf den Phasenübergang haben. Um zu entscheiden, ob eine MP oder eine QP im Neutronenstern enthalten ist oder durch die erhöhten Phasenübergangsdrücke unterdrückt wird, müssen wir die zentralen Drücke im Neutronenstern für die gegebene EOS kennen. Die dazu notwendigen Berechnungen werden in Teil II dieser Arbeit angestellt. Um ein besseres Gefühl für typische Drücke im Stern zu erhalten sind (späteren Ergebnissen vorausgreifend) die zentralen Drücke von zwei verschieden schweren Neutronensternen in Abbildung 3.3 eingetragen. Offensichtlich liegen diese Zentraldrücke noch in der HP der EOS. Ein Phasenübergang zur QP scheint im Neutronenstern somit (bei Verwendung des NJL-Modells) durch die hohen Massen der s-Quarks unterdrückt zu sein. Vergleichbare Zentraldrücke würden im Bag-Modell (bei den gewählten Parametern) zumindest eine MP im Zentrum des Neutronensterns vorhersagen. Wir werden den Einfluß der Modellparameter auf die Struktur der Neutronensterne systematisch in Teil II dieser Arbeit studieren.

Bevor wir dieses Kapitel beenden, ist es nochmal wichtig zu betonen, daß die hier diskutierte Konstruktion des Phasenübergangs zu einer MP führt, die sich über einen endlichen Druckbereich erstreckt. Durch die Struktur der TOV-Gleichungen (welche wir in Kapitel 5 besprechen) werden wir sehen, daß die MP durch ihren endlichen Druckbereich prinzipiell auch einen endlichen Volumenbereich im Neutronenstern annehmen kann (siehe dazu die Diskussion in Anhang C). Voraussetzung dafür ist natürlich, daß der zentrale Druck im Neutronenstern mindestens im Druckbereich der MP liegt. Diese Voraussetzung scheint z.B. bei Verwendung des NJL-Modells zur Beschreibung der QP für typische Neutronensterne nicht erfüllt zu sein (siehe Abbildung 3.3).

3.3 Zusammenfassung

Im Kapitel 3 wurde die Konstruktion des Deconfinement-Phasenübergangs in Neutronensternmaterie vorgestellt. Der verwendete Gibbs-Phasenübergang wurde so konstruiert, daß die HP- und QP-Komponenten einer möglichen MP entgegengesetzte Ladungen besitzen können, welche sich durch geeignete Wahl ihrer Volumenanteile χ (3.5) gegenseitig neutralisieren (3.6). Dies führt auf zwei unabhängige chemische Potentiale (μ_n, μ_e) in der Gibbs-Bedingung.

- Die Gibbs-Bedingung im Neutronenstern lautet (3.4)

$$p_{\mathrm{HP}}(\mu_n, \mu_e) = p_{\mathrm{QP}}(\mu_n, \mu_e). \qquad \text{(Gibbs-Bedingung)}$$

  Diese Bedingung ist graphisch in Abbildung 3.1 auf Seite 45 für das Bag-Modell und in Abbildung 3.3 auf Seite 48 für die Verwendung des NJL-Modells zur Beschreibung der QP gezeigt. Die Schnittlinie beider Druckebenen erfüllt die Gibbs-Bedingung.

- Die Gibbs-Bedingung (3.4) mit zwei unabhängigen chemischen Potentialen führt auf eine MP die sich über einen endlichen Druckbereich erstreckt (siehe Abbildung 3.1 auf Seite 45). Dies unterscheidet die hier verwendete Konstruktion von einem Gibbs-Phasenübergang mit nur einem chemischen Potential. Bekanntlich führt dieser auf eine MP mit konstantem Druck (siehe Anhang C). Dieser Unterschied entscheidet über die Möglichkeit einer MP im Innern von Neutronensternen.

- Bei Verwendung des NJL-Modells aus Kapitel 2.2 zur Beschreibung der QP zeigt sich, daß der notwendige Druck zur Erzeugung einer MP oder einer QP sehr hoch ist. Dies führen wir auf die vom NJL-Modell vorhergesagten hohen effektiven Massen des s-Quarks zurück.

- An Darstellungen des Gibbs-Phasenübergangs wie in Abbildung 3.1 auf Seite 45 läßt sich leicht der Einfluß von Modellparametern der EOS's auf die Phasenübergangsdichten (Drücke) ablesen. Siehe dazu die Diskussion auf Seite 46.

Kapitel 4

Eigenschaften der Zustandsgleichungen

Kapitelübersicht

4.1 Zustandsgleichungen im Bag-Modell

Basierend auf der Phasenübergangskonstruktion, die wir in Kapitel 3 vorgestellt haben, können wir nun die vollständige EOS berechnen. Diese besteht aus HP, MP und QP, je nach der betrachteten Dichte. Wir beginnen mit der Untersuchung der EOS unter Verwendung des Bag-Modells für die QP. Wir wollen die EOS in der Form $p = p(\epsilon)$ studieren, da diese Form für die Berechnungen der Neutronensternstruktur in Teil II dieser Arbeit benötigt wird. Insbesondere interessieren wir uns dabei für den Einfluß der Modellparameter (B und g) und der verschiedenen HP-EOS auf die Phasenübergangsdichten. Der Einfachheit halber werden wir die vollständige EOS (d.h. mit HP, MP und QP) als *Hybridstern-EOS* bezeichnen.

4.1.1 Der Einfluß der Mediumeffekte

Abbildung 4.1 zeigt den Niedrigdichtebereich von verschiedenen Hybridstern-EOS. Die Bezeichnungen GPS, GL85, TM1 und TM2 geben die verwendeten HP-EOS's an. Für die QP haben wir hier das Bag-Modell mit der Bagkonstanten $B^{1/4} = 170\,\mathrm{MeV}$ und den Kopplungskonstanten $g = 0$ und $g = 2$ verwendet. (Im nächsten Abschnitt variieren

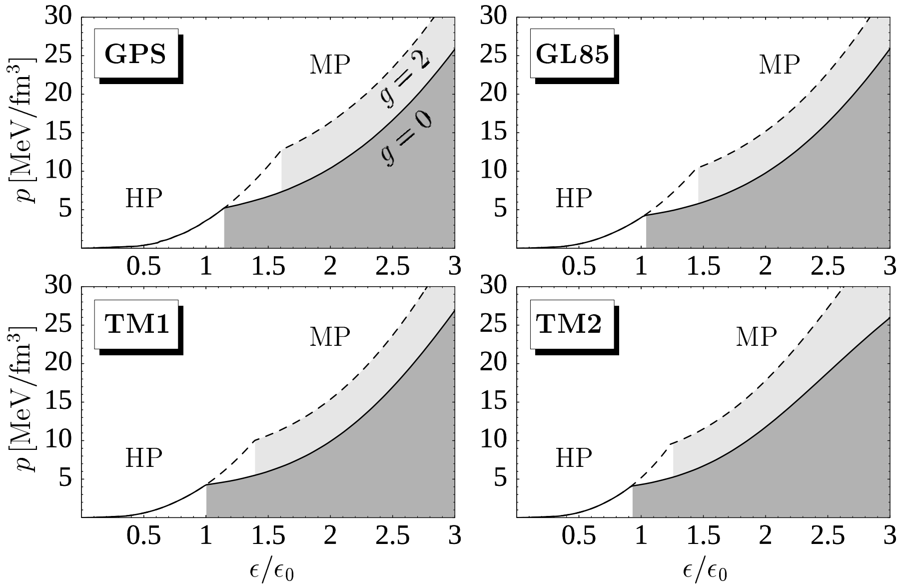

Abbildung 4.1: Niedrigdichtebereich der Hybridstern-EOS's für verschiedene HP-EOS's und zwei Kopplungskonstanten g der QP im Bagmodell ($B^{1/4} = 170\,\mathrm{MeV}$). Der Dichtebereich der MP ist grau unterlegt. $\epsilon_0 = 140\,\mathrm{MeV/fm}^3$.

wir B). Der Dichtebereich, der zur MP gehört, wurde unterhalb der $p(\epsilon)$-Kurve grau unterlegt. Wie schon im letzten Kapitel erwähnt, steigt der Druck in der MP weiter mit steigender Energiedichte an. Der unter der MP liegende Dichtebereich besteht aus der HP. Offensichtlich hängt die HP$\rightarrow$MP Übergangsdichte nur leicht von der Wahl der HP-EOS ab. Dies liegt an der noch verhältnismäßig kleinen Unsicherheit in der HP-EOS im Bereich der einfachen Kerndichte, in dem noch keine Hyperonen vorhanden sind. (Die Hyperonen werden typischerweise ab $2-3\,\epsilon_0$ populiert [30]). Desweiteren ist die HP$\rightarrow$MP Übergangsdichte nur wenig sensitiv auf den Einfluß der Mediumeffekte, d.h. auf eine Veränderung von g. Die Phasenübergangsdichten werden nur leicht nach oben verschoben (wie sich schon in Kapitel 3 andeutete). Offensichtlich knickt die EOS beim HP$\rightarrow$MP Übergang zu kleineren Drücken ab, d.h. die EOS wird weicher. Wie wir sehen werden, führt dieser Effekt letztlich dazu, daß Neutronensterne mit QP kompakter sein können als ohne Phasenübergang.

In Abbildung 4.2 sind die gleichen EOS's im Bereich höherer Dichten gezeigt. Im Gegensatz zur HP$\rightarrow$MP Übergangsdichte sehen wir, daß die MP$\rightarrow$QP Übergangsdichte viel sensitiver auf die Wahl der HP-EOS und den Einfluß der Mediumeffekte ist. Wenn wir z.B. annehmen, ein Neutronenstern hätte eine zentrale Energiedichte von $\epsilon = 5\,\epsilon_0$, dann läßt sich keine eindeutige Aussage über die Zusammensetzung des Sterns in seinem Zentrum machen. Vernachlässigen wir Mediumeffekte ($g = 0$), so sagen TM1 und

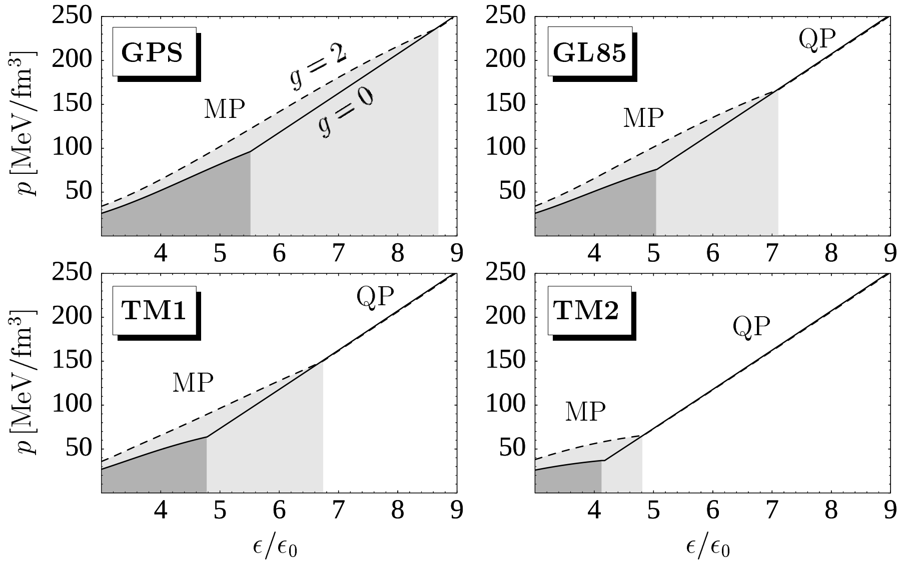

Abbildung 4.2: Hochdichtebereich der Hybridstern-EOS's für verschiedene HP-EOS's und zwei Kopplungskonstanten g der QP im Bagmodell (vergleiche Abbildung 4.1). Man beachte (insbesondere bei der TM2-EOS) den starken Knick in der EOS beim MP→QP Übergang. In Teil III dieser Arbeit werden wir sehen, daß sich diese Eigenschaft der EOS prinzipiell durch Masse- und Radiusmessungen an Neutronensternen nachweisen ließe.

TM2 einen QP-Kern des Sterns voraus, während GPS und GL85 einen MP-Kern voraussagen. Betrachten wir hingegen zusätzlich Mediumeffekte ($g = 2$), so sagt nur noch TM2 einen QP-Kern des Sterns voraus. Qualitativ wird die starke Modell- und Parameterabhängigkeit beim Blick auf die Phasenübergangskonstruktion in Abbildung 3.1 auf Seite 45 verständlich. Im Bereich hohen Druckes, in dem der MP→QP Übergang stattfindet, sind die Druckebenen der HP und der QP nahezu parallel. Dadurch können auch kleinere Veränderungen in den EOS's (z.B. $g = 0$ auf $g = 2$) beträchtlichen Einfluß auf die Übergangsdichten haben.

In diesem Zusammenhang wollen wir zeigen, daß es eine allgemeine Eigenschaft der Gibbs-Konstruktion ist, daß der MP→QP Übergangsdruck stärker sensitiv auf eine Veränderung der EOS's ist als der HP→MP Übergangsdruck. Als Veränderung nehmen wir dazu an, daß der Druck einer Phase um den Wert Δb variiert wird (vergleichbar mit der Unsicherheit in der Bagkonstanten). Wie wirkt sich dies auf die Phasenübergangsdrücke p aus? Um diese Frage zu beantworten, wollen wir den Druck der einzelnen Phasen in der Nähe des jeweiligen Phasenübergangsdrucks (HP→MP oder MP→QP) als lineare Funktion von nur einem chemischen Potential μ_n nähern. Die Steigung der

Geraden der Phase 1[1] sei s und die Steigung der Phase 2 sei $s + \Delta s$. Der Druck der Phase 2 ist um den Wert b verschoben, um einen Schnittpunkt beider Geraden zu ermöglichen. Damit ist

$$\begin{aligned} p_1 &= s\mu_n, \\ p_2 &= (s + \Delta s)\mu_n - b. \end{aligned}$$

Der Phasenübergangsdruck p, der die Gibbs-Bedingung $p = p_1(\mu_n) = p_2(\mu_n)$ erfüllt, liegt bei $p = (s/\Delta s) \cdot b$. Also ist die Veränderung des Phasenübergangsdrucks

$$\Delta p = \frac{s}{\Delta s} \cdot \Delta b. \tag{4.1}$$

Der Phasenübergangsdruck ist also umso sensitiver auf die Unsicherheit Δb in der EOS, je größer s und je kleiner Δs ist. Da s in der Nähe des Phasenübergangspunktes gerade der Dichte $\rho = \partial p / \partial \mu_n$ entspricht, ist der bei höherer Dichte stattfindende MP$\rightarrow$QP Übergang stärker sensitiv auf die Unsicherheiten in den EOS's. Dieser Effekt wird noch dadurch verstärkt, daß für die verwendeten EOS's die Steigungen in der Nähe des MP$\rightarrow$QP Übergangs nahezu parallel sind, d.h. Δs sehr klein ist. Natürlich sind die Unsicherheiten in den HP-EOS in dem in Abbildung 4.2 betrachteten Dichtebereich schon beträchtlich (wie wir in Abbildung 1.2 auf Seite 17 gesehen haben). Diese Unsicherheit macht sich gerade bei hohen Dichten (durch den in (4.1) gezeigten Zusammenhang) verstärkt in den in Abbildung 4.2 beobachteten, sehr unterschiedlichen Phasenübergangsdichten bemerkbar.

Am Ende der MP knapp unterhalb der MP$\rightarrow$QP Übergangsdichte läßt sich in Abbildung 4.2 (insbesondere bei der TM2-EOS) erkennen, daß die EOS sehr flach (weich) wird, bevor sie in der QP wieder steiler ansteigt. Dies ist eine sehr interessante Eigenschaft der Hybridstern-EOS, zumal sich diese Eigenschaft durch Messungen von Neutronensternmassen und Radien prinzipiell nachweisen ließe. Diese Möglichkeit werden wir in Teil III dieser Arbeit diskutieren.

Im Dichtebereich über der MP$\rightarrow$QP Übergangsdichte (d.h. in der reinen QP) sehen wir in Abbildung 4.2, daß die EOS's nur vernachlässigbar von Mediumeffekten abhängig sind. Dies haben wir schon in Abbildung 2.5 auf Seite 27 bemerkt.

4.1.2 Der Einfluß der Bagkonstanten

Im letzten Abschnitt haben wir die Eigenschaften der Hybridstern-EOS für eine feste Bagkonstante studiert. Hier wollen wir nun untersuchen, wie sich eine Veränderung

[1]Die Phase 1 sei die HP für den HP$\rightarrow$MP Übergang und die MP für MP$\rightarrow$QP Übergang. Die Phase 2 ist die jeweils andere Phase.

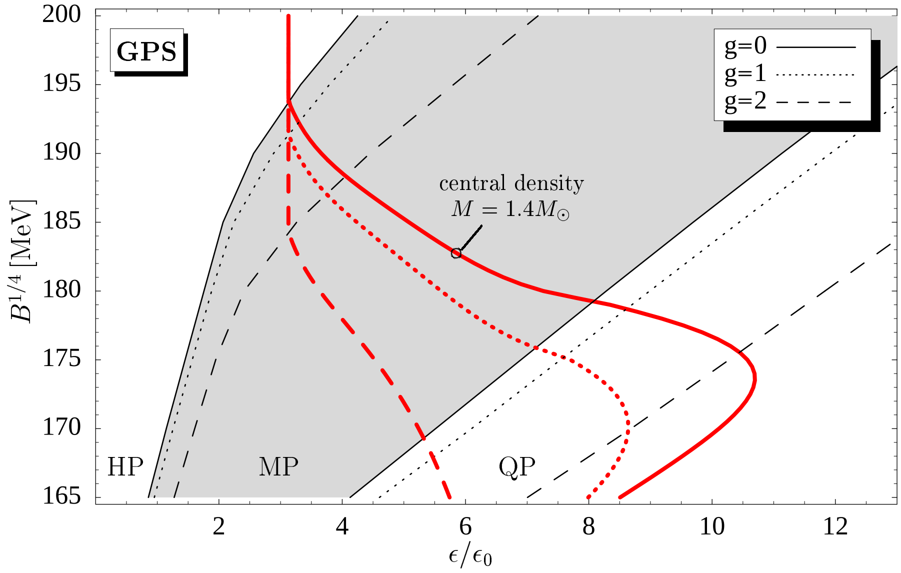

Abbildung 4.3: Phasenübergangsdichten für drei verschiedene Kopplungskonstanten g als Funktion der Bagkonstanten $B^{1/4}$. Die HP-EOS ist GPS. Der grauschattierte Bereich entspricht dem Dichtebereich der MP bei $g = 0$. Die dicken Linien zeigen die zentralen Energiedichten eines aus der jeweiligen EOS aufgebauten Neutronensterns mit $M = 1.4\,M_\odot$.

der Bagkonstanten B auf die Phasenübergangsdichten auswirkt. Da B negativ in den Druck der QP eingeht (2.8), verschiebt ein erhöhtes B die Druckebene $p_{\mathrm{QP}}(\mu_n, \mu_e)$ der QP in Abbildung 3.1 auf Seite 45 nach unten. Dies verschiebt die Phasenübergangsdrücke und somit auch die Dichten zu höheren Werten. Abbildung 4.3 und 4.4 zeigen diesen Verhalten für verschiedene Hybridstern-EOS's (die hier nicht gezeigten TM1 und GL85 Hybridstern-EOS's zeigen ein vergleichbares Verhalten). In diesen Abbildungen entspricht der grauschattierte Bereich dem Dichtebereich der MP bei gegebenem B für $g = 0$. Wie schon im letzten Abschnitt gesehen, schieben die Mediumeffekte die Übergangsdichten zu höheren Werten. Auch hier erkennt man, daß die Übergangsdichten für nahezu den gesamten betrachteten B-Bereich für den MP→QP Übergang mehr sensitiv auf g sind als für den HP→MP Übergang. Desweiteren sieht man, daß die MP→QP Übergangsdichte mit steigendem B stärker ansteigt als die HP→MP Übergangsdichte. Auch dies ist wieder die durch Gleichung (4.1) dargestellte allgemeine Eigenschaft der Gibbs-Konstruktion. Eine Erhöhung von B ($\sim \Delta b$) führt bei höheren Dichten ($\sim s$), d.h. beim MP→QP Übergang, zu einem stärkeren Anstieg der Phasenübergangsdichte ($\sim \Delta p$) als bei niedrigen Dichten. Ein Anstieg von $B^{1/4}$ um nur 5 MeV ist in der Lage, die MP→QP Übergangsdichte um $\Delta\epsilon \approx \epsilon_0$ ansteigen zu lassen.

Die Relevanz der Phasenübergangsdichten für die Struktur der Neutronensterne ist

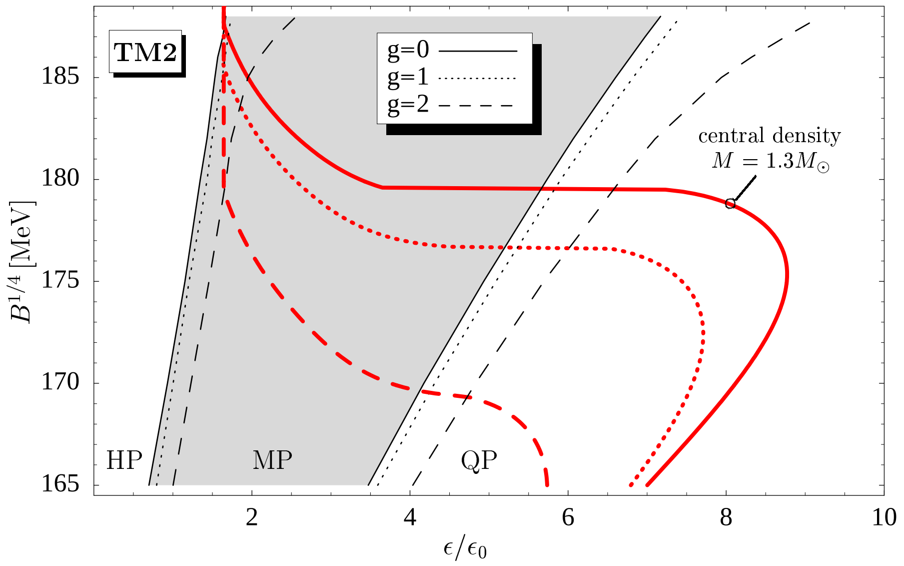

Abbildung 4.4: Vergleiche Abbildung 4.3. Die HP-EOS ist hier TM2.

dadurch gegeben, daß für einen Neutronenstern mit QP-Kern notwendigerweise die zentrale Energiedichte ϵ_c über der MP$\to$QP Übergangsdichte liegen muß. Was sagt uns nun der Anstieg der Phasenübergangsdichten mit B und g über die Struktur der Sterne? Ist z.B. durch eine erhöhte Bagkonstante die Möglichkeit eines QP-Kerns ausgeschlossen? Um diesen Fragen näher zu kommen, müßten wir natürlich wissen, wie hoch die zentralen Energiedichten in typischen Neutronensternen tatsächlich sind. Teil II dieser Arbeit nochmals vorausgreifend, haben wir zu gegebenem g und B die zentrale Energiedichte (*central density*) eines Neutronensterns fester Masse in Abbildung 4.3 und 4.4 eingezeichnet. Solange sich (z.B. für $g = 0$) die dicke Linie auf der rechten Seite der grauen Fläche (d.h. im QP-Bereich) befindet, ist die zentrale Energiedichte über der MP$\to$QP Übergangsdichte. Der Stern besitzt eine reine QP in seinem Zentrum (QP-Kern). Entsprechendes gilt für den MP- und den HP-Bereich bei höheren Bagkonstanten. Sofort auffallend ist, daß es keine „typische zentrale Energiedichte“ im Neutronenstern zu geben scheint. Durch Veränderung der Parameter B und g ändern sich die Hybridstern-EOS's und mit ihr die zentralen Energiedichten im Stern um grob eine Größenordnung von $\epsilon_c \approx \epsilon_0$ bis etwa $\epsilon_c \approx 10\,\epsilon_0$. Es macht also offensichtlich keinen Sinn, von einer „typischen Energiedichte“ im Neutronenstern zu sprechen, ohne sich auf spezielle EOS's zu beziehen.

Ein weiterer interessanter Punkt ist insbesondere in Abbildung 4.4 für $g = 0$ und $g = 1$ zu beobachten. Erhöhen wir $B^{1/4}$ von 165 MeV auf etwa 175 MeV, dann sollte man eigentlich durch die ansteigende MP$\to$QP Übergangsdichte erwarten, daß die Möglichkeit eines QP-Kerns im Stern unwahrscheinlicher wird. Gleichzeitig erhöhen sich aber auch die zentralen Energiedichten, so daß diese über diesen Bereich der Bagkonstanten im QP-Bereich bleiben. Dies sagt uns, daß eine erhöhte Bagkonstante (obwohl sie die QP energetisch ungünstiger macht) durch das Wechselspiel zwischen EOS's, Übergangsdichten und zentralen Energiedichten die Wahrscheinlichkeit eines QP-Kerns im Hybridstern nicht automatisch verringert. Aber wie läßt sich der Anstieg der zentralen Energiedichte qualitativ verstehen? Die zentrale Energiedichte eines Sterns mit festgehaltener Masse hängt davon ab, wie weich oder hart die EOS (in der $p = p(\epsilon)$ Form) ist. Weichere EOS's besitzen höhere zentrale Energiedichten als härtere EOS's [8]. In einem vereinfachten Bild kann man sich vorstellen, daß ein Stern mit einer weicheren EOS durch die gravitativen Kräfte auf einen kleineren Radius zusammengedrückt wird und demnach eine höhere Zentraldichte besitzt[2]. In unserem Falle, z.B. für die $g = 0$ Linie aus Abbildung 4.3, spielen zwei gegeneinander konkurrierende Effekte eine Rolle. Durch die Erhöhung von B wird einerseits der Niedrigdichtebereich der EOS durch einen sich vergrößernden Dichtebereich der HP härter. (Die HP ist härter als die MP). Andererseits wird die QP umso weicher, je größer B wird. Da sich bei niedrigem B noch große Dichtebereiche in der QP befinden, dominiert für kleine B der letztgenannte Effekt. Die zentrale Energiedichte steigt mit B. In beiden Abbildungen geschieht dies bis $B^{1/4} \approx 175\,\mathrm{MeV}$ für $g = 0$. Wir werden in Kapitel 6.4 tatsächlich sehen, daß in diesem Bereich der Bagkonstanten die interne Struktur des Neutronensterns (wie die Dicke des QP-Kerns) nur wenig von B abhängt, da sowohl die MP$\to$QP Übergangsdichte, als auch die zentrale Energiedichte mit B steigt. Für noch höhere B übertrifft aber der erste Effekt (größere HP) den zweiten Effekt, und die Zentraldichte sinkt, bis sie auf den Wert des reinen HP-Sterns abgefallen ist ($\epsilon_c \approx 3\,\epsilon_0$ für GPS und $\epsilon_c \approx 1.5\,\epsilon_0$ für TM2[3]).

In Abbildung 4.4 ist für $g = 0$ und $g = 1$ ein sehr flacher Verlauf der zentralen Energiedichte zu erkennen. Dieser wirkt, als könne es zwei verschiedene zentrale Energiedichten geben, die auf einen Stern mit gleicher Masse führen. Der eine Stern besitzt einen MP-Kern, der andere einen QP-Kern. Auf die Ursache für diese überraschende Tatsache werden wir in Teil III dieser Arbeit zurückkommen.

Abbildung 4.5 soll ein Gefühl dafür vermitteln, wie sich die Variationen der Modellparameter (B, g) und die Verwendung verschiedener HP-EOS's auf die Unsicherheit in der EOS in der Form $p = p(\epsilon)$ auswirkt. Die Parameter wurden dazu in den in Tabelle 2.1 gezeigten, physikalisch sinnvollen Bereichen variiert. Es zeigt sich in dieser

[2]Eigentlich sind diese Zusammenhänge durch die allgemeinrelativistische Natur des Neutronensterns wesentlich komplizierter. Letztlich kann nur die Betrachtung des allgemeinrelativistischen, hydrostatischen Gleichgewichts (Kapitel 5) solche Zusammenhänge klären. Für die hier angestellten qualitativen Überlegungen reicht aber obige Argumentation aus.

[3]Man beachte hierbei die unterschiedlichen Neutronensternmassen.

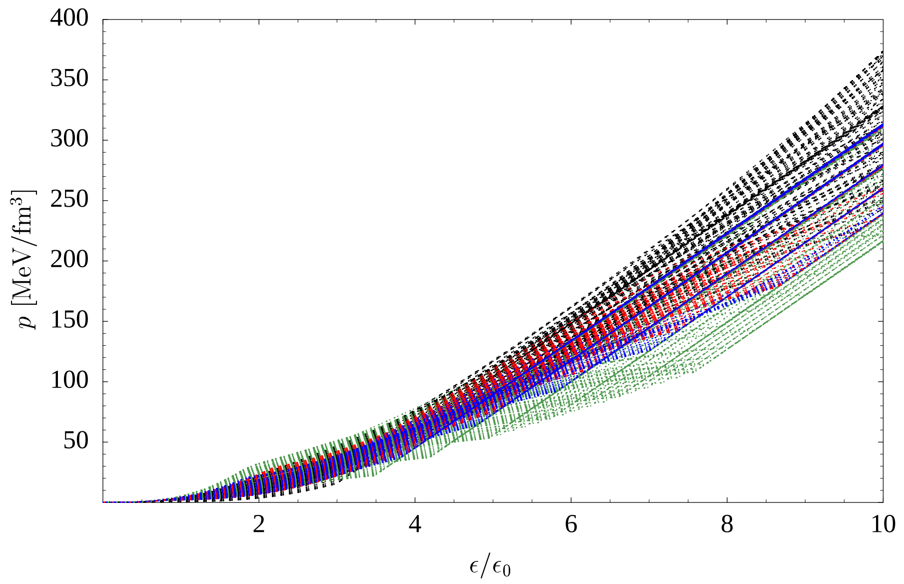

Abbildung 4.5: Zusammenstellung von etwa 500 durch die Phasenübergangskonstruktion berechneten Hybridstern-EOS's. Diese ergeben sich durch Variation der Modellparameter in physikalisch sinnvollen Bereichen (siehe z.B. Tabelle 2.1). Diese EOS's stellen einen Großteil der in späteren Kapiteln verwendeten EOS's zur Berechnung der Neutronensternstruktur dar.

Abbildung eine beträchtliche Modell- und Parameterabhängigkeit. Um so mehr überrascht es, daß wir in Teil II dieser Arbeit in der Lage sein werden, Gemeinsamkeiten dieser EOS's in bezug auf die Auswirkung des Phasenübergangs auf die Struktur des Neutronensterns zu finden.

4.2 Zustandsgleichungen im NJL-Modell

Nach der Diskussion der Hybridstern-EOS im Bag-Modell kommen wir nun zur Verwendung des NJL-Modells zur Beschreibung der QP im Stern. In Kapitel 3.2 haben wir bei der Phasenübergangskonstruktion gesehen, daß die für den Phasenübergang notwendigen Drücke in typischen Neutronensternen bei Verwendung des NJL-Modells nicht erreicht werden. Diese Tatsache betrachten wir nun aus dem Blickwinkel der Phasenübergangsdichten. Abbildung 4.6 zeigt die Hybridstern-EOS unter Verwendung der GPS-EOS für die HP. Diese EOS wurde aus der Phasenübergangskonstruktion in Abbildung 3.3 auf Seite 48 berechnet. Im Vergleich zur Abbildung 4.1 im Bag-Modell sehen wir, daß der HP$\rightarrow$MP Übergang erst bei Dichten von $\epsilon \approx 7\,\epsilon_0$ stattfindet. Im Bag-Modell werden solch hohe Übergangsdichten erst bei sehr hohen Bagkonstanten und Kopplungskonstanten angenommen (vergleiche Abbildung 4.3). Wie wir schon

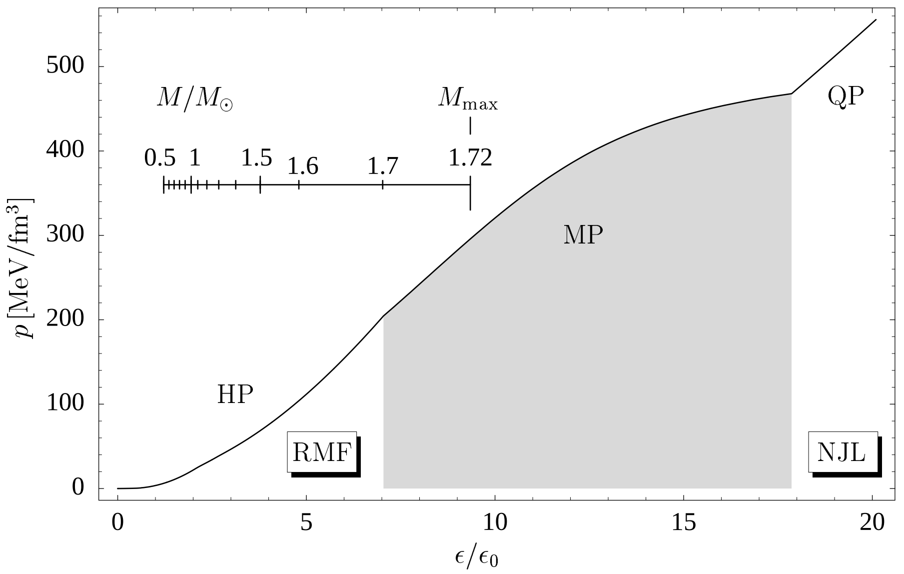

Abbildung 4.6: Hybridstern-EOS für die GPS-EOS bei Verwendung des NJL-Modells für die QP. Der Dichtebereich der MP ist grau unterlegt. $\epsilon_0 = 140\,\mathrm{MeV/fm}^3$. In der zusätzlichen Skala sind die zentralen Energiedichten für verschiedene Neutronensternmassen eingezeichnet. Offensichtlich sind die Zentraldichten typischer Neutronensterne ($M \approx 1.4\,M_\odot$) nicht ausreichend, um im NJL-Modell einen MP- oder QP-Kern im Stern auszubilden.

diskutiert haben, sind die im NJL-Modell vorhergesagten hohen effektiven Strangequarkmassen die Ursache für die hohen Übergangsdichten. Die mit den hohen Massen verbundene Absenkung des Drucks der QP bei gegebenem chemischen Potential schiebt die MP in der Gibbs-Konstruktion zu höheren Drücken und dadurch zu höheren Dichten. In Abbildung 4.6 sind zusätzlich die zentralen Energiedichten für verschiedene Neutronensternmassen eingezeichnet[4]. Offensichtlich werden für typische Neutronensternmassen (mit $\epsilon_c \approx 3-4\,\epsilon_0$) die für einen MP-Kern notwendigen zentralen Energiedichten von $\epsilon_c \gtrsim 7\,\epsilon_0$ nicht erreicht. Nur für den schmalen Massebereich von 1.7–1.72 $M_\odot$ ist ein MP-Kern möglich ($M = 1.72\,M_\odot$ ist die Maximalmasse). Bei Verwendung der anderen HP-EOS (TM1, TM2 und GL85) erhalten wir sogar im gesamten Bereich möglicher zentraler Energiedichten keinen Phasenübergang (bei diesen EOS's findet der Phasenübergang nicht unterhalb von $\epsilon \approx 10\,\epsilon_0$ statt). Die zugehörigen Neutronensterne bestehen demnach aus der reinen HP. Wir finden also bei Verwendung des NJL-Modells für die QP, daß zumindest für die verwendeten HP-EOS die Existenz von MP- oder QP-Kernen in typischen Neutronensternen mit $M \approx 1.4\,M_\odot$ ausgeschlossen ist.

[4]Die Berechnung dieser Massen aus der EOS diskutieren wir in Kapitel 5.

4.3 Zusammenfassung

In Kapitel 4 haben wir die Eigenschaften der kompletten EOS's mit HP, MP und QP diskutiert. Diese EOS's bezeichnen wir als *Hybridstern-EOS's*. Besonderes Augenmerk richteten wir auf die Untersuchung der Phasenübergangsdichten.

- Der HP→MP Phasenübergang macht die Hybridstern-EOS weicher (siehe Abbildung 4.1 auf Seite 51). Der MP→QP Übergang macht sie härter (siehe Abbildung 4.2 auf Seite 53).

- In einem weiten Dichtebereich besteht die Hybridstern-EOS aus der MP. Diese erstreckt sich über einen endlichen Druckbereich.

- Die durch g parametrisierten Mediumeffekte der QP im Bag-Modell erhöhen die Phasenübergangsdichten. Diese steigen auch mit der Bagkonstanten B. Siehe dazu Abbildung 4.3 und 4.4 auf Seite 55 und 56.

- Eine Veränderung von g oder B wirkt sich stärker auf die MP→QP Übergangsdichten als auf die HP→MP Übergangsdichten aus (Abbildung 4.3 und 4.4 auf Seite 55 und 56). Wir haben gezeigt, daß dies eine allgemeine Eigenschaft der Gibbs-Konstruktion ist (siehe Seite 53). Eine Unsicherheit (z.B. in B) wirkt sich mit der Dichte gewichtet auf die Unsicherheit in den Phasenübergangsdrücken aus. Durch die höhere Dichte des MP→QP Übergangs ist dieser sensitiver auf eine Änderung der Modellparameter als der HP→MP Übergang.

- Es gibt keine „typische zentrale Energiedichte“ im Neutronenstern. Bei fester Neutronensternmasse hängt diese stark von der jeweiligen Hybridstern-EOS ab (siehe die dicken Linien in Abbildung 4.3 und 4.4 auf Seite 55 und 56).

- Das starke „Abknicken“ in den Hybridstern-EOS's beim MP→QP Übergang in Abbildung 4.2 auf Seite 53 wird wesentlich für den Teil III dieser Arbeit.

- Verwenden wir das NJL-Modell zur Beschreibung der QP, so finden wir, daß ein typischer Neutronenstern mit $M \approx 1.4\,M_\odot$ keinen MP- oder QP-Kern aufweist (siehe Abbildung 4.6 auf Seite 59). Dies kann auf die hohen Strangequarkmassen im NJL-Modell zurückgeführt werden (siehe Abbildung 2.8 auf Seite 35).

Teil II

Die Struktur der Neutronensterne

Kapitel 5

Hydrostatisches Gleichgewicht

Kapitelübersicht

5.1 Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichungen

Nachdem wir uns in Teil I dieser Arbeit mit den EOS's von Neutronensternmaterie mit Phasenübergang zur QP beschäftigt haben, wollen wir Teil II damit beginnen, den wichtigen Zusammenhang zwischen den EOS's der Neutronensternmaterie und der Struktur von Neutronensternen herzustellen.

Die Bedingung des hydrostatischen Gleichgewichts im Neutronenstern stellt einen Zusammenhang zwischen observablen Eigenschaften des Neutronensterns (wie seiner Masse M und seines Radius R) und der EOS der Neutronensternmaterie her.

$$\underset{M,R}{\text{Observabele Eigenschaften}} \quad \overset{hydrost.Gleichg.}{\longleftrightarrow} \quad \underset{p=p(\epsilon)}{\text{Zustandsgleichung}}$$

Dieser Zusammenhang eröffnet uns die einmalige Möglichkeit, durch das Studium von Neutronensternen etwas über die Eigenschaften von dichter und kalter Materie zu lernen. Die Bedingung des hydrostatischen Gleichgewichts der Allgemeinen Relativitätstheorie wurde Ende der 30er Jahre zum ersten mal von Robert Oppenheimer und seinem Studenten Georg Volkoff in Zusammenarbeit mit Richard Tolman abgeleitet [10, 11]. Die so erhaltenen Differentialgleichungen, die sog. Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)-Gleichungen, beschreiben die Struktur eines statischen, sphärisch symmetrischen Sterns. Wir verzichten hier auf eine Ableitung der TOV-Gleichung (wie sie z.B. in [62] oder [34] gefunden werden kann) und beschränken uns auf die Diskussion der Gleichungen und ihrer Lösung. Die TOV-Gleichungen lauten (mit $G = c = 1$):

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r) \tag{5.1}$$

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{\epsilon(r)m(r)}{r^2}\left(1+\frac{p(r)}{\epsilon(r)}\right)\left(1+\frac{4\pi p(r)r^3}{m(r)}\right)\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}. \tag{5.2}$$

Bei gegebener EOS in der Form $p = p(\epsilon)$ lassen sich diese Gleichungen lösen, um die Funktionen des Massenprofils $m = m(r)$ und des Druckprofils $p = p(r)$ im Stern zu berechnen. Dabei ist r der radiale Abstand vom Ursprung des Sterns und $m(r)$ die in einer Kugel vom Radius r um den Ursprung des Sterns enthaltene gravitative Masse[1]. Die in Gleichung (5.2) auftretenden Terme

$$\frac{m(r)}{r^2}, \quad \frac{p(r)r^3}{m(r)} \quad \text{und} \quad \frac{m(r)}{r} \tag{5.3}$$

sind im Ursprung $r = 0$ gutmütig. In der Nähe des Ursprungs skaliert $m(r)$ wie $\epsilon(0)r^3$ und die Ausdrücke (5.3) verschwinden für $r \to 0$. Für die Integration dieser Gleichungen verwendet man die Startwerte $m(0) = 0$ und einen beliebigen zentralen Druck $p(0) = p_c$. Die TOV-Gleichungen werden nun vom Sterninneren ($r = 0$) nach außen integriert. Der Rand des Sterns ($r = R$) ist erreicht, wenn der Druck auf $p = 0$ abgefallen ist[2]. Da ein verschwindender Druck keine weiteren Materieschichten gegen die auf sie wirkende gravitative Anziehungskraft im Gleichgewicht halten kann, ist dadurch der Radius R des Sterns definiert. An diesem Radius läßt sich nun die gravitative Masse $M = m(R)$ des Sterns ablesen. Somit lassen sich bei gegebener EOS in der Form $p = p(\epsilon)$ die Masse und der Radius eines Neutronensterns mit einem Zentraldruck p_c berechnen. Die Lösungen der TOV-Gleichungen sind in Abbildung 5.1 schematisch gezeigt. Eine Variation des Zentraldrucks führt zu den sog. Masse-Radius Relationen, welche wir in Kapitel 6 untersuchen werden. In Kapitel 7.1 werden wir die Stabilitätskriterien für die erhaltenen Lösungen gegenüber radialen Vibrationen des Sterns diskutieren.

Bevor wir zur weiteren Interpretation der TOV-Gleichungen übergehen, sei erwähnt, daß der aus den TOV-Gleichungen berechnete Radius R durch eine Umfangs- oder Oberflächenmessung des Neutronensterns interpretiert werden kann. Der Umfang U und die Oberfläche A hängen (wie im flachen Raum) über $U = 2\pi R$ und $A = 4\pi R^2$

[1] Der Begriff der „gravitativen Masse“ ist in Kapitel 5.2 erläutert.

[2] Durch die negative rechte Seite von Gleichung (5.2) läßt sich ablesen, daß der Druck im Stern streng monoton von innen nach außen fallen muß. Dies ist wesentlich im Zusammenhang mit einer möglichen Mischphase im Neutronenstern. Siehe dazu Anhang C.

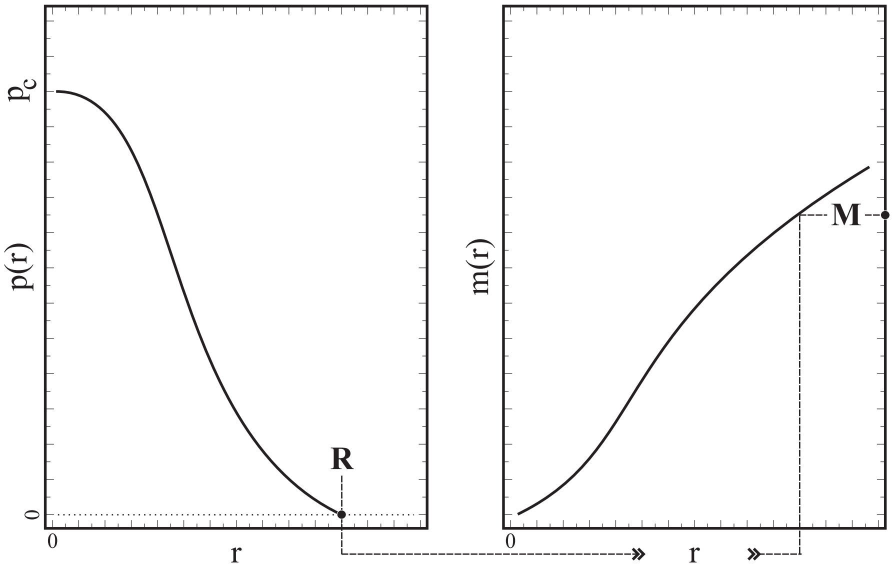

Abbildung 5.1: Schematische Darstellung der Lösung der TOV-Gleichungen (5.1), (5.2) zu gegebenem Zentraldruck p_c. Links: Das Druckprofil innerhalb des Sterns bestimmt den Radius des Sterns durch das verschwinden des Druckes am Rand des Sterns $p(R) = 0$. Rechts: Da $m(r)$ die Masse innerhalb einer Kugel mit Radius r um den Ursprung des Sterns ist, ergibt $m(R)$ die Gesamtmasse M des Sterns.

mit dem Radius des Sterns zusammen. Dies läßt sich bei Betrachtung der Schwarzschildlösung im Außenraum des Sterns zeigen [62, 8].

Zur weiteren Interpretation der TOV-Gleichungen betrachten wir den Newtonschen Limes mit $p \ll \epsilon$ und $m \ll r$. In diesem Limes gehen die Gleichungen (5.1) und (5.2) über in

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho_m(r), \tag{5.4}$$

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{\rho_m(r)m(r)}{r^2} \tag{5.5}$$

mit der Massendichte ρ_m. Erweitern wir Gleichung (5.5) mit $4\pi r^2 dr$, so erhalten wir

$$4\pi r^2 dp(r) = -\frac{dm(r)m(r)}{r^2} \tag{5.6}$$

mit $dm(r) = 4\pi r^2 \rho_m dr$. Diese Gleichung läßt sich nun leicht mit dem notwendigen Druckanstieg $dp(r)$ identifizieren, welcher notwendig ist, um die von der Masse $m(r)$ ausgeübte Gravitationskraft auf die Massenschale $dm(r)$ auszugleichen. Die weiteren in Gleichung (5.2) auftretenden Produktterme sind (exakte) allgemeinrelativistische Korrekturterme, die für Neutronensterne wesentlich sind. So ist die Newtonsche Näherung $m \ll r$ für einen Neutronenstern der typischen Masse von $M = 1.4 M_\odot \approx 2.1\,\mathrm{km}$

($M_\odot \approx 3/2\,\text{km}$) und einen Radius von $R = 10\,\text{km}$ nicht gut erfüllt. Generell sind allgemeinrelativistische Korrekturen von der Ordnung

$$1 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} \overset{M \ll R}{\approx} \frac{2M}{R}$$

und somit für Neutronensterne nicht zu vernachlässigen (s. Tabelle 5.1).

Objekt	$M/M_\odot$	R [km]	2M/R
Neutronenstern	1.4	10	0.4
Weißer Zwerg (Sirius B)	1	5400	6×10^{-4}
Sonne	1	7×10^5	4×10^{-6}
Erde	3×10^{-6}	6000	2×10^{-9}

Tabelle 5.1: Allgemeinrelativistische Korrekturen der Größenordnung $2M/R$ für verschiedene Objekte.

5.2 Der Begriff der gravitativen Masse

In diesem Kapitel wird die im letzten Kapitel verwendete Bezeichnung „gravitative Masse" genauer diskutiert. Der Begriff „gravitative Masse" soll andeuten, daß in der durch Gleichung (5.1) berechneten Masse (negative) Beiträge der gravitativen Bindungsenergie enthalten sind. Die gravitative Masse ist demnach kleiner als die Summe der Massen des auf unendlich großem Raum verteilten Sterns. Diese Situation ist vergleichbar mit dem Massendefekt der Kernphysik, welcher der Bindungsenergie der Nukleonen im Atomkern entspricht. Diese liegt in der Größenordnung von 10 MeV pro Nukleon und entspricht demnach ca. 1% der Masse des Nukleons von knapp 1000 MeV. Wie groß ist aber die Bindungsenergie eines Nukleons in einem Neutronenstern? Dies wollen wir grob für einen Neutronenstern mit der Masse $M = M_\odot \approx 3/2\,\text{km}$ und einem Radius von $R = 10\,\text{km}$ berechnen. Dazu schätzen wir die gravitative Bindungsenergie einer homogenen Massenverteilung (in Newtonscher Näherung) im Verhältnis zur Masse ab als

$$\frac{E_G}{M} \approx \frac{3}{5}\frac{M}{R} \approx \frac{3}{5} \cdot \frac{3/2\,\text{km}}{10\,\text{km}} \approx 0.1. \tag{5.7}$$

Somit entspricht die Bindungsenergie des Neutronensterns etwa 10% seiner Masse. Daraus folgt auch, daß die Bindungsenergie eines Nukleons etwa 10% seiner Masse, also etwa 100 MeV pro Nukleon entspricht. Damit ist ein Nukleon im Neutronenstern gravitativ um eine Größenordnung stärker gebunden als ein Nukleon „stark" im Atomkern.

In diesem Zusammenhang wurde von Weinberg [63] gezeigt, daß eine von der EOS unabhängige Grenze von

$$\frac{2M}{R} < \frac{8}{9} \tag{5.8}$$

gilt. Diese Grenze ist allein aus den TOV-Gleichungen (5.1) und (5.2) sowie wenigen physikalischen Zusatzbedingungen ableitbar[3]. Durch (5.8) ist gleichzeitig eine obere Grenze an die Bindungsenergie gegeben. Man erhält

$$\frac{E_G}{M} \approx \frac{3}{5}\frac{M}{R} \lesssim \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9} \approx 0.27. \tag{5.9}$$

Damit kann die Bindungsenergie eines Neutronensterns maximal 27% seiner Masse entsprechen. Dies ist eine obere Grenze für die bei einer Supernova-Explosion freiwerdende Energie, welche gerade die Bindungsenergie des entstehenden Neutronensterns ist. Diese hohen gravitativen Bindungsenergien zeigen uns, daß die durch Fusion freiwerdende Energie innerhalb des etwa 10^8 Jahre dauernden Lebens eines Sterns mit $M = 5M_\odot$ um Größenordnungen kleiner ist als die Bindungsenergie die bei der Supernova-Explosion am Ende seines Lebens freigesetzt wird.

Die durch Gleichung (5.1) berechnete gravitative Masse entspricht desweiteren der Masse, welche in die Schwarzschild-Metrik [8] eingeht (d.h. der Metrik außerhalb des Sterns). Die gravitative Masse ist somit die „außerhalb des Sterns wirkende Masse“ und legt dadurch Observablen, wie die Perioden von Planetenumlaufbahnen oder die Periheldrehung von umgebenen Objekten, fest [63]. Aus diesem Grund bezeichnen wir in den anderen Kapiteln dieser Arbeit die gravitative Masse des Neutronensterns kurz als seine Masse.

[3] Die gleiche Grenze erhält man auch unter Annahme eines Sterns mit konstanter Dichte [63].

5.3 Zusammenfassung

In Kapitel 5 wurde die Bedingung des allgemeinrelativistischen hydrostatischen Gleichgewichts in einem statischen, sphärisch symmetrischen Sterns diskutiert. Diese Bedingung ist in der Form der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen (TOV-Gleichungen) (5.1) und (5.2) gegeben. Die TOV-Gleichungen ermöglichen die Berechnung von Massen M und Radien R eines Sterns bei gegebener EOS und gegebenem Zentraldruck p_c (vergleiche Abbildung 5.1). Durch Variation des Zentraldrucks erhält man die Masse-Radius Relationen, welche im nächsten Kapitel untersucht werden.

- Neutronensterne müssen durch ihren hohen Wert von M/R allgemeinrelativistisch beschrieben werden (im Gegensatz zu Weißen Zwergen, Sonnen oder Planeten). Siehe dazu Tabelle 5.1.

- Die TOV-Gleichungen (5.1) und (5.2) beschreiben das allgemeinrelativistische Gleichgewicht zwischen dem Druck (der EOS) und der gravitativen Anziehungskraft in jedem Punkt des Stern. Zur Interpretation der TOV-Gleichungen dient ihr nichtrelativistischer Limes (5.4) und (5.5) bzw. (5.6).

- Die EOS geht ausschließlich in der Form $p = p(\epsilon)$ in die TOV-Gleichungen ein.

- Der Druck im Stern muß streng monoton von innen nach außen fallen (s. Gleichung (5.2) und Abbildung 5.1). Dies ist wesentlich im Zusammenhang mit einer möglichen Mischphase im Neutronenstern. Siehe dazu Anhang C.

- Der durch die TOV-Gleichungen berechnete Radius R entspricht dem an der Oberfläche des Sterns gemessenen Sternumfangs geteilt durch 2π.

- Die durch die TOV-Gleichungen berechnete (gravitative) Masse enthält die (negative) gravitative Bindungsenergie des Sterns (s. Kapitel 5.2). Die gravitative Bindungsenergie eines Neutronensterns kann bis zu 27% seiner Masse entsprechen. (Der Massendefekt in Atomkernen entspricht etwa 1% der Kernmasse). Diese Energie wird in der Supernova-Explosion frei.

- Nukleonen sind gravitativ mit etwa 100 MeV pro Nukleon in typischen Neutronensternen gebunden (Nukleonen im Atomkern mit etwa 10 MeV pro Nukleon).

Kapitel 6

Masse-Radius Relationen

KAPITELÜBERSICHT

6.1 Die Charakteristiken

Mit den in Kapitel 5 diskutierten TOV-Gleichungen sind wir nun in der Lage, die Masse-Radius-Relationen (MR-Relationen) für beliebige EOS's aus Teil I dieser Arbeit zu berechnen. In diesem Abschnitt wollen wir zuerst auf typische Charakteristiken der MR-Relationen eingehen und qualitativ diskutieren, welchen Einfluß der Deconfinement Phasenübergang auf mögliche Massen und Radien von Neutronensternen hat. Beginnen wir mit den MR-Relationen der rein hadronischen Neutronensterne, d.h. mit den Lösungen der TOV-Gleichungen für die HP-EOS's TM1, TM2, GPS und GL85 aus Kapitel 1.2. Abbildung 6.1 zeigt die MR-Relationen dieser EOS's. Jeder Punkt auf einer MR-Relation entspricht einer hydrostatisch stabilen Konfiguration eines Neutronensterns. Die zentrale Energiedichte ϵ_c (bzw. der zentrale Druck p_c aus Abbildung 5.1) steigt von großen Radien und kleinen Massen zu kleinen Radien bzw. großen Massen hin an, d.h. von rechts nach links entlang der MR-Relation. Im Bereich kleiner Massen ($M \lesssim 0.3\, M_\odot$) sind sich die verschiedenen MR-Relationen sehr ähnlich. Erniedrigt man die Massen, so erniedrigt man gleichsam die gravitative Anziehungskraft. Der Stern kann sich dadurch zu immer größeren Radien ausdehnen. Die Ähnlichkeit der verschieden Relationen liegt daran, daß bei geringen Massen die EOS des subnuklearen

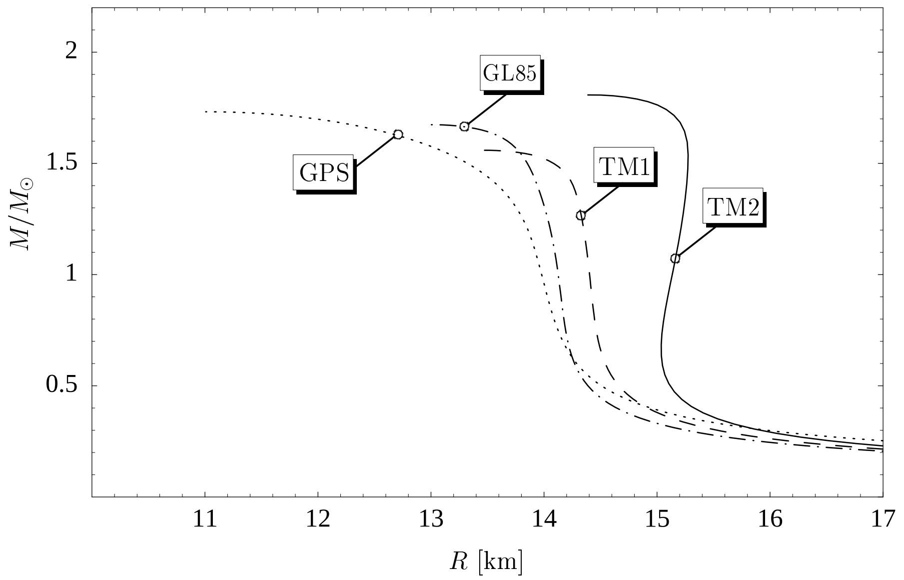

Abbildung 6.1: MR-Relationen unter Verwendung der rein hadronischen EOS's. Man Vergleiche dazu die härte der EOS's in Abbildung 1.3 mit den daraus resultierenden Radien des Sterns bei gegebener Masse.

Dichtebereichs einen immer größer werdenden Anteil an der gesamten EOS bei der Integration der TOV-Gleichungen hat. Für diesen subnuklearen Bereich verwenden wir die BPS-EOS (Kapitel 1.1). Diese bestimmt demnach das Verhalten der MR-Relation bei niedrigen Massen.

Im Bereich leicht unterhalb typischer Neutronensternmassen zeigen die MR-Relationen einen mehr oder weniger steilen Anstieg der Masse bei nahezu konstantem Radius (MR-Flanke). Interessant wäre in diesem Zusammenhang die Frage, ob sich eine Eigenschaften der EOS finden ließe, welche maßgeblich den Radius der MR-Flanke bestimmt. Würden wir experimentell den Radius eines Neutronensterns kennen, so könnten wir daraus auf diese Eigenschaften der EOS schließen. Dabei ist natürlich anzunehmen, daß der gemessene Neutronenstern auf einer solchen MR-Flanke „sitzt“. Solche Untersuchungen wurden bisher nicht unternommen.

Für höhere Massen wird die MR-Relation immer flacher, bis die Masse einen Maximalwert (die sog. *kritische Masse* des Neutronensterns) erreicht. Wir nennen die zur kritischen Masse zugehörige zentrale Energiedichte die *kritische Energiedichte* ϵ_{crit}. Die MR-Relationen sind hier nur bis zu ihrer kritischen Masse gezeigt. Für noch höhere zentrale Energiedichten ($\epsilon_c > \epsilon_{\text{crit}}$) sinkt die Masse des Sterns wieder und man kann zeigen, daß diese Lösungen instabil gegenüber radialen Oszillationen (Vibrationen) des Sterns sind [8]. Wir werden in Teil III dieser Arbeit auf die Stabilitätskriterien gegenüber radialen Oszillationen zurückkommen und die faszinierende Möglichkeit eines weiteren stabilen Bereichs oberhalb der kritischen Energiedichte kennenlernen. Für die jetzigen Untersuchungen reicht es aber aus, die MR-Relationen bis zu ihrer kritischen Masse zu betrachten.

Für Massen im Bereich der typischen Neutronensternmasse von $M \approx 1.4\,M_\odot$ sehen wir, daß uns die HP-EOS's Radien im Bereich von etwa $13.5 - 15.5\,\mathrm{km}$ vorhersagen. Den kleinsten Radius hat GPS, gefolgt von GL85, TM1 und TM2. Wie können wir diese Radien mit den Eigenschaften der HP-EOS's in Verbindung bringen? Dazu beobachten wir in Abbildung 1.3 auf Seite 17, daß die Härte der EOS's im wesentlichen in der Reihenfolge GPS, GL85, TM1 und TM2 steigt. Die weicheren EOS's haben also die kleineren Radien. Diese Radien liegen (wie schon in der Einleitung erwähnt) sogar für die GPS-EOS noch weit über den experimentellen Radiusabschätzungen aus Abbildung 2. Wir wollen uns demzufolge fragen, wie sich die MR-Relationen der rein hadronischen Sterne aus Abbildung 6.1 verändern, wenn wir einen Deconfinement Phasenübergang im Stern zulassen. Schließlich haben wir in Kapitel 4 gesehen, daß der Deconfinement Phasenübergang die EOS's beim HP$\rightarrow$MP Phasenübergang weicher macht. Können wir dadurch kleinere Neutronensternradien erklären? Um das qualitative Verhalten der MR-Relationen mit und ohne Phasenübergang zu untersuchen, beschränken wir uns vorerst auf die beiden „extremsten“ MR-Relationen aus Abbildung 6.1, nämlich GPS und TM2. Abbildung 6.2 zeigt diese MR-Relationen mit und ohne Phasenübergang. Bis zu einer bestimmten Masse sehen beide MR-Relationen (d.h. die mit und ohne Phasenübergang) identisch aus. Dies ist der Fall, solange ϵ_c unterhalb der HP$\rightarrow$MP Übergangsdichte liegt. Überschreitet ϵ_c diese Übergangsdichte, dann wird die EOS weicher (siehe Abbildung 4.1 auf Seite 52) und die MR-Relation erreicht bei niedrigerer Masse ihren kritischen Wert. In den beiden hier gezeigten MR-Relationen mit Phasenübergang wurden Hybridstern-EOS's im Bag-Modell mit $B^{1/4} = 175\,\mathrm{MeV}$ und $g = 2$ verwendet. Von der HP$\rightarrow$MP Übergangsdichte bis zur kritischen Energiedichte bestehen diese EOS's aus der MP. Auf dem Ast der MR-Relation mit Phasenübergang bestehen die zugehörigen Sterne demnach aus einem MP-Core und einer HP-Hülle[1]. Wie wirkt sich nun die weiche MP auf die MR-Relation aus? Bei festem Radius sehen wir, daß die Massen der Hybridsterne kleiner sind, als die Massen der zugehörigen reinen HP-Sterne. Trotz des Phasenübergangs (und der dadurch reduzierten Maximalmasse) erreichen die Hybridsterne aber noch den Bereich der typischen Neutronensternmassen[2]. Bei fester Masse hat der Hybridstern offensichtlich den kleineren Radius. Wir sehen also, daß

[1] Den inneren Aufbau dieser Sterne (z.B. die Dicke des MP-Cores) diskutieren wir in Kapitel 6.4.

[2] Dies ist eine notwendige Bedingung, die jede MR-Relation erfüllen muß. Würden nun z.B. Neutronensternmassen im Bereich von $M = 2M_\odot$ gefunden werden (wie sie im Zusammenhang mit sog. quasiperiodischen Oszillationen [64] diskutiert werden), so könnten dadurch weiche EOS's ausgeschlossen werden [65].

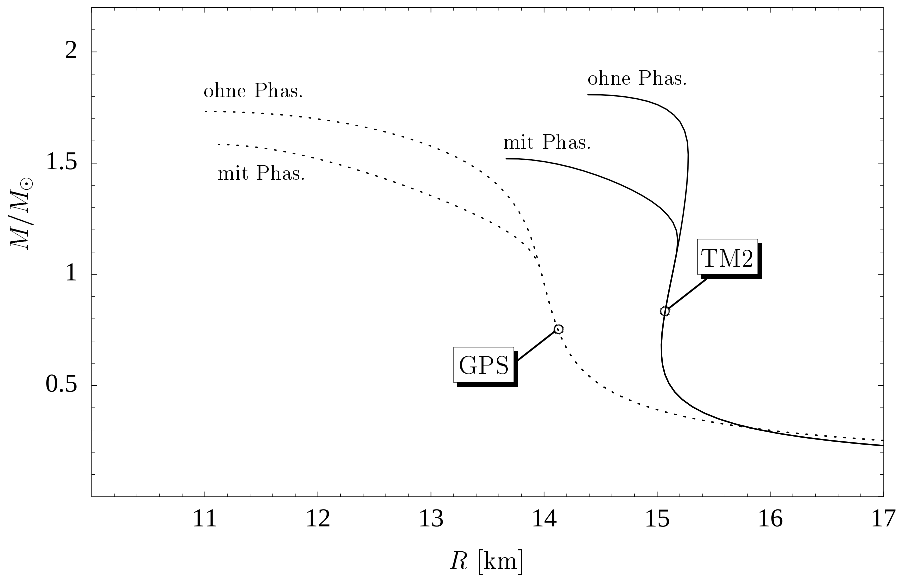

Abbildung 6.2: Vergleich von MR-Relationen mit und ohne Phasenübergang. Der Phasenübergang verschiebt die MR-Relationen zu kleinerer Masse (bei $R = const.$) und kleinerem Radius (bei $M = const.$). Die EOS's mit Phasenübergang sind Hybridstern-EOS's im Bag-Modell mit $B^{1/4} = 175\,\mathrm{MeV}$ und $g = 2$.

sich durch einen Deconfinement Phasenübergang und der damit verbundenen weicheren EOS kleinere Neutronensternradien (zu gegebener Masse) erklären lassen als mit den rein hadronischen Modellen. In Abbildung 6.2 sind bei $M = 1.4\,M_\odot$ die Hybridsterne um etwa 1 km kompakter als die reinen HP-Sterne. Die Tendenz der Radien geht also (in Hinblick auf die experimentellen Abschätzungen in Abbildung 2 auf Seite 7) in die richtige Richtung. Ob wir aber durch die Phasenübergänge wirklich in den Bereich der experimentellen Radiusabschätzungen kommen, kann erst eine systematische Analyse mit verschiedenen Modellparametern klären. Diese werden wir in Kapitel 6.2 durchführen.

Bevor wir die qualitative Diskussion in diesem Kapitel beenden, wollen wir nochmal auf die zentralen Energiedichten ϵ_c eingehen. Abbildung 6.3 zeigt die gleichen Relationen wie Abbildung 6.2, nur mit der Masse als Funktion der zentralen Energiedichte. Man sieht, daß zu gegebener Masse die weichere EOS (die mit Phasenübergang) die höhere zentrale Energiedichte hat. Dies haben wir schon bei der Diskussion der zentralen Energiedichten in den Abbildungen 4.3 und 4.4 auf Seite 55 und 56 bemerkt. An Abbildung 6.3 läßt sich qualitativ ersehen, warum bei fester Masse die zentralen Energiedichten recht sensitiv auf die „Weichheit“ der EOS's sind. Gerade in der Nähe der kritischen Masse (in der die $M(\epsilon_c)$ Relation sehr flach ist) kann eine kleine Änderung der EOS, die z.B. zu einer etwas kleineren kritischen Masse führt, die zentrale Ener-

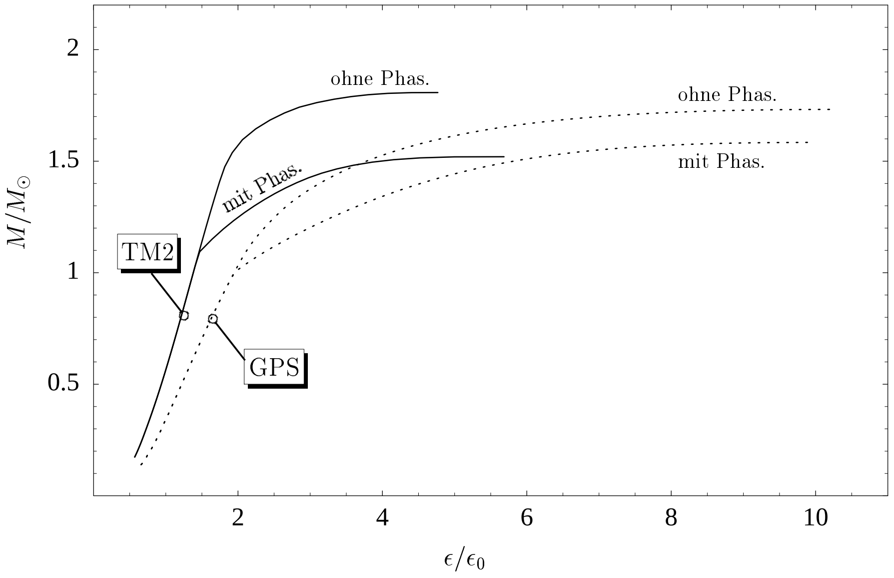

Abbildung 6.3: Masse als Funktion der zentralen Energiedichte mit und ohne Phasenübergang (vergl. Abbildung 6.2). Bei gegebener Masse des Neutronensterns hat die weichere EOS die größere zentrale Energiedichte. Die EOS's mit Phasenübergang sind Hybridstern-EOS's im Bag-Modell mit $B^{1/4} = 175\,\mathrm{MeV}$ und $g = 2$.

giedichte beträchtlich verändern. Dies ist die Ursache für die in Kapitel 4 beobachtete Tatsache, daß es in Neutronensternmodellen keine typische zentrale Energiedichte gibt.

6.2 Der Einfluß von Modellparametern

Nun wollen wir sehen, wie sich eine Veränderung der Modellparameter B und g des Bag-Modells für verschiedene HP-EOS's auf die MR-Relationen auswirkt. Was sind die minimalen Radien, die wir durch den Deconfinement Phasenübergang im Neutronenstern erreichen können? Welche Massen und Radien können Neutronensterne mit MP-Core (MC) oder mit QP-Core (QC) haben? Abbildungen 6.4 bis 6.7 zeigen MR-Relationen für verschiedene HP-EOS (GPS, GL85, TM1 und TM2), verschiedene Bagkonstanten ($B^{1/4} = 165, 170, 175, 180\,\mathrm{MeV}$) und verschiedene Kopplungskonstanten ($g = 0, 0.5, 1, \ldots$). Die mit H markierte Kurve ist die MR-Relation des rein hadronischen Sterns (d.h. ohne Phasenübergang). Wieder sehen wir (vergl. Abbildung 6.2), wie die MR-Relationen der Hybridsterne mit steigender zentraler Energiedichte (ausgehend von der hadronischen Kurve) zu kleineren Massen und Radien abknicken. An den verschiedenen Schattierungen unter den Kurven läßt sich nun ablesen, ob der zugehörige Hybridstern einen MP-Core (MC-Bereich der Abbildung) oder einen QP-Core (QC-Bereich) besitzt. Offensichtlich besitzen die QC-Sterne die kleinsten Radien. Die

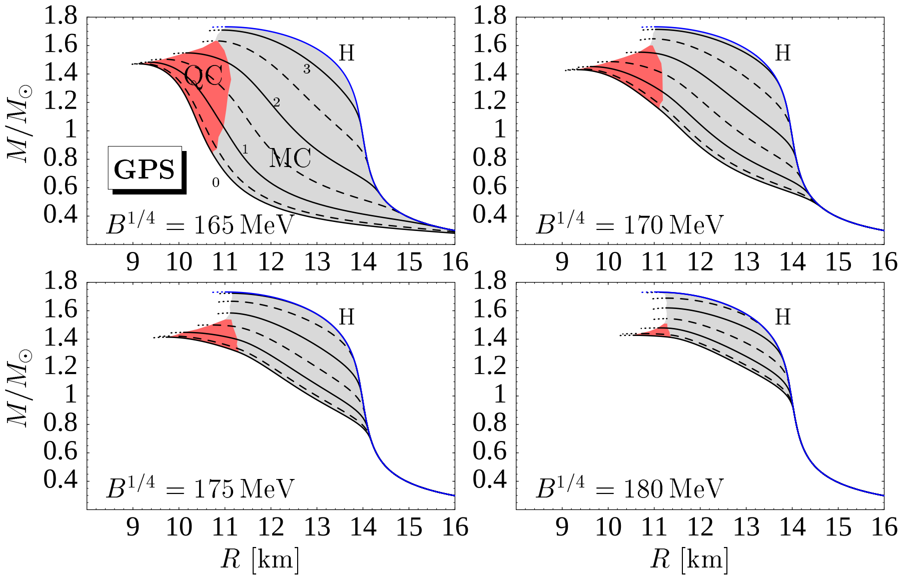

Abbildung 6.4: MR-Relationen für verschiedene B und g (kleine Zahlen im Feld links-oben). Die mit H markierte Relation ist die MR-Relation des rein hadronischen Sterns der GPS-EOS. Sterne im Bereich der mit MC markierten Fläche besitzen einen MP-Core, während Sterne im QC-Bereich einen QP-Core besitzen. Die kompaktesten Sterne besitzen einen QP-Core und haben Radien von etwa 9 bis 11 km.

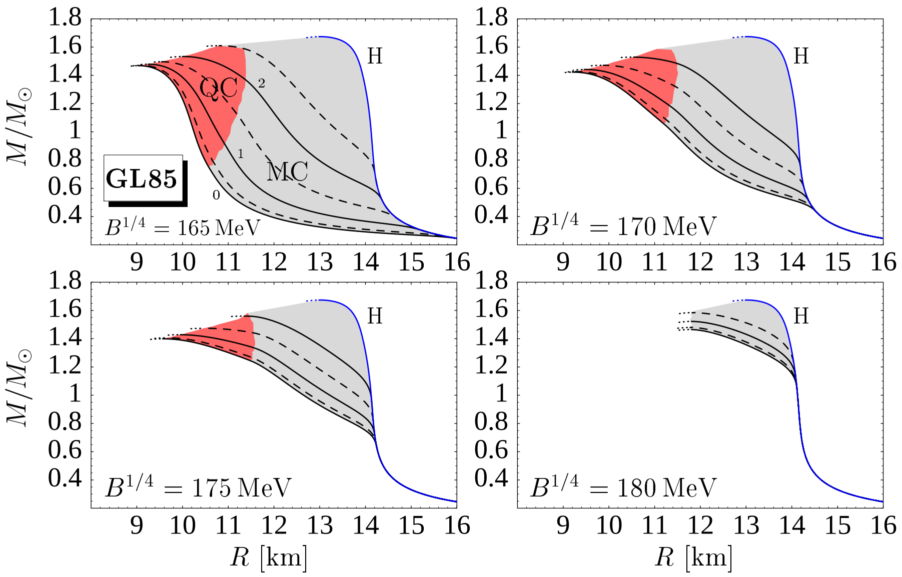

Abbildung 6.5: MR-Relationen für verschiedene B und g (kleine Zahlen im Feld links-oben). Die mit H markierte Relation ist die MR-Relation des rein hadronischen Sterns der GL85-EOS. Sterne im Bereich der mit MC markierten Fläche besitzen einen MP-Core, während Sterne im QC-Bereich einen QP-Core besitzen. Die kompaktesten Sterne besitzen einen QP-Core und haben Radien von etwa 9 bis 11 km.

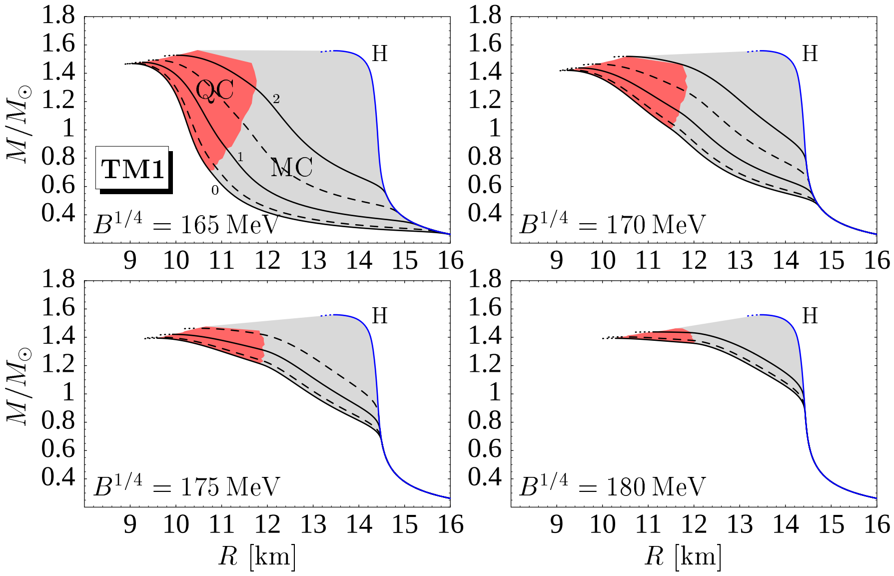

Abbildung 6.6: MR-Relationen für verschiedene B und g (kleine Zahlen im Feld links-oben). Die mit H markierte Relation ist die MR-Relation des rein hadronischen Sterns der TM1-EOS. Sterne im Bereich der mit MC markierten Fläche besitzen einen MP-Core, während Sterne im QC-Bereich einen QP-Core besitzen. Die kompaktesten Sterne besitzen einen QP-Core und haben Radien von etwa 9 bis 12 km.

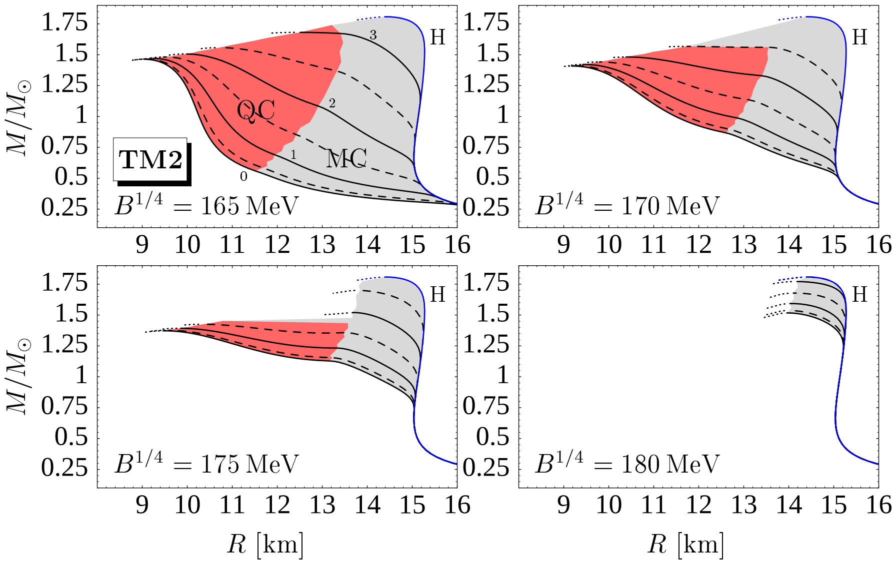

Abbildung 6.7: MR-Relationen für verschiedene B und g (kleine Zahlen im Feld links-oben). Die mit H markierte Relation ist die MR-Relation des rein hadronischen Sterns der TM2-EOS. Sterne im Bereich der mit MC markierten Fläche besitzen einen MP-Core, während Sterne im QC-Bereich einen QP-Core besitzen. Die kompaktesten Sterne besitzen einen QP-Core und haben Radien von etwa 9 bis 13.5 km.

Minimalradien liegen bei etwa 9 km. Die MC-Sterne hingegen liegen in ihrem Radius zwischen den rein hadronischen Sternen (H-Sternen) und den QC-Sternen. Damit können die Radien von MC-Sternen beliebig dicht an den Radien von H-Sternen liegen. Dadurch sind MC-Sterne durch Radiusmessungen schwer von H-Sternen zu unterscheiden. Die kritischen Massen werden durch den Phasenübergang um bis zu $0.3\,M_\odot$ reduziert.

Welchen Einfluß hat die Bagkonstante B auf die MR-Relationen? Mit steigendem B wird der Masse- und Radiusbereich der MC- und QC-Sterne immer kleiner und zieht sich in Richtung der hadronischen Lösung H zu höheren Massen zusammen. Dies liegt daran, daß mit steigendem B die Phasenübergangsdichten immer weiter ansteigen (siehe Abbildung 4.3 und 4.4), und somit die für den HP$\rightarrow$MP Übergang notwendige zentrale Energiedichte erst bei höheren Massen erreicht wird. Die Möglichkeit, einen QC-Stern zu erhalten, kann dadurch vollkommen verhindert werden (wie in Abbildung 6.5 bei $B^{1/4} = 180\,\mathrm{MeV}$ zu sehen ist). Solange es aber einen QC-Bereich gibt, liegen die zugehörigen Radien in dem Bereich von etwa $9-11\,\mathrm{km}$ für GPS und GL85, von $9-12\,\mathrm{km}$ für TM1 und von $9-13\,\mathrm{km}$ für TM2.

Auch Mediumeffekte zeigen eine ähnliche Auswirkung auf die MR-Relationen. Für $g = 0$ (die unterste MR-Relation) haben wir den größten Massenbereich, der zu QC-Sternen führt. Erhöhen wir die Mediumeffekte, so bewegt sich die MR-Relation immer weiter in Richtung der hadronischen Lösung (H), d.h. zu größeren Massen. Dabei wird der Massebereich der QC-Sterne immer kleiner, bis es z.B. ab $g = 2.5$ (Abbildung 6.4, $B^{1/4} = 165\,\mathrm{MeV}$) keine QC-Sterne mehr gibt. Die Ursache für dieses Verhalten liegt wieder in dem Anstieg der Phasenübergangsdichten. In diesem Fall steigen diese mit zunehmendem g (siehe Abbildung 4.3 und 4.4). Die MR-Relation bleibt also bis zu noch höheren zentralen Dichten auf der hadronischen Lösung, bis sie dann in den MC-Bereich abknickt. Wir werden in Kapitel 6.4 auf die Frage zurückkommen, bei welchen Parametern B und g wir welchen internen Aufbau des Neutronensterns erwarten können.

6.3 Die Kompaktheit von Neutronensternen mit Quarkphasen

An den Abbildungen 6.4 bis 6.6 ist folgende Tatsache bemerkenswert: Egal wie wir die Parameter B und g des Bag-Modells ändern, wir erhalten immer einen ähnlichen Radiusbereich der QC-Sterne (zumindest solange überhaupt ein QC-Bereich existiert). (In Abbildung 6.7 scheint der Radiusbereich der QC-Sterne etwas größer zu sein. Dort können QC-Sterne Radien bis etwa 13 km besitzen). Bei fester Masse gibt es eine Art „Radiusseparation" zwischen dem QC-Bereich und der rein hadronischen Lösung von etwa 2−3 km. Dies läßt uns vermuten, daß ein weitgehend modellunabhängiger Einfluß von reinen Quarkphasen auf den Radius des Neutronensterns existiert. Dies werden wir in diesem Abschnitt systematisch untersuchen. Wir wollen uns die Frage stellen, um welchen Anteil der Radius eines rein hadronischen Sterns (bei fester Masse) durch die Anwesenheit einer QP im Zentrum des Sterns reduziert werden kann. Wir definieren dazu die *Kompaktheit* eines Neutronensterns als

$$\text{Kompaktheit(M)} \equiv \frac{R_{\mathrm{H}}(M) - R_{\mathrm{QC}}(M)}{R_{\mathrm{H}}(M)}, \tag{6.1}$$

wobei $R_{\mathrm{H}}(M)$ der Radius eines rein hadronischen Sterns (H-Sterns) und $R_{\mathrm{QC}}(M)$ der Radius eines QC-Sterns der gleichen Masse M ist. Dieses Verhältnis können wir berechnen, indem wir einen beliebigen Punkt aus dem QC-Bereich der MR-Relationen (z.B. in Abbildung 6.4, $B^{1/4} = 165\,\mathrm{MeV}$) wählen. Dies liefert uns M und $R_{\mathrm{QC}}(M)$. Zu diesem M können wir dann den Radius $R_{\mathrm{H}}(M)$ des H-Sterns ablesen und die Kompaktheit daraus berechnen. Wenn wir dies für sämtliche Punkte des QC-Bereichs der MR-Relationen zu verschiedenem B durchführen, erhalten wir die in Abbildung 6.8 gezeigten Flächen, der Kompaktheit (je dunkler die Fläche desto größer ist B). Auf diese Art und Weise durchlaufen wir letztlich sämtliche Parameter von B und g, welche zu gegebener Masse zu einem QC-Stern führen. Das interessante Ergebnis an Abbildung 6.8 ist, daß die Kompaktheit der QC-Sterne weitgehend unabhängig von der Wahl der Parameter in einem Bereich von typischerweise $20-30\%$ zu liegen scheint[3]. Eine Erhöhung von B schränkt zwar den Massenbereich, der zu einem QC-Stern führt ein, aber die minimale und maximale Kompaktheit ist dadurch kaum beeinflußt. Dieses Ergebnis ermöglicht uns, zu gegebenem Radius eines hadronischen Neutronensternmodells den Radius des zugehörigen Neutronensterns mit Phasenübergang (QC-Stern) abzuschätzen.

Abbildungen 6.9 und 6.10 zeigen die im Zentrum des Neutronensterns angenommene Phase (QC, MC oder HC) als Funktion der beiden Parameter B und g des Bag-Modells für eine feste Neutronensternmasse. Zu jedem Parameterpaar wurde die Hybridstern-EOS berechnet, die TOV-Gleichungen gelöst und aus der MR-Relation der Aufbau des Sterns zu gegebener Masse berechnet. Offensichtlich scheinen bei Vernachlässigung der Mediumeffekte ($g = 0$) nur für $B^{1/4} \lesssim 180\,\mathrm{MeV}$ QC-Sterne erklärbar zu sein. Erhöhen wir g, so müssen wir B erniedrigen, um weiterhin einen QC-Stern zu erhalten. Vergleichbares gilt für die Existenz eines MC-Sterns. Desweiteren sind in

[3]Für die TM2 Hybridstern-EOS ist der Bereich der Kompaktheit ausgedehnter (etwa $10-40\%$). Der „typische" Bereich von $20-30\%$ ist aber darin enthalten.

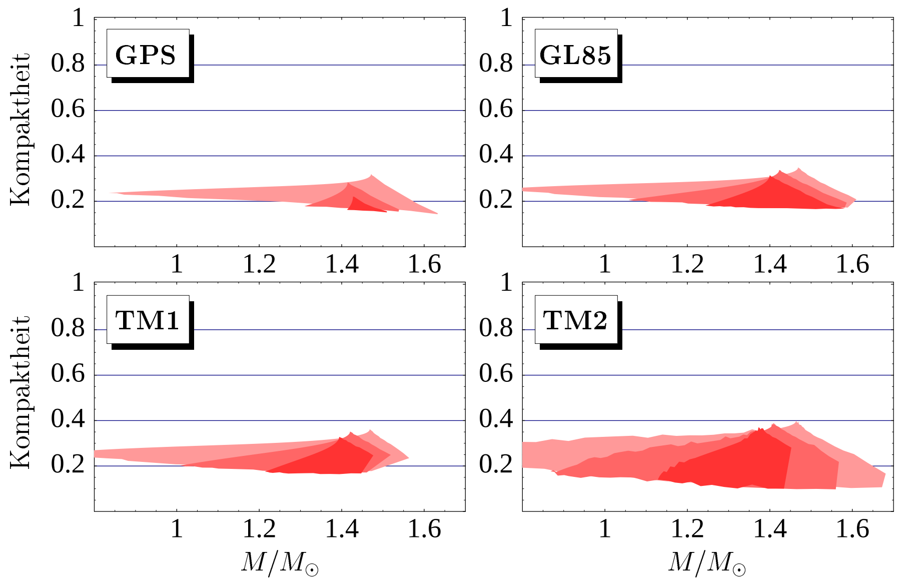

Abbildung 6.8: Kompaktheit eines Neutronensterns mit QP im Vergleich zu einem rein hadronischen Stern der gleichen Masse. Offensichtlich reduziert die Anwesenheit einer QP den Radius eines Neutronensterns typischerweise um 20−30%. Die unterschiedlich schattierten Flächen resultieren aus verschiedenen Werten von B und g, die zu einer QP im Zentrum des Sterns führen. Die Kompaktheit der Sterne mit QP scheint weitgehend unabhängig von der Wahl der Parameter zu sein.

den Abbildungen 6.9 und 6.10 Linien mit konstantem Radius eingezeichnet. Die Prozentzahlen geben an, welchen Anteil der Radius eines Sterns an dem rein hadronischen Neutronenstern gleicher Masse hat[4]. Auch hier sehen wir (in Übereinstimmung mit Abbildung 6.8), daß MC-Sterne nicht kleiner als etwa 80% des hadronischen Sterns sein können.

6.4 Die innere Struktur von Neutronensternen mit Quarkphasen

Haben wir uns bisher nur mit den Gesamtradien der Neutronensterne beschäftigt, so wollen wir jetzt die innere Struktur der Sterne studieren. Dazu wollen wir uns fragen, welchen Einfluß z.B. die Modellparameter g und B auf die Radien des QC's oder auf die Dicke der MP haben. Diese Größen lassen sich direkt bei der Lösung der TOV-Gleichungen bestimmen.

Untersuchen wir zuerst den Einfluß der Mediumeffekte (bei konstantem B) auf

[4]D.h. 80% entspricht z.B. einer Kompaktheit von 0.2.

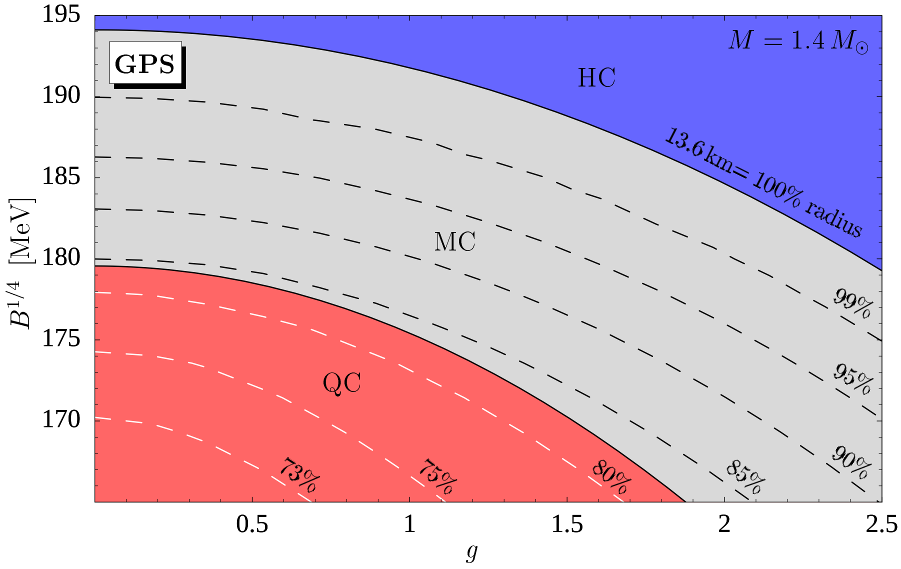

Abbildung 6.9: Parameterbereiche der Quarkphase, welche bei einem Neutronenstern der Masse $M = 1.4\,M_\odot$ zu einer QP (QC-Bereich) oder einer MP (MC-Bereich) im Zentrum des Stern führen. Parameter im HC-Bereich führen zu rein hadronischen Sternen. Die hadronische EOS ist GPS. Gestrichelt sind Linien mit konstantem Radius gezeigt (in Anteilen des Radius des rein hadronischen Sterns). QC-Sterne sind (wie schon in Abbildung 6.8 gesehen) über den gesamten Parameterbereich um mindestens 20% kompakter als rein hadronische Sterne.

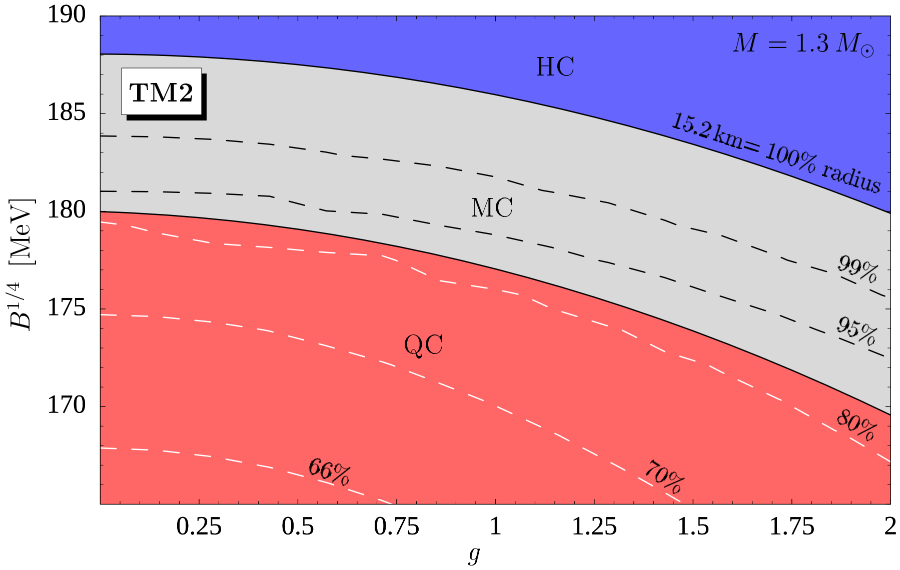

Abbildung 6.10: Wie Abbildung 6.9, nur mit TM2 als hadronische EOS. Die Masse der Sterne beträgt $M = 1.3\,M_\odot$.

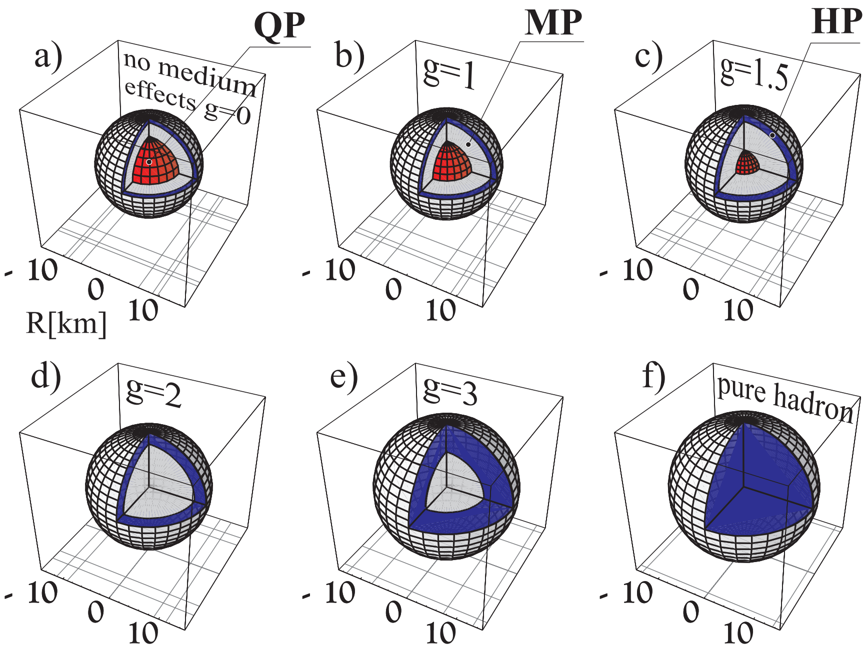

Abbildung 6.11: Einfluß von Mediumeffekten auf die innere Struktur eines Neutronensterns der Masse $M = 1.4\,M_\odot$. Für nicht allzu hohe Kopplungskonstanten g wird im wesentlichen die QP von der MP verdrängt. Die hadronische EOS ist GPS. Die Bagkonstante ist $B^{1/4} = 165\,\mathrm{MeV}$.

die innere Struktur eines Neutronensterns konstanter Masse. Dies ist in Abbildung 6.11 gezeigt. In dieser Abbildung ist interessant zu bemerken, daß bei Erhöhung der Kopplungskonstanten bis etwa $g = 2$ im wesentlichen die QP zugunsten der MP verschwindet. Die Dicke der HP bleibt am Rand des Sterns weitgehend konstant. Dieses Verhalten ist auf den in Abbildung 4.2 (auf Seite 53) gezeigten starken Einfluß der Kopplungskonstanten auf die MP$\rightarrow$QP Phasenübergangsdichte zurückzuführen. Ein Anstieg von g führt dort zu einem starken Anstieg der MP$\rightarrow$QP Phasenübergangsdichte und demnach zu einer Unterdrückung der QP im Neutronenstern.

Der Einfluß der Bagkonstanten auf die innere Struktur eines Neutronensterns konstanter Masse ist in den Abbildungen 6.12 und 6.13 dargestellt. Im linken (rechten) Teilbild sind die Ergebnisse ohne (mit) Einbeziehung von Mediumeffekten gezeigt. Die dicke Linie stellt den Rand, d.h. den Gesamtradius des Sterns dar. Man beachte dabei den Einfluß der QP auf den Radius des Sterns. Für kleine Bagkonstanten kann die QP Radien von bis zu $6-7\,\mathrm{km}$ annehmen. Auffallend ist insbesondere in Abbildung 6.13 ($g = 0$), daß es einen weiten Bereich der Bagkonstanten gibt ($165\,\mathrm{MeV} < B^{1/4} \lesssim 180\,\mathrm{MeV}$), in dem sich die interne Struktur des Sterns kaum mit B ändert. Die Ursache dafür wurde schon in Abbildung 4.4 auf Seite 56 gefunden.

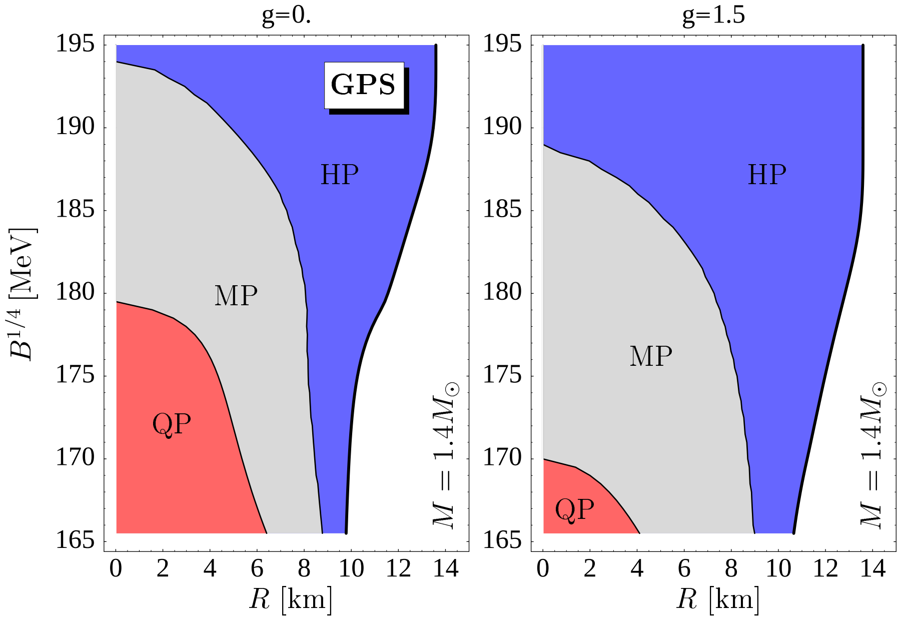

Abbildung 6.12: Der Einfluß der Bagkonstanten auf die innere Struktur eines Neutronensterns der Masse $M = 1.4\, M_\odot$ - ohne Mediumeffekte (links) und mit Mediumeffekten (rechts). Die hadronische EOS ist GPS. Man beachte den Einfluß der QP auf den Radius des Sterns (dicke Linie).

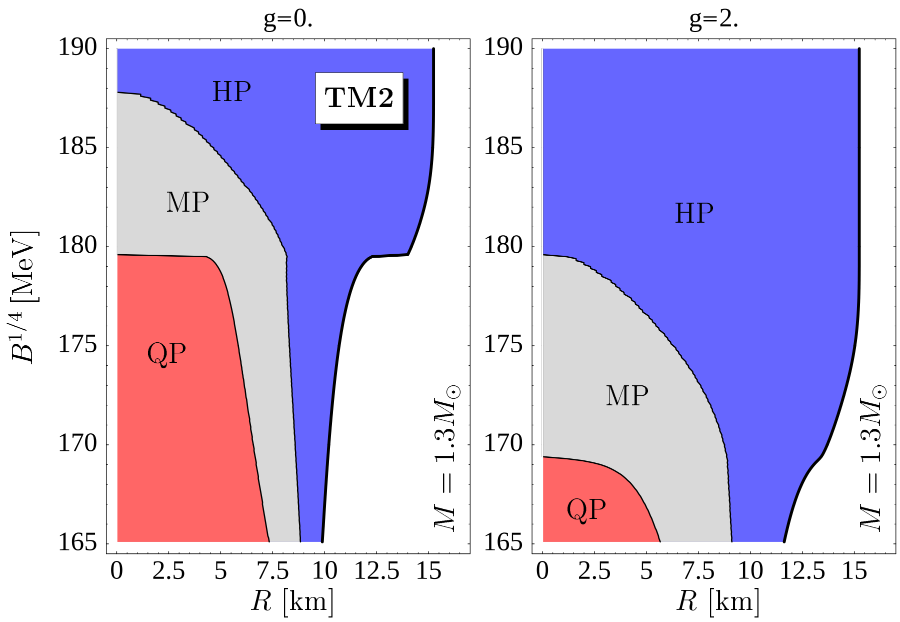

Abbildung 6.13: Der Einfluß der Bagkonstanten auf die innere Struktur eines Neutronensterns der Masse $M = 1.3\, M_\odot$ - ohne Mediumeffekte (links) und mit Mediumeffekten (rechts). Die hadronische EOS ist TM2. Man beachte den Einfluß der QP auf den Radius des Sterns (dicke Linie).

Erhöht man B in diesem Bereich, so erhöhen sich einerseits die Phasenübergangsdichten, was die QP ungünstiger macht. Andererseits erhöht sich aber gleichzeitig die zentrale Energiedichte im Stern. Dadurch kann über einen weiten Parameterbereich eine QP im Neutronenstern existieren.

6.5 Zusammenfassung

In Kapitel 6 haben wir die Masse-Radius-Relationen zu den in Teil I dieser Arbeit berechneten EOS's durch Lösung der TOV-Gleichungen (Kapitel 5, Seite 63) berechnet.

- Die Abbildungen 6.4-6.7 auf den Seiten 74-75 zeigen die MR-Relationen für verschiedene Parameter der Quarkphase und verschiedene hadronische EOS's. Neutronensterne mit Phasenübergang zur reinen Quarkphase (QC-Sterne) nehmen die kleinsten Radien an.

- Die Minimalradien von Neutronensternen mit Phasenübergang zur reinen QP (QC-Sternen) liegen bei etwa 9 km. Diese Sterne sind typischerweise $20-30\%$ kompakter als rein hadronische Sterne gleicher Masse. Siehe dazu Abbildung 6.8 auf Seite 78 mit der Definition (6.1) der Kompaktheit auf Seite 77.

- Neutronensterne mit MP im Zentrum des Sterns (MC-Sterne) können nur bis zu etwa 20% mehr kompakt sein als rein hadronische Sterne gleicher Masse. Siehe dazu die Abbildungen 6.9 und 6.10. Diese Sterne wären durch Radiusmessungen somit nur schwer von rein hadronischen Sternen zu unterscheiden.

- Durch den Phasenübergang werden die kritischen Massen (Maximalmassen) um bis zu etwa $0.3\,M_\odot$ reduziert.

- Der Einfluß von Mediumeffekten auf die innere Struktur der Neutronensterne ist in Abbildung 6.11 auf Seite 80 gezeigt.

- Der Einfluß der Bagkonstanten auf die innere Struktur der Neutronensterne ist in den Abbildungen 6.12-6.13 auf Seite 81 gezeigt. Auffallend ist (insbesondere in Abbildung 6.13) der weite Bereich von B, in dem die innere Struktur des Sterns nur wenig von B abhängt. Die Ursache hierfür ist auf Seite 80 beschrieben.

Teil III

Eine „Dritte Familie“ als Signatur für Quarkphasen?

Kapitel 7

Die „Dritte Familie“

Kapitelübersicht

7.1 Stabilitätskriterien

Unter den z.Zt. bekannten astrophysikalischen Objekten kennen wir zwei Familien von kompakten Sternen - die Familie der Weißen Zwerge und die Familie der Neutronensterne. Diese beiden Familien sind schematisch in Abbildung 7.1 in der MR-Relation dargestellt. Weiße Zwerge können zentrale Energiedichten bis etwa $\epsilon_c \approx 10^9\mathrm{g/cm}^3$ besitzen. Diese ist die zentrale Energiedichte eines Weißen Zwerges mit kritischer Masse (Punkt A in Abbildung 7.1). Die kritische Masse eines Weißen Zwerges nennt man auch *Chandrasekhar-Masse*. Erhöhen wir ϵ_c weiter, so wird der Weiße Zwerg instabil gegenüber radialen Oszillationen. Diese Instabilität erstreckt sich bis zu Dichten von etwa $\epsilon_c \approx 10^{14}\mathrm{g/cm}^3$ (Punkt B). Durch die Tatsache, daß in diesem Bereich keine stabilen Konfigurationen von kompakten Objekten existieren können, ist letztlich die Familie der Weißen Zwerge von der Familie der Neutronensterne getrennt. Letztere beginnt bei Zentraldichten von etwa $\epsilon_c \approx 10^{14}\mathrm{g/cm}^3$, d.h. bei Dichten, bei denen zumindest im Zentrum des Sterns nukleonische Freiheitsgrade vorliegen[1]. Aber auch Neutronensterne erreichen bei weiterer Erhöhung von ϵ_c eine kritische Masse (Punkt C). Die zugehörige kritische Energiedichte hängt sehr stark von der verwendeten EOS ab, liegt aber in der Größenordnung von $\epsilon_c \approx 10^{15}\mathrm{g/cm}^3$. Oberhalb dieser kritischen Energiedichte folgt die

[1] Man vergleiche die hier erwähnten Dichtebereiche mit den entsprechenden Freiheitsgraden in der EOS. Diese haben wir in den Kapiteln 1.1 und 1.2 besprochen.

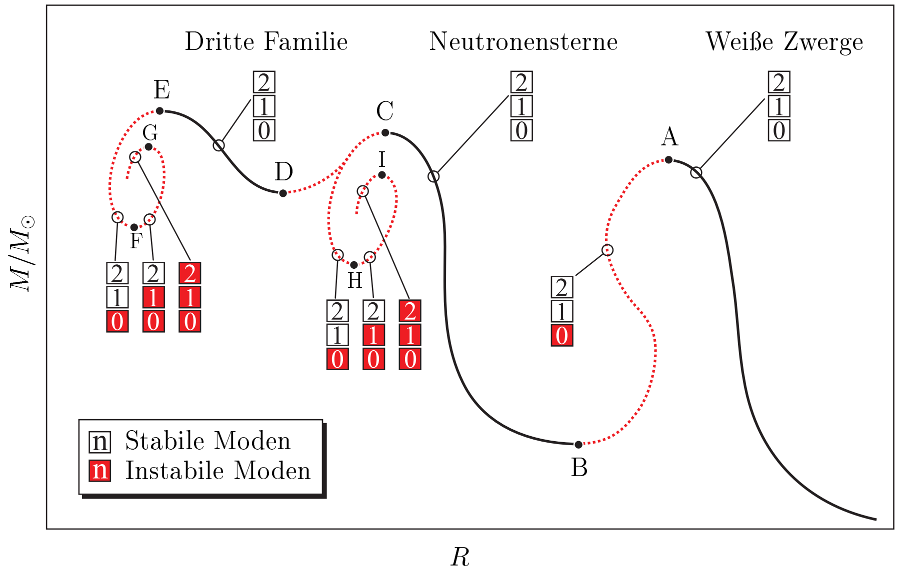

Abbildung 7.1: Schematische Darstellung der MR-Relationen mit einer stabilen dritten Familie kompakter Sterne. Die mit den Buchstaben A, B, ..., I markierten Punkte sind *kritische Punkte*, an denen eine Oszillationsmode ihre Stabilität ändert [8, 66]. Die Stabilität und Instabilität der drei niedrigsten Moden ($n = 0, 1, 2$) ist durch die Zahlen angezeigt. Höhere Moden sind stabil.

MR-Relation typischerweise der durch die Punkte H und I gehenden Spirallinie[2]. Auch dieser Bereich ist instabil gegenüber radialen Oszillationen.

Wie können wir den Wechsel von Stabilität und Instabilität entlang der MR-Relation verstehen? Offensichtlich sind die Punkte A, B und C kritische Punkte, an denen die MR-Relation von Bereichen der Stabilität in Bereiche der Instabilität (oder umgekehrt) wechselt. Mathematisch erfolgt die Stabilitätsanalyse für einzelne Punkte der MR-Relation durch die Lösung einer Eigenwertgleichung des Typs *Sturm-Liouville* [8, 66]. Die Lösung dieser Eigenwertgleichung liefert die Eigenfrequenzen der verschiedenen möglichen Schwingungsmoden. Es läßt sich zeigen, daß diese ein diskretes Spektrum mit der Eigenschaft

$$\omega_0^2 < \omega_1^2 < \omega_2^2 < \cdots < \omega_n^2 \tag{7.1}$$

für die verschiedenen Schwingungsmoden $n = 0, 1, 2, \ldots$ besitzen. Hat eine quadratische Eigenfrequenz ω_n^2 ein negatives Vorzeichen, so ist der Stern instabil gegenüber radialen Oszillationen. Bei einer kleinen Störung würde sich die Schwingungsamplitude exponentiell verändern. Der Stern explodiert oder kontrahiert zu einem Schwarzen

[2]Typischerweise bedeutet hier, daß sich eine solche Spirallinie für nahezu alle ausreichend „glatten“ EOS's durch Lösung der TOV-Gleichungen ergibt.

Loch[3]. Es läßt sich nun weiter zeigen [8, 66], daß an den kritischen Punkten (an denen $dM/d\epsilon_c = 0$ gilt) eine Schwingungsmode ihre Stabilität ändert (d.h. die zugehörige Eigenfrequenz ω_n^2 ihr Vorzeichen ändert). An kritischen Punkten, an denen $dR/d\epsilon_c < 0$ gilt (z.B. A, B und C), wechselt eine gerade Mode ($n = 0, 2, 4, \ldots$) ihre Stabilität. An Punkten mit $dR/d\epsilon_c > 0$ wechselt eine ungerade Mode ($n = 1, 3, 5, \ldots$) ihre Stabilität. Unter Zuhilfenahme der Bedingung (7.1) läßt sich damit ersehen, in welchem Bereich der MR-Relation welche Schwingungsmoden stabil oder instabil sind. Dies ist in Abbildung 7.1 für die niedrigsten drei Moden gezeigt. Damit ist auch klar, daß sich in der Spirallinie (C-H-I) keine weiteren stabilen Bereiche ergeben können. An Punkt H wird durch $dR/d\epsilon_c > 0$ zuerst die Mode $n = 1$ instabil, dann an Punkt I die Mode $n = 2$.

Nun können wir uns natürlich die Frage stellen, ob es nicht EOS's gibt, deren MR-Relationen nicht entlang der Spirallinie (C-H-I), sondern entlang der Punkte (C-D-E) verläuft. Genauso wie in Punkt B die Stabilität der Neutronensternfamilie wiederhergestellt wird, so könnte dies in Punkt D bei geeigneter EOS für eine Dritte Familie geschehen. Wenn es eine solche EOS gäbe und diese in der Natur realisiert wäre, so könnte es eine *Dritte Familie* von kompakten Sternen geben. Sterne dieser Familie müßten auf dem stabilen Bereich (D-E) der MR-Relation, d.h. bei kleineren Radien als die der Neutronensterne, angesiedelt sein. Gleichzeitig müßten Sterne der Dritten Familie einen gemeinsamen Massenbereich mit Neutronensternen besitzen.

7.2 Gerlachs Kriterium für eine „Dritte Familie“

Die Frage, ob es eine EOS geben könnte, die eine Existenz einer Dritten Familie ermöglicht, wurde von U. Gerlach [67, 68] schon Ende der 60'er Jahre untersucht[4]. In dieser Arbeit stellte sich heraus, daß eine notwendige Bedingung an die EOS eine genügend große Diskontinuität in der Schallgeschwindigkeit

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\epsilon}} \tag{7.2}$$

bei Dichten knapp über der kritischen Energiedichte $\epsilon_{\rm crit}$ der Neutronensternfamilie ist. Die Schallgeschwindigkeit in der Neutronensternmaterie muß dabei innerhalb eines sehr kleinen Dichtebereichs (Übergangsbereichs) zu größeren Werten springen. Um

[3]Dies gilt natürlich nur, falls der Stern nicht in einer benachbarten Familie Stabilität findet.

[4]Im Jahre 1967 - dem Erscheinungsjahr von Gerlach's Doktorarbeit - war nicht einmal die Existenz von Neutronensternen gesichert. Zwar wurde 1967 der erste Pulsar durch J. Bell und A. Hewish entdeckt [4], aber die Interpretation von Pulsaren als rotierende Neutronensterne erfolgte erst 1968 durch T. Gold [5]. Die in den folgenden Jahren intensive Beschäftigung mit den neu entdeckten Pulsaren der „Zweiten Familie“ führte wohl dazu, daß Gerlach's Arbeit und die Idee einer „Dritten Familie“ weitgehend in Vergessenheit geriet.

bei einem großem Sprung in der Schallgeschwindigkeit nicht die Bedingung der Kausalität ($c_s < c$) zu verletzen, muß die Schallgeschwindigkeit „vor dem Sprung“ sehr klein, d.h. die EOS sehr weich sein. Eine solch schlagartige Änderung der Eigenschaften der EOS entspricht einem Phasenübergang. Abbildung 7.2 stellt schematisch die Bedingungen des Gerlachschen Kriteriums an die EOS dar. Ein möglicher Nachweis

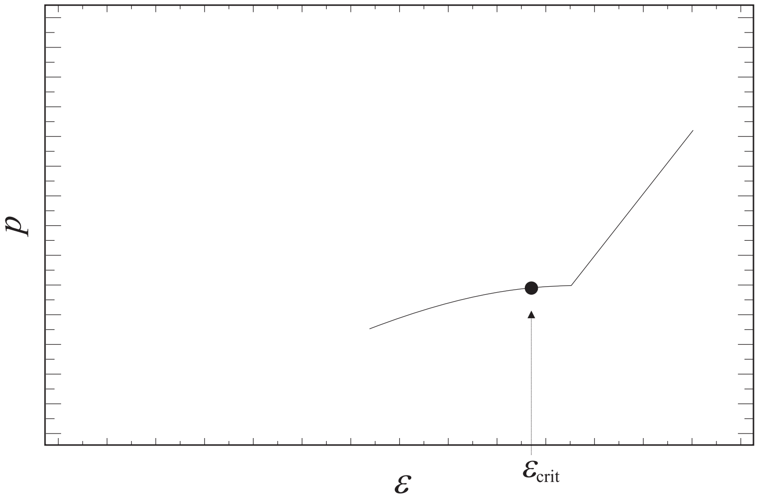

Abbildung 7.2: Schematische Darstellung des Gerlachschen Kriteriums an die EOS für die Existenz einer Dritten Familie. Die maximale zentrale Energiedichte in der Neutronensternfamilie ϵ_{crit} muß in einem Bereich niedriger Schallgeschwindigkeit (7.2) erreicht sein. Knapp oberhalb von ϵ_{crit} muß die Schallgeschwindigkeit abrupt ansteigen. Dies entspricht einem Phasenübergang in der EOS.

der Existenz einer Dritten Familie ist durch die Notwendigkeit der Diskontinuität also gleichbedeutend mit dem Nachweis eines Phasenübergangs in Neutronensternmaterie.

Wie ließe sich experimentell die Existenz der Dritten Familie durch Masse- und Radiusmessungen an Neutronensternen nachweisen? Charakteristisch an der MR-Relation in Abbildung 7.1 ist ein gemeinsamer Massenbereich von Neutronensternen und Sternen der Dritten Familie. So können Sterne beider Familien die gleiche Masse bei unterschiedlichen Radien besitzen. Dies ist innerhalb einer Familie nicht möglich. Andererseits ist natürlich die Messung zweier „gleicher“ Neutronensternmassen experimentell so gut wie ausgeschlossen[5]. Ausreichend für den Nachweis der Dritten Familie ist aber auch, wenn der kleinere Stern minimal leichter ist als der größere. Dies ist schema-

[5]Es gibt allerdings Beispiele für Pulsare in Binärsystemen, deren Massen im Rahmen der (sehr hohen) Meßgenauigkeit gleich sind. Ein Beispiel ist der Radiopulsar B1534+12, der in einem Binärsystem mit einem zweiten Neutronenstern ist. Sowohl der Radiopulsar als auch sein Begleiter besitzen eine Masse von $M = (1.339 \pm 0.003) M_\odot$ [12]. Wüßte man, daß diese Sterne unterschiedliche Radien besitzen, so würde der kleinere von ihnen aus einer Dritten Familie stammen.

tisch in Abbildung 7.3 gezeigt. Wir wollen ein solches Paar von Massen und Radien

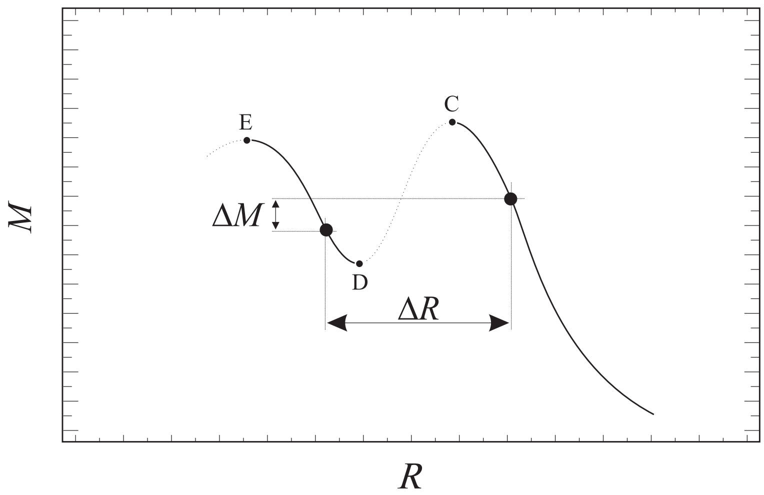

Abbildung 7.3: Schematische Darstellung eines Rising-Twins. Der Stern der Dritten Familie (im Bereich D-E) ist kleiner und etwas leichter als der Neutronenstern (Bezeichnungen wie in Abbildung 7.1). Der experimentelle Nachweis eines Rising-Twins würde i) die Existenz einer Dritten Familie und ii) die Existenz eines Phasenübergangs in Neutronensternmaterie nachweisen.

als *Rising-Twin* bezeichnen. Das Ansteigen der Masse mit dem Radius ist mit „typischen“ Neutronenstern-EOS's nicht zu beschreiben, in denen mit steigender Masse der Radius sinkt (Bereich B-C in Abbildung 7.1). Zu beachten ist hierbei aber, daß prinzipiell der Anstieg der Masse mit steigendem Radius auch mit EOS's zu erreichen ist, die nicht zu einer Dritten Familie führen[6]. In der MR-Relation liegen für diese EOS's die Radien allerdings sehr dicht. Um diese Klasse von MR-Relationen trotzdem auszuschließen müssen wir also fordern, daß $\Delta M \ll \Delta R$ gilt. Die Massen sollten - bei einer möglichst großen Radiusdifferenz - sehr dicht liegen. Diese Forderung an die Massen scheint erfreulicherweise für die meisten Pulsare schon erfüllt zu sein. Es zeigt sich, daß die bisher bekannten (und sehr genau vermessenen) Massen einiger Radiopulsare sehr dicht liegen (vergleiche Abbildung 1 auf Seite 6). Z.B. ist der Hulse-Taylor Pulsar (PSR 1913+16) nur $\Delta M = (0.054 \pm 0.001) M_\odot$ schwerer als sein Begleiter. Wäre der Hulse-Taylor Pulsar nur etwa 1 km größer als sein Begleiter, so müßte dieser der

[6] Z.B. ist dies mit EOS's für reine Quarkmaterie möglich, mit denen sich sog. „Seltsame Sterne“ beschreiben lassen [34, 37, 44]. Die zugehörigen MR-Relationen zeigen für niedrige Massen ein typisches $M \sim R^3$ Verhalten. Aus diesem Grund können diese hypothetischen Sterne auch sehr kleine Radien annehmen [34, 37, 44]. Im Bereich typischer Neutronensternmassen sind die Radien nahezu konstant. Dicht liegende Massen von Seltsamen Sternen besitzen demnach nur eine verschwindende Radiusdifferenz.

Dritten Familie angehören[7].

Allein die theoretische Möglichkeit der Existenz einer Dritten Familie gewährleistet natürlich nicht, daß diese in der Natur auch wirklich realisiert ist. Auch wenn die EOS's so geartet wären, daß sie prinzipiell eine Dritte Familie erlauben würden, so benötigen wir einen Formationsprozeß, der in der Lage ist, eine Dritte Familie zu populieren. Denkbar wäre z.B. ein Massentransfer durch Akkretion von Materie von einem benachbarten Stern auf einen Neutronenstern. Erreicht der Neutronenstern durch die Massenaufnahme seine kritische Masse, so wird dieser instabil und kann in die Dritte Familie hineinkollabieren. Prinzipiell ist aber auch eine direkte Entstehung in einer Supernovaexplosion denkbar.

[7] $1\,\mathrm{km} \approx 0.7 M_\odot \Rightarrow \Delta M/\Delta R \approx 0.08 \ll 1$.

7.3 Zusammenfassung

In Kapitel 7 haben wir dargestellt, daß die Existenz einer Dritten Familie von kompakten Sternen - neben den bekannten Familien der Weißen Zwerge und der Neutronensterne - prinzipiell möglich ist. Eine Dritte Familie ist eine hypothetische Klasse von Sternen, deren zentrale Energiedichte oberhalb der kritischen zentralen Energiedichte ϵ_{crit} der Neutronensterne liegt.

- Um die Stabilität einer Dritten Familie gegenüber radialen Oszillationen zu gewährleisten, muß die MR-Relation das in Abbildung 7.1 auf Seite 88 gezeigte (schematische) Verhalten besitzen. Die stabile Dritte Familie liegt dann im Bereich D-E der MR-Relation.

- Hypothetische Sterne der Dritten Familie besitzen kleinere Radien als Neutronensterne und weisen einen gemeinsamen Massenbereich mit ihnen auf (siehe Abbildung 7.1).

- Um das für die Existenz einer Dritten Familie notwendige Verhalten der MR-Relation zu erhalten, muß die zugehörige EOS das Gerlachsche Kriterium erfüllen (Kapitel 7.2). Dies bedeutet, daß die EOS das in Abbildung 7.2 gezeigte Verhalten eines Phasenübergangs aufweisen muß. Knapp oberhalb der kritischen zentralen Energiedichte ϵ_{crit} der Neutronensternfamilie muß die Schallgeschwindigkeit (Gleichung (7.2)) abrupt auf einen höheren Wert springen.

- Der Nachweis der Existenz einer Dritten Familie ist äquivalent zu dem Nachweis der Existenz eines Phasenübergangs in Neutronensternmaterie.

- Ein experimenteller Nachweis der Existenz einer Dritten Familie (und somit des Phasenübergangs) könnte durch Messung eines Rising-Twins (siehe Abbildung 7.3) erfolgen. Dazu müßten die Massen und Radien von zwei Neutronensternen bestimmt werden, wobei der größere Stern minimal schwerer sein müßte als der kleinere.

Kapitel 8

Quarkphasen und die „Dritte Familie“

Kapitelübersicht

8.1 Quarkphasen und Gerlachs Kriterium

Die Notwendigkeit eines Phasenübergangs zur Erzeugung einer Dritten Familie führt uns direkt zu der Frage, ob der in dieser Arbeit betrachtete Deconfinement Phasenübergang die Voraussetzungen des Gerlachschen Kriteriums erfüllen kann. Vergleichen wir das Gerlachsche Kriterium in Abbildung 7.2 (auf Seite 90) mit den von uns berechneten EOS's in Abbildung 4.2 (auf Seite 53), so sehen wir, daß der MP$\rightarrow$QP Phasenübergang (insbesondere bei der TM2-EOS) eine starke Diskontinuität in der Schallgeschwindigkeit aufweist. Es ist also naheliegend zu untersuchen, ob diese EOS's tatsächlich eine Dritte Familie ermöglichen. Dabei wollen wir uns auf den Wert $g = 0$ der Kopplungskonstanten beschränken und einen Wert der Bagkonstanten B suchen, für den die kritische Energiedichte (entsprechend dem Gerlachschen Kriterium) knapp unterhalb der Sprungdichte liegt. Die MR-Relation der Neutronensternfamilie muß demnach als MC-Stern seine Maximalmasse erreichen. Abbildung 8.1 zeigt zwei EOS's, für die dieses Kriterium erfüllt ist (die kritische Energiedichte der jeweiligen EOS ist durch $\bullet$ markiert). Offensichtlich liegen bei etwa $B^{1/4} = 180\,\mathrm{MeV}$ die kritischen Energiedichten am Ende der MP knapp unterhalb des MP$\rightarrow$QP Phasenübergangs. In den beiden gezeigten EOS's springt die Schallgeschwindigkeit von etwa 20% der Lichtgeschwindigkeit

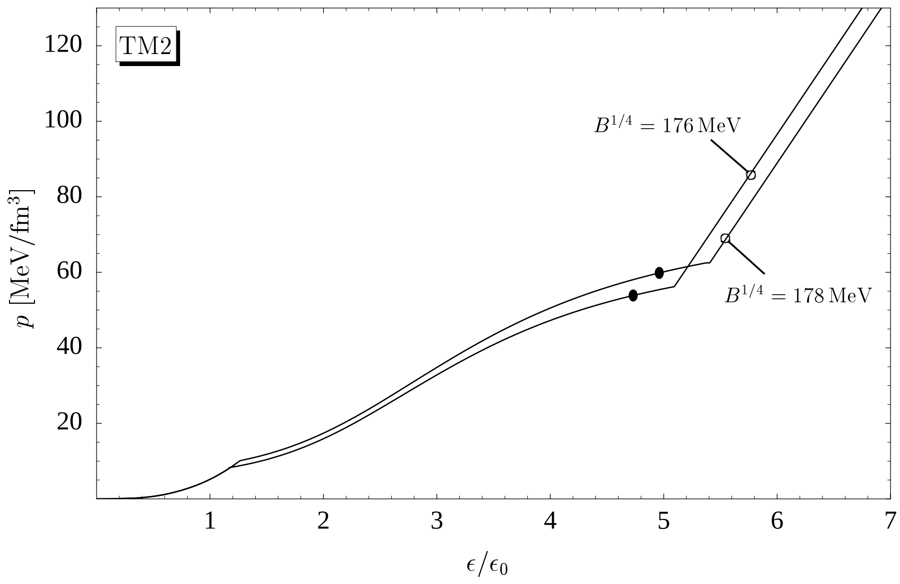

Abbildung 8.1: Der MP$\rightarrow$QP Phasenübergang einiger EOS's mit Deconfinement Phasenübergang zeigt das für die Existenz einer Dritten Familie notwendige Verhalten einer starken Diskontinuität in der Schallgeschwindigkeit oberhalb der kritischen Energiedichte. Die kritische Energiedichte, die sich durch Berechnung der MR-Relation aus der jeweiligen EOS ergibt, ist durch $\bullet$ markiert. Mediumeffekte sind mit $g = 0$ vernachlässigt.

um den Faktor 3 auf etwa 60% der Lichtgeschwindigkeit[1]. Für die anderen Hybridstern EOS's (GPS, GL85 und TM1) aus Abbildung 4.2 auf Seite 53 fällt der Anstieg in der Schallgeschwindigkeit schwächer aus.

8.2 Masse-Radius Relationen mit Dritter Familie

In Abbildung 8.2 sind MR-Relationen für verschiedene Bagkonstanten unter Verwendung der TM2-EOS gezeigt. Tatsächlich ergibt sich in einem schmalen Parameterbereich der Bagkonstanten ($176\,\mathrm{MeV} < B^{1/4} \lesssim 182\,\mathrm{MeV}$) eine stabile Dritte Familie. Interessanter Weise wurde auch von Glendenning und Kettner kürzlich in einem analogen Modell mit Deconfinement Phasenübergang (aber unterschiedlicher hadronischer EOS) ebenso bei einer Bagkonstanten von $B^{1/4} = 180\,\mathrm{MeV}$ eine stabile Dritte Familie gefunden [69]. Offensichtlich scheint $B^{1/4} \approx 180\,\mathrm{MeV}$ eine typische Bagkonstante zu sein, für die die kritische Energiedichte in der MP liegt. Warum aber ist der Parameterbereich

[1] In der QP gilt unter Vernachlässigung der Quarkmassen näherungsweise $\epsilon = 3p + 4B$, d.h. die Schallgeschwindigkeit liegt im Bereich von $c_s = \sqrt{dp/d\epsilon} = \sqrt{1/3} \approx 0.6$.

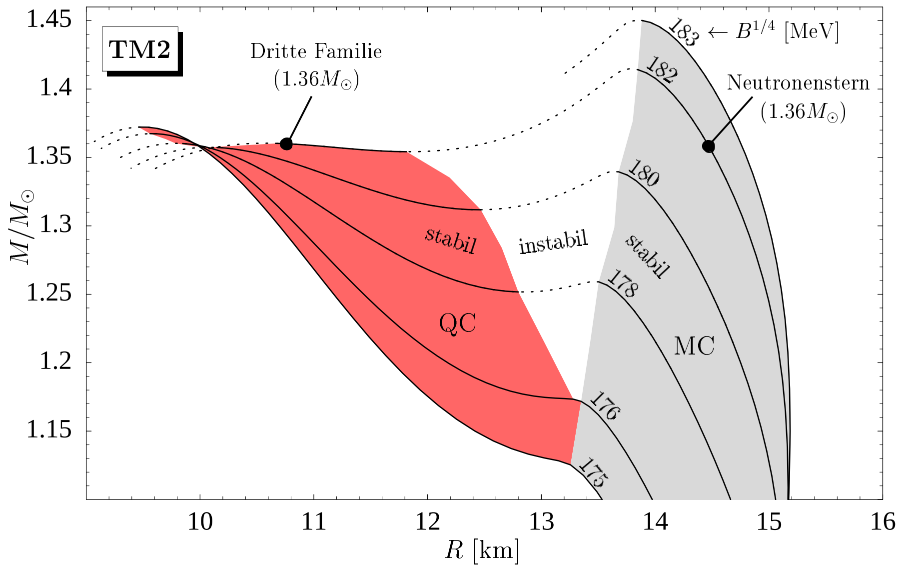

Abbildung 8.2: MR-Relationen, die im Parameterbereich der Bagkonstanten von 176 MeV< $B^{1/4} \lesssim$182 MeV eine Dritte Familie aufweisen. Die Neutronensternfamilie besteht aus MC-Sternen, während die Dritte Familie aus QC-Sternen besteht. Sterne der Dritten Familie und der Neutronensternfamilie können die gleiche Masse besitzen (z.B. $M = 1.36\,M_\odot$ für $B^{1/4} = 182\,\mathrm{MeV}$).

der Bagkonstanten, der zur Existenz einer Dritten Familie führt, so schmal? Dies liegt im wesentlichen daran, daß die kritische Energiedichte am Ende der weichen MP kurz vor dem MP→QP Phasenübergang liegen muß. Wir haben aber in Abbildung 4.4 auf Seite 56 gesehen, daß gerade die MP→QP Phasenübergangsdichte sehr stark mit der Bagkonstanten steigt. Gleiches gilt nicht automatisch für die kritische Energiedichte. So passiert es, daß für zu große Bagkonstanten die kritische Energiedichte in der MP zu weit von der Phasenübergangsdichte entfernt ist. Für zu kleine Bagkonstanten liegt die kritische Energiedichte hingegen schon in der QP.

In Abbildung 8.2 liegen die Neutronensterne im MC-Bereich, d.h. sie besitzen (wie schon besprochen) einen MC. Die Sterne der Dritten Familie liegen im QC-Bereich der MR-Relation. Markiert sind ein Neutronenstern und ein Stern der Dritten Familie, die beide eine Masse von $M = 1.36\,M_\odot$ besitzen ($B^{1/4} = 182\,\mathrm{MeV}$). Würde eine Dritte Familie nicht existieren, so wäre ein solches Paar gleicher Masse – welches von Glendenning und Kettner als Neutronenstern-Zwilling (Twin) bezeichnet wurde [69] – nicht erklärbar. Die innere Struktur der Zwillinge ist in Abbildung 8.3 gezeigt. Offensichtlich können die Sterne der Dritten Familie bei $B^{1/4} = 182\,\mathrm{MeV}$ einen bis zu etwa 4 km kleineren Radius haben als ein gleich schwerer Neutronenstern. Andererseits können die Radien beider Familien aber auch beliebig dicht zusammenliegen ($B^{1/4} \gtrsim 176\,\mathrm{MeV}$).

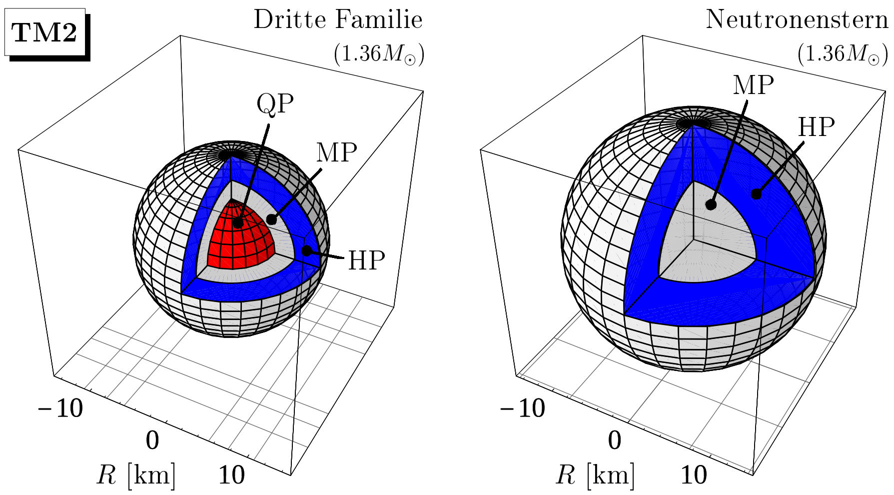

Abbildung 8.3: Innere Struktur der beiden, in Abbildung 8.2 markierten Sterne mit $M = 1.36\, M_\odot$ bei einer Bagkonstanten von $B^{1/4} = 182\,\mathrm{MeV}$.

Dies hängt davon ab, wie nah die kritische Energiedichte an der MP→QP Phasenübergangsdichte liegt. Für kleiner werdende Bagkonstanten rückt die Übergangsdichte immer weiter an die kritische Energiedichte heran, bis bei $B^{1/4} \lesssim 176\,\mathrm{MeV}$ der instabile Bereich vollkommen verschwindet, da die kritische Energiedichte dann nicht mehr in der MP liegt.

Die Minimalradien der Dritten Familie von ca. 10 km sind vergleichbar mit den Minimalradien der benachbarten Lösungen (z.B. $B^{1/4} = 175\,\mathrm{MeV}$), welche keine Dritte Familie aber trotzdem einen QC aufweisen. Damit lassen sich in unserem Modell mit einer Dritten Familie keine kleineren Radien erklären als es nicht schon mit Neutronensternen mit reiner QP (und ähnlichen Modellparametern) möglich wäre.

Für die anderen Hybridstern-EOS's scheint die Diskontinuität in der Schallgeschwindigkeit zu gering zu sein, um Gerlachs Kriterium zu erfüllen. Die MR-Relationen dieser EOS's besitzen keine Dritte Familie.

Bevor wir dieses Kapitel zusammenfassen sei noch bemerkt, daß der in Abbildung 4.4 auf Seite 56 beobachtete Sprung in der zentralen Energiedichte eines $M = 1.3\, M_\odot$ Sterns daran liegt, daß zu gegebener Bagkonstanten knapp unterhalb von $B^{1/4} = 180\,\mathrm{MeV}$ gleichzeitig eine Lösung zu niedriger zentraler Energiedichte (der Neutronenstern) und eine zu hoher Dichte (ein Objekt der Dritten Familie) existiert.

8.3 Zusammenfassung

In Kapitel 8 haben wir gesehen, daß die Existenz einer Dritte Familie von kompakten Sternen durch einen Deconfinement Phasenübergang in Neutronensternmaterie erklärbar ist.

- Der MP→QP Phasenübergang der von uns in Kapitel 4 diskutierten EOS's mit Deconfinement Phasenübergang besitzt eine für die Erfüllung des Gerlachschen Kriteriums ausreichende Diskontinuität in der Schallgeschwindigkeit. Siehe dazu Abbildung 8.1 auf Seite 96 und Abbildung 4.2 auf Seite 53 für die TM2-EOS.

- Für die in Abbildung 8.1 gezeigten TM2-EOS's springt die Schallgeschwindigkeit von etwa 20% auf 60% der Lichtgeschwindigkeit.

- Die Berechnung der MR-Relationen mit der TM2 Hybridstern-EOS führt zur Existenz einer Dritten Familie in dem schmalen Parameterbereich 176 MeV$<$ $B^{1/4}\lesssim$182 MeV der Bagkonstanten (für $g = 0$). Siehe dazu Abbildung 8.2. Der Parameterbereich wird im wesentlichen dadurch bestimmt, daß die kritische Energiedichte der Neutronensternfamilie zur Erfüllung des Gerlachschen Kriterium am Ende der weichen MP liegen muß (siehe Abbildung 8.1).

- Die Sterne der Dritten Familie sind bei den von uns verwendeten EOS's bis zu 4 km kleiner als Neutronensterne gleicher Masse.

- Sterne der Dritten Familie besitzen eine reine QP in ihrem Zentrum. Neutronensterne erreichen hingegen ihre Maximalmasse bei einem Stern mit MP im Zentrum.

- Die Minimalradien der Sterne der Dritten Familie von etwa 10 km sind vergleichbar mit denen von Neutronensternen mit reiner QP.

- Ein möglicher experimenteller Nachweis der Existenz einer Dritten Familie von kompakten Sternen ließe sich durch die Existenz von Quarkphasen in ihrem Inneren verstehen.

Zusammenfassung

Die Untersuchung von Neutronensternen stellt eine einzigartige Möglichkeit dar, die Eigenschaften von Materie unter den in irdischen Experimenten nicht zugänglichen Bedingungen von supernuklearen Dichten und niedrigen Temperaturen zu studieren. Eine der fundamentalsten Beziehungen zwischen den Eigenschaften der Materie – d.h. ihrer Zustandsgleichung (EOS) – und den beobachtbaren Eigenschaften von Neutronensternen ist durch die Bedingung des allgemeinrelativistischen hydrostatischen Gleichgewichts im Neutronenstern gegeben. Diese Bedingung ermöglicht uns, aus der Beobachtung von Massen und Radien von Neutronensternen Rückschlüsse auf die Eigenschaften der EOS zu ziehen. Neben den experimentell gut gesicherten Massenbestimmungen, welche gegenwärtig allesamt im Bereich von $1.4 M_\odot$ liegen, zeichnet sich bei den noch mit vielen Unsicherheiten behafteten Radiusabschätzungen zumindest eine Tendenz zu sehr kleinen Neutronensternradien ab ($R \lesssim 11\,\mathrm{km}$). Sollte sich diese Tendenz als richtig herausstellen, so könnte dies beträchtliche Konsequenzen für unser Verständnis der Materie bei hohen Dichten haben. Dies liegt daran, daß nahezu alle Neutronensternmodelle, die einen rein hadronischen Aufbau des Sterns voraussetzen, zu weit größere Radien führen. Um kleinere Radien erklären zu können, muß die gravitative Anziehungskraft den Stern stärker komprimieren können, d.h. die EOS muß zumindest bei hohen Dichten weicher sein, als es die hadronischen Modelle vorhersagen. Eine mögliche Erklärung dafür könnte sein, daß die hadronische Materie bei hohen Dichten einen Deconfinement-Phasenübergang durchläuft, d.h. im Inneren des Neutronensterns eine Quarkphase vorliegt[2]. (Auch in Schwerionenkollisionen wird bei hohen Temperaturen und Dichten intensiv versucht, diesen Phasenübergang nachzuweisen). Der Nachweis von kleinen Neutronensternradien könnte demnach ein Hinweis auf einen Deconfinement-Phasenübergang im Inneren des Sterns sein[3].

[2] Darüber hinaus wird z.B. die Möglichkeit von Bose-Kondensaten wie Kaon-Kondensaten im Neutronenstern diskutiert [70, 71]. Auch Kondensate machen die EOS weicher.

[3] Weitere Hinweise auf die Existenz von Quarkphasen im Inneren von Neutronensternen sucht man z.B. in den Veränderungen der Rotationsperioden von Pulsaren [34, 72, 73] oder in ihrem Abkühlverhalten [44].

In dieser Arbeit haben wir uns im Rahmen der verwendeten Modelle u.a. die Frage gestellt, in welchem Ausmaß die Existenz einer Quarkphase den Radius des Neutronensterns beeinflussen kann. Dabei haben wir systematisch den Einfluß von Modellparametern auf die EOS (Teil I) und auf die Struktur der Neutronensterne (Teil II) untersucht. Es zeigte sich, daß weitgehend unabhängig von den verwendeten Modellparametern der Radius eines rein hadronischen Sterns durch die Existenz einer Quarkphase um etwa $20-30\%$ reduziert wird. Damit ergaben sich für diese Sterne Minimalradien von etwa $9-10\,\mathrm{km}$ bei einer typischen Neutronensternmasse im Bereich von $1.4M_\odot$.

Desweiteren haben wir gesehen, daß in der Natur prinzipiell die Existenz einer hypothetischen Dritten Familie von kompakten Sternen – neben den bekannten Familien von Neutronensternen und Weißen Zwergen – möglich ist (Teil III). Interessanterweise erfüllen gerade die von uns betrachteten EOS's mit Phasenübergang zur Quarkphase die notwendigen Voraussetzungen für die Existenz einer Dritten Familie. Darüber hinaus haben wir die faszinierende Möglichkeit aufgezeigt, durch die experimentelle Bestimmung der Massen und Radien von nur zwei Neutronensternen sowohl die Existenz der Dritten Familie als auch die eines Phasenübergangs in dichter Materie nachzuweisen.

Diese und ähnliche Untersuchungen sollen dazu beitragen, die Vielzahl der in naher Zukunft zu erwartenden experimentellen Erkenntnisse über Neutronensterne und Pulsare im Rahmen von verschiedenen Szenarien über den Aufbau von Neutronensternen interpretieren zu können. Ein möglicher Nachweis eines in der Natur auf „natürliche“ Weise vorkommenden Deconfinement-Phasenübergangs in Neutronensternen würde unser Verständnis über die Eigenschaften der dichten Materie grundlegend erweitern und uns auf eindrucksvolle Weise die Vielfalt der in der Natur realisierten Strukturen vor Augen führen.

Teil IV

Anhang

Anhang A

Abkürzungen und Nomenklatur

In dieser Arbeit werden folgende Abkürzungen verwendet:

QP	Quarkphase
MP	Mischphase
HP	hadronische Phase
QC	Quark-Core (Quarkphase im Zentrum eines Neutronensterns)
MC	Misch-Core (Mischphase im Zentrum eines Neutronensterns)
RMF	relativistic mean field
TOV	Tolman-Oppenheimer-Volkoff
EOS	Zustandsgleichung (equation of state)

Folgende Symbole sind physikalischen Größen zugeordnet:

ϵ	Energiedichten	[MeV/fm^3]	
p	Drücke	[MeV/fm^3]	
ρ	Teilchendichten	[1/fm^3]	
ρ_c	Ladungsdichten	[$\|e\|$/fm^3]	(e ist die Elementarladung)
μ	chemische Potentiale	[MeV]	
T	Temperatur	[MeV]	
B	Bagkonstante	[MeV^4]	
c_s	Schallgeschwindigkeit		

Als Skalierungsfaktoren werden häufig folgende Größen verwendet:

ϵ_0	Normale Kern-Energiedichte	140 MeV/fm^3
ρ_0	Normale Kern-Teilchendichte	0.17 1/fm^3

Anhang B

Die Relation zwischen den chemischen Potentialen

In diesem Anhang wollen wir die im schwachen Gleichgewicht gültige Beziehung [34]

$$\boxed{\mu_\Box = b_\Box \mu_n - q_\Box \mu_e} \tag{B.1}$$

zwischen den chemischen Potentialen ableiten. Hierin sind μ_n und μ_e die chemischen Potentiale der Neutronen und Elektronen. $\mu_\Box$ sei das chemische Potential eines Teilchens mit Baryonenzahl $b_\Box$ und Ladung $q_\Box$. (Die Ladung des Protons sei $q_p = +1$.) Diese Beziehung benutzen wir zur Gewährleistung des schwachen Gleichgewichts sowohl in der hadronischen Phase ($\Box = p, \Lambda, \Sigma^-, \mu^-, \dots$) als auch in der Quarkphase ($\Box$=u,d,s). Wir zeigen nun, daß Gleichung B.1 aus der Minimierung der Gesamtenergiedichte ϵ der beteiligten Teilchen bei gleichzeitiger Ladungs- und Baryonenzahlerhaltung folgt. Wir drücken die Energiedichte als Funktion der Teilchendichten aus

$$\epsilon = \epsilon(\rho_n, \rho_e, \rho_\Box), \tag{B.2}$$

und minimieren diese bei festgelhaltener Ladungsdichte

$$\rho_c = -\rho_e + q_\Box \rho_\Box \tag{B.3}$$

und festgehaltener Baryonendichte

$$\rho_b = \rho_n + b_\Box \rho_\Box \tag{B.4}$$

mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Man konstruiere dazu die neue Funktion

$$F(\rho_n, \rho_e, \rho_\Box) \equiv \epsilon(\rho_n, \rho_e, \rho_\Box) + \alpha \cdot (\rho_b - \rho_n - b_\Box \rho_\Box) + \beta \cdot (\rho_c + \rho_e - q_\Box \rho_\Box) \tag{B.5}$$

mit den Lagrange-Multiplikatoren α und β und verlange

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_n} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \rho_e} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \rho_\Box} = 0.$$

Aus der Definition der chemischen Potentiale

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_n} \equiv \mu_n, \qquad \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_e} \equiv \mu_e, \qquad \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_\Box} \equiv \mu_\Box$$

folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \rho_n} &= \mu_n - \alpha = 0 \qquad \Rightarrow \alpha = \mu_n \\
\frac{\partial F}{\partial \rho_e} &= \mu_e + \beta = 0 \qquad \Rightarrow \beta = -\mu_e \\
\frac{\partial F}{\partial \rho_\Box} &= \mu_\Box - \alpha b_\Box - \beta q_\Box = 0.
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Lagrange-Multiplikatoren in die letzte Gleichung ergibt sich der gesuchte Ausdruck (B.1)

$$\mu_\Box = b_\Box \mu_n - q_\Box \mu_e.$$

Mit dieser Gleichung lassen sich z.B. folgende Beziehungen zwischen den chemischen Potentialen ableiten (s. Tabelle B.1):

$\Box$	$b_\Box$	$q_\Box$	
p	1	1	$\mu_p = \mu_n - \mu_e$
Λ	1	0	$\mu_\Lambda = \mu_n$
Σ^-	1	-1	$\mu_{\Sigma^-} = \mu_n + \mu_e$
Σ^0	1	0	$\mu_{\Sigma^0} = \mu_n$
Σ^+	1	+1	$\mu_{\Sigma^+} = \mu_n - \mu_e$
K^-	0	-1	$\mu_{K^-} = \mu_e$
μ^-	0	-1	$\mu_{\mu^-} = \mu_e$
u	1/3	+2/3	$\mu_u = 1/3\mu_n - 2/3\mu_e$
d	1/3	-1/3	$\mu_d = 1/3\mu_n + 1/3\mu_e$
s	1/3	-1/3	$\mu_s = 1/3\mu_n + 1/3\mu_e$

Tabelle B.1: Beziehungen zwischen verschiedenen chemischen Potentialen im schwachen Gleichgewicht.

Anhang C

Der Phasenübergang und die Anzahl unabhängiger Komponenten

Wie wir in Anhang B gesehen haben, läßt sich im schwachen Gleichgewicht durch die Bedingung der Ladungs- und Baryonenzahlerhaltung die Anzahl der unabhängigen chemischen Potentiale auf zwei (z.B. μ_n, μ_e) reduzieren. Das chemische Potential eines beliebigen weiteren Teilchens ergibt sich aus einer Linearkombination (Gleichung B.1) der zwei unabhängigen chemischen Potentiale, welche nur von der Ladung und Baryonenzahl des betrachteten Teilchens abhängt. Neben der Erfüllung des schwachen Gleichgewichts in Neutronensternmaterie müssen wir desweiteren Ladungsneutralität fordern, da die relative Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung im Vergleich zur gravitativen Wechselwirkung andernfalls eine gravitative Bindung des Neutronensterns unmöglich machen würde. Letztlich reduziert diese weitere Forderung die Anzahl der unabhängigen chemischen Potentiale auf eins (z.B. μ_n). Allerdings ergeben sich durch die in dieser Arbeit verwendete getrennte Beschreibung der HP und der QP prinzipiell zwei Möglichkeiten zur Implementierung der Bedingung der Ladungsneutralität.

- Konstruktion I (einkomponentiges System)

  Man fordert für die HP und die QP separat Ladungsneutralität. Die Ladungsneutralität einer möglichen MP ist somit automatisch gewährleistet. Die Zustandsgleichung (z.B. der Druck p) beider Phasen läßt sich nun als Funktion eines chemischen Potentials (einer Komponente) darstellen

  $$p_{\mathrm{HP}} = p_{\mathrm{HP}}(\mu_n), \qquad p_{\mathrm{QP}} = p_{\mathrm{QP}}(\mu_n),$$

  woraus sich die Gibbs-Bedingung

  $$p_{\mathrm{QP}}(\mu_n) = p_{\mathrm{HP}}(\mu_n) \tag{C.1}$$

zur Konstruktion der MP ergibt. An dieser Gibbs-Bedingung läßt sich ablesen, daß diese Konstruktion zu einem konstantem Druck in der MP führt. Duch die Struktur der TOV-Gleichungen (s. Kapitel 5) mit $dp/dr \neq 0$ folgt daraus, daß bei Verwendung dieser Konstruktion eine MP im Neutronenstern keinen endlichen Raumbereich einnehmen kann.

- Konstruktion II (zweikomponentiges System)

  Man fordert für die HP und die QP zwar Ladungsneutralität in den reinen Phasen, läßt aber in der MP sich gegenseitig ausgleichende Ladungen beider Phasenkomponenten zu. Somit kann auch hier die MP ladungsneutral eingestellt werden. Die Zustandsgleichung (z.B. der Druck p) beider Phasen ist somit weiterhin eine Funktion von zwei unabhängigen chemischen Potentialen (zwei Komponenten)

$$p_{\rm HP} = p_{\rm HP}(\mu_n, \mu_e), \qquad p_{\rm QP} = p_{\rm QP}(\mu_n, \mu_e),$$

  woraus sich die Gibbs-Bedingung

$$p_{\rm QP}(\mu_n, \mu_e) = p_{\rm HP}(\mu_n, \mu_e) \tag{C.2}$$

  zur Konstruktion der MP ergibt. In der MP muß gesondert Ladungsneutralität gefordert werden (vergl. Kapitel 3). Die Existenz eine MP im Inneren des Neutronensterns ist im Gegensatz zu Konstruktion I nicht von vornherein ausgeschlossen. Diese Tatsache wurde von Glendenning erkannt und die Konstruktion II zum ersten Mal auf den Phasenübergang in Neutronensternen angewendet [58]. Frühere Arbeiten verwendeten Konstruktion I und schlossen somit mögliche Mischphasen im Stern aus (s. z.B. [74, 75]).

Von den beiden genannten Möglichkeiten stellt Konstruktion II eine weniger strenge und somit allgemeinere Bedingung dar und wird durchgehend in dieser Arbeit zur Konstruktion des Phasenübergangs vewendet (s. Kapitel 3). Trotzdem könnte auch Konstruktion I in der Natur verwirklicht sein, falls Coulomb- und Oberflächeneffekte der MP (welche wir in dieser Arbeit vernachlässigen) über die Volumenterme dominieren und dadurch die Ausbildung einer MP verhindern. Solche Effekte wurden u.a. von Heiselberg [61, 65] untersucht. Durch zu ungenügende Kenntnis der Oberflächenenergien zwischen HP und QP läßt sich aber letztlich keine der beiden Konstruktionen wirklich ausschließen. Aus diesem Grund wollen wir im folgenden diskutieren, wie sich beide Konstruktionen bezüglich ihrer Phasenübergangsdichten unterscheiden. Wir werden zeigen, daß der Übergang zur QP bei Konstruktion I generell bei höheren Dichten einsetzt als bei Konstruktion II. Um zu zeigen, daß Konstruktion I zu einer Überschätzung der Phasenübergangsdichte führt, benutzen wir nochmal Abb. 3.2 und Abb. 3.1. In letzterer Abbildung markiert $\mu_n^{[1]}$ das kritische chemische Potential, das für den HP→MP Phasenübergang der Konstruktion II notwendig ist. Es reicht nun zu zeigen, daß Konstruktion I bei $\mu_n^{[1]}$ eine HP vorhersagt, d.h. der Phasenübergang HP→MP noch nicht stattgefunden hat. Mit anderen Worten muß die Gleichung

$$p_{\mathrm{HP}}(\mu_n^{[1]}) > p_{\mathrm{QP}}(\mu_n^{[1]}) \tag{C.3}$$

erfüllt sein, da bei festem chemischen Potential die Phase mit dem größeren Druck physikalisch realisiert ist. Hier und im folgenden bezieht sich die Angabe von nur einem Argument (μ_n) auf Größen, die mit Konstruktion I berechnet sind, während sich zwei Argumente (μ_n, μ_e) auf Konstruktion II beziehen. Punkt $\boxed{1}$ in Abb. 3.1 und Abb. 3.2 ist durch das Phasengleichgewicht zwischen der ladungsneutralen HP und der geladenen QP gegeben durch

$$p_{\mathrm{HP}}(\mu_n^{[1]}) = p_{\mathrm{QP}}(\mu_n^{[1]}, \mu_e^{[1]}). \quad \text{(Punkt } \boxed{1} \text{ in Abb. 3.1)} \tag{C.4}$$

Nun wissen wir, daß bei festgehaltenem chemischen Potential der Neutronen die Ladungsdichte ρ_c^{QP} der Quarkphase (in Einheiten von $|e|$) gegeben ist durch

$$\rho_c^{\mathrm{QP}}(\mu_n, \mu_e) = -\frac{\partial p_{QP}(\mu_n, \mu_e)}{\partial \mu_e}. \tag{C.5}$$

Da die QP an Punkt $\boxed{1}$ und überall oberhalb der ladungsneutralen QP-Kurve in Abb. 3.2 negativ geladen ist, muß auch die rechte Seite von Gleichung (C.5) negativ sein. Somit ist die Ableitung negativ und der Druck sinkt bei festem μ_n (z.B $\mu_n^{[1]}$), wenn wir μ_e von $\mu_e^{[1]}$ auf den Wert absenken, den es in der ladungsneutralen QP annimmt. Dies bedeutet

$$p_{QP}(\mu_n^{[1]}, \mu_e^{[1]}) > p_{QP}(\mu_n^{[1]}). \tag{C.6}$$

Benutzen wir nun (C.4) und (C.6), so erhalten wir (C.3). Damit wäre gezeigt, daß Konstruktion I zu höheren Phasenübergangsdichten führt als Konstruktion II. Der Vollständigkeit halber sei außerdem erwähnt, daß sich durch analoge Betrachtung auch zeigen läßt, daß die HP→QP Phasenübergangsdichte der Konstruktion I unterhalb der MP→QP Phasenübergangsdichte der Konstruktion II liegt. Damit ist gezeigt, daß der Dichtebereich der MP von Konstruktion I innerhalb des Dichtebereichs der MP von Konstruktion II liegt.

Literaturverzeichnis

[1] W. Baade and F. Zwicky, Phys. ReV. 45 (1934) 138.

[2] V.M. Kaspi, Proceedings of the International Conference on Neutron Stars and Pulsars held on November 17-20, 1997, at Tachikawa Hall, Rikkyo University, Tokyo, Japan. Edited by N. Shibazaki, Universal Academy Press, Frontiers science series, 24 (1998) 401.

[3] K.S. Thorne, *Black Holes and Time Warps*, W.W. Norton & Company, New York, London, 1994.

[4] A. Hewish, S.J. Bell, J.D.H. Pilikington, P.F. Scott, and R.A. Collins, Nature 217 (1968) 709.

[5] T. Gold, Nature 218 (1968) 731.

[6] L.D. Landau, Nature 141 (1938) 333.

[7] J.R. Oppenheimer and R. Serber, Phys. Rev. 54 (1938) 540.

[8] S.L. Shapiro and S.A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars* (John Wiley & Sons, New York, 1983).

[9] L. Rodenfeld, in Astrophysics and Gravitation, Proc. 16th Solvay Conference on Physics, Editions de l'Universtité de Bruxelles, Brussels, Belgium, (1974) 174.

[10] J.R. Oppenheimer and G.M. Volkoff, Phys. Rev. 55 (1939) 347.

[11] R.C. Tolman, Phys. Rev. 55 (1939) 364.

[12] S.E. Thorsett, Z. Arzoumanian, M.M. McKinnon, and J.H. Taylor, Astrophys. J. 405 (1993) L29;
S.E. Thorsett and D. Chakrabarty, Astrophys. J. 512 (1999) 288.

[13] R.A. Hulse and J.H. Taylor, Astrophys. J. 191 (1974) L59.

[14] A. Golden and A. Shearer, Astron. Astrophys. 342 (1999) L5.

[15] F.M. Walter, S.J. Wolk, and R. Neuhäuser, Nature 379 (1996) 233;
F.M. Walter and L.D. Matthews, Nature 389 (1997) 358.

[16] X.-D. Li, I. Bombaci, M. Dey, J. Dey, and E.P.J. van den Heuvel, hep-ph/9905356.

[17] X.-D. Li, Z.-G. Dai, and Z.-R. Wang, Astron. Astrophys. 303 (1995) L1.

[18] A.P. Reynolds, P. Roche, and H. Quaintrell, Astron. Astrophys. 317 (1997) L25.

[19] F. Haberl and L. Titarchuk, Astron. Astrophys. 299 (1995) 414.

[20] G.G. Pavlov and V.E. Zavlin, Astrophys. J. 490 (1997) L91.

[21] A. Akmal, V.R. Pandharipande, and D.G. Ravenhall, Phys. Rev. C58 (1998) 1804.

[22] C.J. Pethick and D.G. Ravenhall, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 45 (1995) 429.

[23] C.P. Lorenz, D.G. Ravenhall, and C.J. Pethick, Phys. Rev. Lett. 70 (1993) 379.

[24] G. Baym, C.J. Pethick, and P. Sutherland, Astrophys. J. 170 (1971) 299.

[25] R.P. Feynman, N. Metropolis, and E. Teller, Phys. Rev. 75 (1949) 1561.

[26] G. Baym, H.A. Bethe, and C.J. Pethick, Nucl. Phys. A175 (1971) 225.

[27] J.D. Walecka, Ann. Phys. 83 (1974) 491.

[28] N.K. Glendenning, F. Weber, and S.A. Moszkowski, Nucl. Phys. A572 (1994) 693;
J.I. Kapusta and K.A. Olive, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 13;
J. Ellis, J.I. Kapusta, and K.A. Olive, Nucl. Phys. B348 (1991) 345.

[29] N.K. Glendenning, Phys. Lett. B114 (1982) 392;
N.K. Glendenning, Z. Phys. A327 (1987) 295.

[30] J. Schaffner and I.N. Mishustin, Phys. Rev. C53 (1996) 1416.

[31] S.K. Ghosh, S.C. Phatak, and P.K. Sahu, Z. Phys. A352 (1995) 457.

[32] Y. Sugahara and H. Toki, Nucl. Phys. A579 (1994) 557.

[33] N.K. Glendenning, Astrophys. J. 293 (1985) 470.

[34] N.K. Glendenning, *Compact Stars* (Springer-Verlag, 1997).

[35] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C.B. Thorn, and V.F. Weisskopf, Phys. Rev. D9 (1974) 3471;
A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, and C.B. Thorn, Phys. Rev. D10 (1974) 2599.

[36] E. Farhi and R.L. Jaffe, Phys. Rev. D30 (1984) 2379.

[37] K. Schertler, C. Greiner, and M.H. Thoma, Nucl. Phys. A616 (1997) 659.

[38] K. Schertler, P.K. Sahu, C. Greiner, and M.H. Thoma, Nucl. Phys. A637 (1998) 451.

[39] V. Golovizin and H. Satz, Z. Phys. C57 (1993) 671.

[40] A. Peshier, B. Kämpfer, O.P. Pavlenko, and G. Soff, Phys. Lett. B337 (1994) 235;
A. Peshier, B. Kämpfer, O.P. Pavlenko, and G. Soff, Phys. Rev. D54 (1996) 2399.

[41] V.V. Klimov, Sov. Phys. JETP 55 (1982) 199;
H.A. Weldon, Phys. Rev. D26, (1982) 2789;
H. Vija and M.H. Thoma, Phys. Lett. B342 (1995) 212;
J.-P. Blaizot and J.-Y. Ollitrault, Phys. Rev. D48 (1993) 1390.

[42] M.I. Gorenstein and S.H. Yang, Phys. Rev. D52 (1995) 5206.

[43] E. Witten, Phys. Rev. D30 (1984) 272.

[44] F. Weber, *Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics* (IOP Publishing, 1998).

[45] J. Madsen, astro-ph/9809032, to appear in 'Hadrons in Dense Matter and Hadrosynthesis', ed. J. Cleymans (Lecture Notes in Physics, Springer Verlag).

[46] C. Greiner and J. Schaffner, Int. J. Mod. Phys. E5 (1996) 239;
C. Greiner and J. Schaffner-Bielich, nucl-th/9801062, to appear in 'Heavy Elements and Related New Phenomena', ed. R.K. Gupta and W. Greiner (World Scientific Publications).

[47] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345; Phys. Rev. 124 (1961) 246.

[48] U. Vogl and W. Weise, Progr. Part. Nucl. Phys. 27 (1991) 195.

[49] S.P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. 64 (1992) 649.

[50] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Rep. 247 (1994) 221.

[51] M. Buballa and M. Oertel, akzeptiert zur Veröffentlichung in Phys. Lett. B.

[52] R.J. Furnstahl, H.-B. Tang, and S.D. Serot, Phys. Rev. C52 (1995) 1368;
R.J. Furnstahl, S.D. Serot, and H.-B. Tang, Nucl. Phys. A615 (1997) 441; Erratum-ibid. A640 (1998) 505.

[53] P. Papazoglou, S. Schramm, J. Schaffner-Bielich, H. Stöcker, and W. Greiner, Phys. Rev. C57 (1998) 2576;
P. Papazoglou, D. Zschiesche, S. Schramm, J. Schaffner-Bielich, H. Stöcker, and W. Greiner, Phys. Rev. C59 (1999) 411.

[54] H. Müller, Phys. Rev. C59 (1999) 1405.

[55] M. Hanauske, private Kommunikation.

[56] K. Schertler, S. Leupold, and J. Schaffner-Bielich, astro-ph/9901152, akzeptiert zur Veröffentlichung in Phys. Rev. C.

[57] P. Rehberg, S.P. Klevansky, and J. Hüfner, Phys. Rev. C53 (1996) 410.

[58] N.K. Glendenning, Phys. Rev. D46 (1992) 1274.

[59] M.B. Christiansen and N.K. Glendenning, Phys. Rev. C56 (1997) 2858.

[60] N.K. Glendenning and S. Pei, Phys. Rev. C52 (1995) 2250.

[61] H. Heiselberg, C.J. Pethick, and E.F. Staubo, Phys. Rev. Lett. 70 (1993) 1355.

[62] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler, *Gravitation* (W.H. Freeman and Company, San Francisco 1973).

[63] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, New York, 1972.

[64] M.C. Miller, F.K. Lamb, D. Psaltis, Astrophys. J. 508 (1998) 791.

[65] H. Heiselberg and M. Hjorth-Jensen, nucl-th/9902033.

[66] B.K. Harrison, K.S. Thorne, M. Wakano, and J.A. Wheeler, *Gravitation Theory and Gravitational Collapse* (University of Chicago Press, Chicago 1965).

[67] U.H. Gerlach, Phys. Rev. 172 (1968) 1325.

[68] U.H. Gerlach, Ph.D. thesis, A third family of stable equilibria, Princeton University, 1967 (unpublished).

[69] N.K. Glendenning, C. Kettner, astro-ph/9807155.

[70] N.K. Glendenning and J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 4564.

[71] D.B. Kaplan and A.E. Nelson, Phys. Lett. B175 (1986) 57;
G.E. Brown, K. Kubodera, M. Rho, and V. Thorsson, Phys. Lett. B291 (1992) 355;
V. Thorsson, M. Prakash, and J.M. Lattimer, Nucl. Phys. A572 (1994) 693;
H. Fujii, T. Maruyama, T. Muto, and T. Tatsumi, Nucl. Phys. A597 (1996) 645;
G.Q. Li, C.-H. Lee, and G.E. Brown, Phys. Rev. Lett. 79 (1997) 5214.

[72] N.K. Glendenning, S. Pei, and F. Weber,Phys. Rev. Lett. 79 (1997) 1603.

[73] E. Chubarian, H. Grigorian, G. Poghosyan, and D. Blaschke, astro-ph/9903489.

[74] J. Ellis, J.I. Kapusta, and K.A. Olive, Phys. Lett. B273 (1991) 123.

[75] N.K. Glendenning, Proceedings of the Int. Workshop: Relativistic Aspects of Nuclear Physics, Rio de Janeiro, Brazil, 1989.