Dissertation

Lokalisierung der niederenergetischen Lösungen eines singulär gestörten elliptischen Neumann-Problems mittels der Geometrie des Gebietsrandes

Nils Ackermann

14. April 1999

Meinen Eltern

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit elliptischen semilinearen Randwertaufgaben, die in vielen Gebieten der Mathematik und der Naturwissenschaften auftreten. Unser Interesse daran wurde geweckt durch Anwendungen in der Biologie. Die Dynamik *chemotaktischer Systeme* wird durch ein System parabolischer partieller Differentialgleichungen modelliert, wie es zum Beispiel Keller und Segel [19] vorschlugen. Numerische Experimente lassen diese Art von Systemen als geeignet erscheinen, bestimmte Wanderungs- und Wachstumsphänomene in der Zellbiologie zu beschreiben, bei denen komplexe Prozesse der Musterbildung auftreten. Der Typ von Gleichung, den wir hier untersuchen wollen, hat als Lösungen die stationären Zustände solcher Dynamischen Systeme [26]. Andere Gebiete, in denen Gleichungen dieses Typs auftauchen sind *activator-inhibitor*-Systeme, die zum Beispiel von Gierer und Meinhardt [15, 29] untersucht wurden, Differentialgeometrische Fragestellungen und Schrödinger-Operatoren.

Für ein Gebiet Ω in $\mathbb{R}^N$, eine reellwertige Funktion f auf $\mathbb{R}$ mit $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$ und einen positiven Parameter d betrachten wir das Neumann-Problem

$$(\mathrm{GL})_d \qquad \begin{bmatrix} -d^2\Delta u + u = f(u) & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{bmatrix}$$

wobei $\partial u/\partial \nu$ die Ableitung bezüglich der äußeren Normalenrichtung bedeuten soll. Wir lassen dabei nur solche f zu, die eine Variationsformulierung von $(\mathrm{GL})_d$ erlauben, das heißt, wir fordern wenigstens Hölderstetigkeit und bestimmte Wachstumsbeschränkungen. Außerdem interessieren wir uns hier für positive Lösungen, was uns veranlaßt, von vornherein Funktionen f zu betrachten, die auf der negativen Halbachse verschwinden. Unsere Ergebnisse beziehen sich auf den Fall *kleiner* Parameterwerte $d > 0$.

Sei F die Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$, also

$$F(t) = \int_0^t f(s)\,ds \ .$$

Das *freie Energiefunktional* J_d von $(\mathrm{GL})_d$ auf dem Sobolev-Raum $H^1(\Omega)$ ist dann gegeben durch die Abbildung $J_d\colon H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$J_d(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (d^2|\nabla u|^2 + u^2)\,dz - \int_\Omega F(u)\,dz \ .$$

Die Lösungen von $(\mathrm{GL})_d$ in $H^1(\Omega)$ sind genau die kritischen Punkte von J_d, also Punkte $u \in H^1(\Omega)$ mit $\mathrm{D}J_d(u) = 0$. Dies ist eine mögliche Formulierung als Variationsproblem, hat aber den Nachteil, daß J_d indefinit ist und direkte Variationsmethoden nicht anwendbar sind. Daher versucht man, geeignete Funktionale auf Untermannigfaltigkeiten des

$H^1(\Omega)$ zu betrachten, so daß die Werte nach unten beschränkt sind, und so daß deren kritische Punkte auch genau die gesuchten Lösungen liefern.

Ein frühes Resultat von Berestycki und Lions [9] ist ein Beispiel dafür. Es liefert die Existenz von Grundlösungen (*ground state solutions*) für $\Omega = \mathbb{R}^N$ und $d = 1$, das heißt von nichttrivialen Lösungen mit minimaler Energie. Sie erhalten diese als die Minima der Einschränkung von

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dz$$

auf die Menge

$$\left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^N} \left(F(u) - \frac{1}{2}u^2 \right) dz = 1 \right\},$$

wobei Lösungen aus kritischen Punkten durch eine Skalierung hervorgehen. Im Falle von $\partial\Omega \neq \varnothing$ und $f(t) = t^{p-1}$ mit geeignetem p zeigen Wang [38, 39] und Esteban [13] die Existenz einer Grundlösung (auch *least energy solution* genannt) durch Minimierung des Funktionals

$$\int_{\Omega} (d^2|\nabla u|^2 + u^2) \, dz$$

auf der Menge

$$\left\{ u \in H^1(\Omega) \;\middle|\; \int_{\Omega} |u|^p \, dz = 1 \right\}.$$

Hier müssen die kritischen Punkte wieder skaliert werden, um Lösungen von $(\mathrm{GL})_d$ zu erhalten, was nur wegen der homogenen Nichtlinearität möglich ist.

Lin, Ni und Takagi [26, 31] hingegen arbeiten mit dem freien Funktional J_d und erhalten eine Lösung kleinster Energie aus dem *mountain pass theorem* von Ambrosetti und Rabinowitz [5]. Auch wir betrachten das freie Energiefunktional, schränken es aber auf die *Nehari-Mannigfaltigkeit*

$$\{ u \in H^1(\Omega) \mid \mathrm{D}J_d(u)[u] = 0, u \neq 0 \}$$

ein, wo es nur positive Werte annimmt. Dieser Ansatz wurde für DirichletRandbedingungen von Benci und Cerami [8] ausgearbeitet und von Ackermann [1, 2] auf Neumann-Randbedingungen übertragen.

In allen Fällen kann man für Lösungen kleiner Energie (*niederenergetische Lösungen*, s.u.) für $d \to 0$ eine Konzentration ihrer Masse beobachten, im Neumann-Fall am Rand des Gebietes (im Dirichlet-Fall im Innern). Allgemeiner gilt das sogar für Funktionen aus geeigneten Subniveaumengen A des eingeschränkten Energiefunktionals. Dies wird von vielen Autoren ausgenutzt, um beim Neumann-Problem aus der Topologie von $\partial\Omega$ untere Schranken für die Anzahl der niederenergetischen Lösungen zu finden (bei Dirichlet-Randbedingungen betrachtet man die Topologie von Ω). Man geht dabei wie folgt vor: Mit Hilfe einer Grundlösung auf dem $\mathbb{R}^N$ konstruiert man eine Einbettung φ von $\partial\Omega$ in eine Subniveaumenge A des eingeschränkten Energiefunktionals. Dann konstruiert man mit Hilfe der Konzentration der Elemente $u \in A$ in der Nähe von $\partial\Omega$, zum Beispiel mit einer Schwerpunktabbildung, eine Abbildung $\beta\colon A \to U_\varepsilon(\partial\Omega)$, so daß $\partial\Omega$ ein Deformationsretrakt von $U_\varepsilon(\partial\Omega)$ ist. Daraus folgt, daß $\partial\Omega$ homöomorph zu einem Retrakt von A ist, daß also die Topologie von A mindestens so reichhaltig ist wie die von $\partial\Omega$. Das liefert, zum Beispiel mit Hilfe der Liusternik-Snirel'man-Kategorie, eine untere Schranke für die Anzahl der kritischen Punkte des Energiefunktionals in A. Zuerst scheint diese Idee bei Bahri und Coron [6] aufzutauchen (mit kritischer Nichtlinearität). Weitere Arbeiten hierzu sind Benci und Cerami [7, 8], Mancini und Musina [27], Wang [38, 39] und Ackermann [1, 2].

Eine ganz andere Frage ist die nach den qualitativen Eigenschaften von Lösungen von $(\mathrm{GL})_d$, insbesondere von niederenergetischen Lösungen. Hier ist die Arbeit von Ni und Takagi [31] wegweisend, in der gezeigt wird, daß nach Umskalierungen die Lösungen von $(\mathrm{GL})_d$ für kleine d in C^2_{loc} wie die Grundlösungen auf $\mathbb{R}^N$, eingeschränkt auf den Halbraum $\mathbb{R}^N_+$, aussehen. Das bedeutet insbesondere, sie sind positiv und haben genau ein Maximum auf $\overline{\Omega}$. Dieses Maximum wird außerdem auf $\partial\Omega$ angenommen. (Im Falle einer kritischen Nichtlinearität wird dies in [30] gezeigt). Hier taucht eine Abschätzung auf, die von den Werten der mittleren Krümmung $H\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ von $\partial\Omega$ abhängt, und dies ist der Anlaß für die Frage, welche Rolle die Geometrie von $\partial\Omega$ (im Gegensatz zur Topologie, wie oben betrachtet) in diesem Zusammenhang spielt. Ni und Takagi [32], Adimurthi, Pacella und Yadava [4] und Wang [40] zeigen, daß die Lösungen kleinster Energie sich in Punkten konzentrieren, an denen die mittlere Krümmung von $\partial\Omega$ maximal ist. In Ackermann [1] wird die *Existenz* von niederenergetischen Lösungen in der Nähe von strikten lokalen Maxima von H gezeigt. Gui [18] erweitert dieses Resultat um den Nachweis der Existenz von Lösungen mit mehreren lokalen Maxima, die jeweils in der Nähe von Maxima von H liegen. Diese stellen allerdings keine niederenergetischen Lösungen mehr dar, sie liegen auf höheren Energieniveaus.

Für die homogene *kritische* Nichtlinearität macht Rey [35] schließlich den ersten Schritt, auch den Einfluß anderer kritischer Punkte von H auf den Ort der Konzentration und die Existenz von Lösungen zu untersuchen. Er zeigt, daß für kleine d die lokalen Maxima von Lösungen in der Nähe der kritischen Punkte von H liegen, und daß die Nichtdegeneriertheit eines kritischen Punktes von H die Existenz von Lösungen bedingt, mit lokalem Maximum in der Nähe.

An dieser Stelle setzt unsere Arbeit an. Wir untersuchen im *subkritischen* Fall den Einfluß der mittleren Krümmung von $\partial\Omega$ auf das Lösungsverhalten der niederenergetischen Lösungen, also derjenigen mit genau einem lokalen Maximum, das auf $\partial\Omega$ liegt. Es gelingt uns, für diese Lösungen ähnliche Resultate zu erzielen wie sie [35] im kritischen Fall liefert. Dabei bemühen wir uns um möglichst große Allgemeinheit. So lassen wir zu, daß Ω ein unbeschränktes Gebiet ist und fordern lediglich Glattheit und Kompaktheit des Randes. Außerdem fordern wir nicht die Homogenität der Nichtlinearität. Die exakte Formulierung unserer Ergebnisse befindet sich im Kapitel 2.

Auch in anderen Zusammenhängen treten die Phänomene einzelner oder mehrerer lokaler Maxima bei Lösungen von elliptischen Gleichungen mit ähnlicher Form wie $(\mathrm{GL})_d$ auf. Diese werden im Falle von autonomen Gleichungen mit Dirichlet-Randbedingungen von der Geometrie des Gebietes im Innern bedingt, genauer von den kritischen Punkten der Randabstandsfunktion [21]. Im Falle von nichtautonomen Gleichungen kann ein Potential die Ausbildung von lokalen Maxima bei Lösungen hervorrufen [12, 17, 23, 33, 34]. Noch eine andere Situation ist der autonome Fall auf einem Symmetrischen Gebiet [41, 42].

Danksagung. Für die hervorragende Betreuung bei der Erstellung der Dissertation möchte ich mich bei Prof. Dr. Thomas Bartsch bedanken, der mich an die Methoden der Variationsrechnung herangeführt hat. Ferner geht mein Dank an Prof. Dr. Hans-Otto Walther für die Tätigkeit als Gutachter. Ohne die Unterstützung durch meine Frau Lucia Niebler hätte ich diese Arbeit nicht so bald vollenden können, deshalb gebührt ihr mein ganz besonderer Dank. Unsere Tochter Hannah Lucia Niebler war sehr geduldig und wurde liebevoll halbtäglich durch die Familie Imani/Parchami betreut.

Meinen Eltern Heide und Heye Ackermann widme ich die Arbeit als Ausdruck des Dankes dafür, daß sie mir das Studium ermöglichten.

2 Ergebnisse

Unter geeigneten Voraussetzungen an die Nichtlinearität f kann $(\mathrm{GL})_d$ als ein Variationsproblem mit dem freien Energiefunktional J_d aufgefaßt werden. Wir verwenden stärkere Einschränkungen, als dafür nötig wären, um später einige genaue asymptotische Abschätzungen beweisen zu können.

Sei $N \geq 2$ eine ganze Zahl. Der *kritische Sobolev-Index* 2^* ist dann $2^* = \infty$ falls $N = 2$ und $2^* = 2N/(N-2)$ falls $N \geq 3$. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ein Gebiet, $\partial\Omega$ nichtleer, kompakt und C^4 (eine Erklärung der Notation befindet sich am Ende dieses Kapitels). Der Kürze halber setzen wir $E = H^1(\Omega)$. Die Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ erfülle die folgenden Bedingungen:

(N1) Für alle $t \leq 0$ ist $f(t) = 0$. Es gibt ein $t_0 > 0$ mit $f(t_0) > 0$.

(N2) Es gibt $C > 0$ und $p_1, p_2 \in (2, 2^*)$ mit $p_1 \leq p_2$, so daß für alle $t > 0$ gilt:

$$|f''(t)| \leq C(t^{p_1-3} + t^{p_2-3}) \ .$$

(N3) Für f'' gelte eine lokale Hölderbedingung in folgendem Sinne: Es existieren $C > 0$, $\alpha_1 \in (0, 1]$, $q_1, q_2 > -\alpha_1$, so daß für alle $T > 0$ und $t_1, t_2 \in [T/2, 3T/2]$ gilt:

$$|f''(t_1) - f''(t_2)| \leq C(T^{q_1-1} + T^{q_2-1})|t_1 - t_2|^{\alpha_1} \ .$$

(N4) Es gibt $b \geq 1$, so daß für alle $t > 0$ gilt: $tf'(t) \geq bf(t)$. Ist lediglich $b = 1$ möglich, dann muß diese Ungleichung strikt sein für alle $t > 0$.

(N5) Es gibt $b_0 > 2$ mit $tf(t) \geq b_0 F(t)$ für alle $t > 0$.

Um eine weitere Bedingung zu formulieren, betrachten wir die Gleichung

$$(\mathrm{SGL})_{\mathbb{R}^N} \qquad -\Delta u + u = f(u) \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \ ,$$

wobei f hier (N1)–(N5) erfüllen soll. Wie später ausführlicher diskutiert (siehe Lemma 3.5) ist jede Lösung von $(\mathrm{SGL})_{\mathbb{R}^N}$ aus $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ stetig, positiv und radialsymmetrisch bezüglich eines Punktes in $\mathbb{R}^N$, und es existiert eine solche Lösung w. Wegen der Translationsinvarianz von $(\mathrm{SGL})_{\mathbb{R}^N}$ können wir w radialsymmetrisch bezüglich des Ursprungs wählen. Wir fordern nun:

(N6) Die Lösung w von $(\mathrm{SGL})_{\mathbb{R}^N}$ ist bis auf Translationen eindeutig in $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, und die linearisierte Gleichung $-\Delta u + u = f'(w)u$ hat in $H^1(\mathbb{R}^N)$ keine nichttriviale radialsymmetrische Lösung.

Es gilt unter diesen Bedingungen an f: Das Funktional $J_d\colon E \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert und stetig differenzierbar. Wie man zeigen kann (siehe [2]) ist für einen kritischen Punkt $u \neq 0$ immer $J_d(u) > 0$ und es existiert

$$c_d = \min\{\, J_d(u) \mid \mathrm{D}J_d(u) = 0, u \neq 0\,\} > 0\ .$$

Wir definieren die Konstanten

$$m(\infty) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w|^2 + w^2)\,dz - \int_{\mathbb{R}^N} F(w)\,dz$$
$$\gamma = \frac{1}{N+1}\int_{\mathbb{R}^N_+} w'(|z|)^2 z_N\,dz\ .$$

Dann ist $m(\infty) > 0$, $\gamma > 0$ und es gilt

$$c_d = d^N(m(\infty)/2 + o(1))$$

für $d \to 0$ [2].

Das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^N$ induziert eine Riemannsche Metrik auf $\partial\Omega$. Den Gradienten ∇g einer C^1-Funktion $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ können wir außerdem auffassen als eine Funktion $\nabla g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$. Die Abbildung

$$g \to \sup_{\partial\Omega}|g| + \sup_{\partial\Omega}|\nabla g|$$

definiert eine Norm $\|\cdot\|_{C^1(\partial\Omega)}$ und macht $C^1(\partial\Omega)$ zu einem Banachraum.

Es sei nun $H\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ die mittlere Krümmung des Randes von Ω. Aus der C^4-Differenzierbarkeit von $\partial\Omega$ folgt $H \in C^2(\partial\Omega)$. Wir beweisen in dieser Arbeit den

Satz. *Zu jedem $\varepsilon \in (0, m(\infty)/2)$ gibt es $d_0 > 0$ mit den folgenden Eigenschaften: Ist $d \leq d_0$ und*

$$A_{\varepsilon,d} = \{\, u \in E \mid \mathrm{D}J_d(u) = 0,\ J_d(u) \leq d^N(m(\infty) - \varepsilon), u \neq 0\,\}$$

dann existieren eine C^1-Einbettung $\lambda_d\colon \partial\Omega \to E$ und eine C^1-Abbildung $H_d\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ mit:

a) $A_{\varepsilon,d} = \lambda_d(\mathrm{crit}(H_d))$

b) $J_d \circ \lambda_d = d^N(m(\infty)/2 - d\gamma(N-1)H_d)$.

Außerdem gilt $H_d \to H$ in $C^1(\partial\Omega)$ für $d \to 0$.

Für $d \leq d_0$ und $u \in A_{\varepsilon,d}$ ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine klassische Lösung von $(\mathrm{GL})_d$, *$u > 0$ und u besitzt genau ein lokales Maximum $M(u)$ in $\overline{\Omega}$. Es gilt $M(u) \in \partial\Omega$ und*

$$\sup_{u\in A_{\varepsilon,d}} |M(u) - \lambda_d^{-1}(u)| = O(d) \qquad \text{für } d \to 0\ .$$

Die Elemente von $A_{\varepsilon,d}$ nennen wir niederenergetische Lösungen.

Die Anwendung dieses Satzes wollen wir nun etwas veranschaulichen. Wir folgen dabei [24]. Für eine Teilmenge $D \subseteq \partial\Omega$ und $\varepsilon > 0$ sei $U_\varepsilon(D) = \{ x \in \partial\Omega \mid \operatorname{dist}(x, D) < \varepsilon \}$ die ε-Umgebung in $\partial\Omega$.

2.1 Definition. Eine kompakte Teilmenge $D \subseteq \operatorname{crit}(H)$ heißt *C^1-stabile kritische Menge für H*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für $g \in C^1(\partial\Omega)$ aus $\|g - H\|_{C^1(U_\varepsilon(D))} \leq \delta$ folgt, daß g einen kritischen Punkt in $U_\varepsilon(D)$ besitzt.

Zum Beispiel sind Mengen, auf denen H strikt lokal maximal oder minimal ist, C^1-stabil (hier reicht sogar $\|g - H\|_{C^0(D_\varepsilon)} \leq \delta$ in Definition 2.1). Ein anderes Beispiel ist folgendes: Gibt es für einen isolierten kritischen Punkt P von H eine kleine Umgebung $U_\varepsilon(P)$ mit $\overline{U_\varepsilon(P)} \cap \operatorname{crit}(H) = \{P\}$ und so, daß bezüglich einer Karte der Abbildungsgrad $\deg(\nabla H, U_\varepsilon(P), 0)$ nicht verschwindet, dann ist $\{P\}$ C^1-stabil. Dies trifft insbesondere auf einen nichtausgearteten kritischen Punkt von H zu.

Mit diesem Begriff läßt sich der Satz wie folgt zusammenfassen:

> Für kleine d sind die niederenergetischen Lösungen von $(\mathrm{GL})_d$ positiv und haben genau ein lokales (also auch globales) Maximum in $\overline{\Omega}$, das auf dem Rand angenommen wird. Diese Maxima nähern sich für $d \to 0$ der Menge der kritischen Punkte von H an. Die Werte des Energiefunktionals J_d folgen für diese Lösungen mit umgekehrtem Vorzeichen (bis auf einen Faktor) annähernd den Werten von H. Das heißt insbesondere, daß die niederenergetischen Lösungen kleinster (größter) Energie in der Nähe der Maxima (Minima) von H ihr Maximum annehmen.
>
> Ist $D \subseteq \operatorname{crit}(H)$ eine C^1-stabile kritische Menge für H, dann gibt es für kleine d jeweils eine Lösung u_d von $(\mathrm{GL})_d$, so daß sich die zugehörigen Maxima von u_d der Menge D nähern für $d \to 0$.

Die Ergebnisse in [31] liefern eine noch detailliertere Beschreibung der niederenergetischen Lösungen. Es wird gezeigt, daß eine Lösung u mit Maximum in $P \in \partial\Omega$ sich in C^2_{loc} verhält wie $w((z - P)/d)$ wenn d klein ist. Außerdem fallen Lösungen mit dem Abstand zu ihrem Maximalpunkt exponentiell ab.

Die Bedingung (N1) schließt Trivialitäten aus und sichert im Wesentlichen, daß wir nur *positive* nichttriviale Lösungen erhalten [2]. Funktionen f, die (N2) und (N4) erfüllen, haben *subkritisches Wachstum* und sind, wie man leicht sieht, *superlinear* (das heißt, es gilt $\lim_{t\to\infty} f(t)/t = \infty$). Zusammen mit der Differenzierbarkeit von f folgt hieraus, daß $(\mathrm{GL})_d$ ein Variationsproblem ist, und daß die Nehari-Mannigfaltigkeit glatt ist (Abschnitt 3.1 und [2]). Dort, wo $f(t) > 0$ gilt, ist $f(t)/t$ streng wachsend. Es gibt daher einen eindeutig bestimmten positiven Fixpunkt $\bar{u}$ von f. Die lokale Hölderstetigkeit von f benötigen wir, um ausreichende Differenzierbarkeit für w zu erreichen, und für eine asymptotische Abschätzung der Werte des Energiefunktionals (siehe Abschnitt 4.3). Die Bedingung (N5) ist eine Standardvoraussetzung für die Sicherung der Palais-Smale Bedingung, mit der man Konvergenz gegen kritische Punkte des Energiefunktionals sichert [5]. Sie folgt aus (N4) mit $b_0 = b + 1$, wenn $b > 1$ gewählt werden kann.

Unsere Bedingung (N4) ist schwächer als die entsprechende Bedingung (f2) in [32]. Dennoch bleibt, wie in [2] gezeigt, die Diskussion in Anhang B von [32] auch in unserem allgemeineren Fall gültig, das heißt, wir können die Ergebnisse von [32] und [31] in unserer Arbeit verwenden. Zu Bedingung (N6) bemerken wir, daß sie wegen der Diskussion in [32] äquivalent ist zu der Forderung, daß der linearisierte Differentialoperator $-\Delta+\mathrm{Id}-f'(w)$ auf dem Raum $L^2_r(\mathbb{R}^N)$ der radialsymmetrischen Funktionen eine stetige Inverse besitzt.

Das Standardbeispiel für zulässige Funktionen f ist eine Summe von Potenzfunktionen. Seien $m \in \mathbb{N}$, $r_i \in (1, 2^* - 1)$ und $a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $i = 1, \ldots, m$. Ferner gelte $r_1 < r_2 < \cdots < r_m$ und es gebe einen Index $k \in \{1, \ldots, m\}$ mit $a_i < 0$ für $i < k$ und $a_i > 0$ für $i \geq k$. Wir setzen $p_1 = r_1 + 1$, $p_2 = r_m + 1$, $\alpha_1 = 1$, $q_i = p_i - 3$ $(i = 1, 2)$ und $b = r_k$. Es ist leicht zu sehen, daß dann für die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \sum_{i=1}^m a_i t^{r_i} & t \geq 0 \end{cases}$$

die Bedingungen (N1)–(N4) erfüllt sind. Aus der Bemerkung oben folgt, daß auch (N5) gilt. Problematisch ist nur Bedingung (N6), da noch keine Charakterisierung von Funktionen f bekannt ist, für die sie gilt. Wie in [32] bemerkt, ist es ausreichend, zum Beispiel $m = 2$, $a_1 \leq 0$ und $a_2 = 1$ zu verlangen. Für weitere Ergebnisse zur Eindeutigkeit von w verweisen wir auf [28] und [11].

Der Spezialfall $f(t) = t^{p-1}$ mit $p \in (2, 2^*)$ und beschränktem Gebiet Ω wurde kürzlich von Li [24] mit anderen Methoden behandelt. Er wendet eine spezielle Form des Satzes über implizite Funktionen an, macht dabei aber in seinen Rechnungen und Abschätzungen wesentlichen Gebrauch von der explizit gegebenen Form von f. Im Gegensatz dazu verfolgen wir einen eher geometrischen Ansatz, der uns natürlicher zu sein scheint und insbesondere keine Abschätzungen so spezieller Natur wie in [24] erfordert.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 3 stellen wir die Grundideen des Beweises des Satzes dar. Er stützt sich auf vier Aussagen, die in den Unterabschnitten von Kapitel 4 bewiesen werden. Kapitel 5 besteht aus den Beweisen von technischen Aussagen, die wir aus dem Hauptstrang der Argumentation in Kapitel 4 ausgelagert haben. Der Bequemlichkeit halber haben wir aber die Formulierung einiger dieser Hilfsmittel dort zitiert, wo sie zuerst im Hauptteil benötigt werden.

Notation. Der Raum $\mathbb{R}^N$ sei mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^N}$ ausgestattet. In endlichdimensionalen Vektorräumen schreiben wir für die Norm $|\cdot|$. Für $R > 0$, $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{R}^k$ bezeichne $B^k_R(z)$ die abgeschlossene Kugel in $\mathbb{R}^k$ mit Radius R und Mittelpunkt z. Im Falle von $k = N$ entfällt der obere Index. Für eine Teilmenge U des Vektorraumes E bezeichne $[U]$ die Lineare Hülle. In einem Innenproduktraum E schreiben wir das Skalarprodukt als $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, und Normen in undendlichdimensionalen Vektorräumen schreiben wir als $\|\cdot\|$.

Für zwei normierte Räume E und F bezeichnen wir die k-linearen stetigen Abbildungen von E nach F mit $\mathcal{L}^k(E, F)$ und lassen den Index k fort für $k = 1$. Im Falle von $E = F$ schreiben wir auch $\mathcal{L}^k(E)$ anstatt $\mathcal{L}^k(E, F)$. Die Anwendung einer linearen Abbildung A auf ein Element x bezeichnen wir häufig mit $A[x]$, um sie von der Anwendung auf Argumente mit nichtlinearer Abhängigkeit abzusetzen.

Für zwei Banach-Mannigfaltigkeiten X und Y bezeichnen wir die Menge der k-fach differenzierbaren Abbildungen von X nach Y mit $C^k(X,Y)$ und lassen den Index k fort für $k=0$. Im Falle von $Y=\mathbb{R}$ schreiben wir auch $C^k(X)$ anstatt $C^k(X,\mathbb{R})$.

Sind E und F Banachräume, $f \in C^2(E,F)$ und $u \in E$, dann ist also $\mathrm{D}^2 f(u) \in \mathcal{L}^2(E,F)$. Für ein $v \in E$ ist dann $\mathrm{D}^2 f(u)[v] \in \mathcal{L}(E,F)$ gegeben durch

$$(\mathrm{D}^2 f(u)[v])[w] = \mathrm{D}^2 f(u)[v,w] \; .$$

Ist E außerdem ein Hilbertraum und $F=\mathbb{R}$, dann identifizieren wir $\mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = E$ und $\mathrm{D}^2 f(u) = \mathrm{D}(\nabla f)(u) \in \mathcal{L}(E,E)$.

Die Menge der kritischen Punkte einer differenzierbaren Abbildung f bezeichnen wir mit $\mathrm{crit}(f)$.

Für eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^N$ bezeichne $H^k(D) = W^{k,2}(D)$ den Sobolev-Raum der Ordnung k mit Exponent 2 (siehe z.B. [16]).

3 Die endlichdimensionale Reduktion

Die zentrale Aussage des Satzes ist die Reduktion des Problems, die kritischen Punkte des Energiefunktionals J_d zu finden, auf das endlichdimensionale Problem, die kritischen Punkte einer geeigneten Abbildung $H_d\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ zu finden. Die Konvergenz $H_d \to H$ in $C^1(\partial\Omega)$ liefert uns dann die Handhabe, Existenz- und Lokalisierungsaussagen über niederenergetische Lösungen zu machen.

Die endlichdimensionale Reduktion beruht im Kern auf der Nichtdegeneriertheit nach Bedingung (N6). Sie kommt zum tragen, da unser Augenmerk in dieser Arbeit auf dem Grenzfall $d \to 0$ liegt. Durch eine Skalierung von $(\mathrm{GL})_d$ erreichen wir eine äquivalente Formulierung, bei der Ω als Variable Größe auftritt und das Energiefunktional in seiner Form unabhängig von d ist. Die Methode ist wohlbekannt, wir werden sie im ersten Abschnitt dieses Kapitels darstellen. Ihr Vorteil liegt darin, daß sich die Situation dann wegen der Glattheit von $\partial\Omega$ in einem bestimmten Sinne dem Problem auf dem Halbraum $\mathbb{R}^N_+ = \{\, z \in \mathbb{R}^N \mid z_N > 0 \,\}$ annähert und deshalb, wie oben erwähnt, die Eigenschaften der Grundlösung w das asymptotische Verhalten des skalierten Funktionals J_d bestimmen.

Schließlich zeigen wir im zweiten Abschnitt die Idee, wie in der skalierten Situation mit Hilfe von Transversalitäts- und Nichtdegeneriertheitseigenschaften die Reduktion des Variationsproblems auf ein endlichdimensionales Problem erfolgt, und wir übersetzen diese Aussage in die Ausgangssituation.

3.1 Skalierung

Wir betrachten für ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^N$ mit glattem Rand die elliptische Gleichung

$$(\mathrm{SGL})_D \qquad \begin{bmatrix} -\Delta u + u = f(u) & \text{in } D \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial D \end{bmatrix}$$

und schreiben ab jetzt $E_D = H^1(D)$. Lösungen von $(\mathrm{SGL})_D$ in E_D sind dann genau die kritischen Punkte des Funktionals $I_D\colon E_D \to \mathbb{R}$ mit

$$I_D(u) = \frac{1}{2}\int_D (|\nabla u|^2 + u^2)\, dz - \int_D F(u)\, dz\ .$$

Eine wichtige Rolle spielt die Existenz der Sobolev-Einbettungen $E_D \to L^p(D)$ für $p \in [2, 2^*]$, falls $N \geq 3$ gilt, und für $p \in [2, \infty)$ falls $N = 2$ ist. Die Einbettungskonstante hängt dabei lediglich von p und von der Kegelbedingung von D ab [3].

Wir führen noch einige weitere Bezeichnungen ein. Für eine reelle Funktion u sei u_+ der positive Anteil, also $u_+ = \max\{0, u\}$. Es seien

$$\overline{E}_D = \{ u \in E_D \mid u_+ \neq 0 \}$$

und $L_D \colon E_D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$L_D(u) = \mathrm{D}I_D(u)[u] = \int_D (|\nabla u|^2 + u^2)\, dz - \int_D f(u)u\, dz \ .$$

Ferner setzen wir

$$W_D = \{ u \in E_D \mid u \neq 0, L_D(u) = 0 \} \ .$$

Die Differenzierbarkeit der Funktionale haben wir in der vorliegenden Arbeit bewiesen:

Zitat (Lemma 5.5). *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und erfülle eine Kegelbedingung. Weiter gelte, daß $D \cap B_R(0)$ und $D \setminus B_R(0)$ für große R eine gleichmäßige Kegelbedingung erfüllen. Dann sind I_D und L_D zweimal stetig differenzierbar. Für $u \in E_D$ sind die Normen der Ableitungen an der Stelle u beschränkt, abhängig nur von einer oberen Schranke für $\|u\|$, der Kegelbedingung von D und von f.*

Weiter gilt für $u, v \in E_D$:

$$\|\mathrm{D}^2 I_D(u) - \mathrm{D}^2 I_D(v)\| \leq C(1 + \|u + v\|^{q_3})\|u - v\|^{\alpha_3}$$

mit $\alpha_3 = \min\{1, p_1 - 2\} \in (0, 1]$, $q_3 = p_2 - 2 - \alpha_3 \geq 0$ und einer Konstanten $C \geq 0$, die nur von f und der Kegelbedingung von D abhängt.

Einige wichtige Eigenschaften dieser Größen entnehmen wir [2]. Wir zitieren hier die Lemmata 2.8, 2.9, 2.10, 2.13 und weitere Aussagen:

3.1 Lemma. *Die Menge W_D ist eine C^2-Mannigfaltigkeit, und es gilt $W_D \subseteq \overline{E}_D$. Es gibt eine C^2-Abbildung $\xi_D \colon \overline{E}_D \to \mathbb{R}^+$, so daß $\overline{E}_D$ durch $\zeta_D(u) = \xi_D(u)u$ auf W_D abgebildet wird, und so daß die Einschränkung von ζ_D auf $\{u \in \overline{E}_D \mid \|u\| = 1\}$ ein C^2-Diffeomorphismus ist.*

3.2 Lemma. *Es gibt $C > 0$, so daß für $u \in W_D$ gilt*

$$\|u\| \geq \|u_+\| \geq C \ .$$

Dabei hängt C nur von der Kegelbedingung für D und von f ab. Weiter ist W_D abgeschlossen in E_D.

3.3 Lemma. *Für $u \in E_D$ gilt*

$$I_D(u) \geq \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b_0} \right) \|u\| - \frac{1}{b_0} \|\mathrm{D}I_D(u)\| \right) \|u\| \ .$$

Ist $u \in W_D$, dann gilt sogar

$$I_D(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b_0} \right) \|u\|^2 \ .$$

3.4 Lemma. *Ist* $(u_n) \subseteq E_D \backslash \{0\}$, $\|u_n\|$ *und* $\|u_n\|^{-1}$ *beschränkt,* $L_D(u_n) \to 0$ *für* $n \to \infty$, *dann gibt es* $C > 0$ *mit* $|\mathrm{D}L_D(u_n)[u_n]| \geq C$ *für große* n.

Die Menge W_D ist die Nehari-Mannigfaltigkeit des Funktionals I_D. Sie umfaßt alle nichttrivialen kritischen Punkte von I_D, es gilt sogar:

$$\operatorname{crit}(I_D|_{W_D}) = \operatorname{crit}(I_D) \setminus \{0\} \; . \tag{3.1}$$

Aus den Lemmata 3.2 und 3.3 folgt, daß I_D auf W_D nur positive Werte annimmt und von 0 weg beschränkt ist. Mit *KonzentrationsKompaktheitArgumenten* sieht man [2], daß

$$m(D) = \min\{\, I_D(u) \mid u \in W_D \,\} > 0$$

existiert. Die offenen Subniveaumengen der Einschränkung von I_D auf W_D wollen wir für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$W_D^\alpha = \{\, u \in W_D \mid I_D(u) < \alpha \,\}$$

bezeichnen.

Übersichtshalber verwenden wir für die Spezialisierungen $D = \mathbb{R}^N$, $D = \mathbb{R}^N_+$ und $D = \Omega_d = \frac{1}{d}\Omega$ statt D in den oben definierten Ausdrücken die Indizes ∞, $+$ und d, d.h. wir schreiben E_∞, I_∞ usw.

3.5 Lemma. *Das Problem* $(\mathrm{SGL})_\infty$ *besitzt eine Lösung* $w \in E_\infty \setminus \{0\}$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

a) $I_\infty(w) = m(\infty)$

b) $w \in C^4(\mathbb{R}^N)$

c) $w > 0$

d) *w ist radialsymmetrisch bezüglich des Ursprungs*

e) *es gibt* $C_1, C_2 > 0$ *mit* $|\mathrm{D}^k w(z)| \leq C_1 e^{-C_2|z|}$ *für* $z \in \mathbb{R}^N$ *und* $k = 0, 1, 2, 3, 4$

f) *es gilt* $\lim_{r\to\infty} |w'(r)|/w(r) = 1$, *und daher* $|\partial_i w| \leq C w$ *auf* $\mathbb{R}^N$.

Beweis. Die Existenz einer Lösung $w \in E_\infty \setminus \{0\}$ mit minimaler Energie (*ground state solution*) wurde für $N \geq 3$ in [9] bewiesen. Dies kann im allgemeinen Fall auch mit Hilfe von Proposition 2.12 in [2] erreicht werden. Wegen der Wachstums- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an f folgt aus wohlbekannter Regularitätstheorie Aussage b) (siehe dazu die Hinweise in [37], Abschnitt 5). Anwendung des Maximumsprinzips (siehe z.B. [26]) liefert c). Nun kann man die Aussagen d) und e) mit einer Argumentation wie im Beweis von Theorem 2.1 in [31] beweisen, wobei insbesondere die Arbeit [14] von Bedeutung ist. Für f) verweisen wir schließlich auf Lemma 1 in [28]. □

Die Bedingung (N6) sichert die Eindeutigkeit dieser Lösung. Aus der Symmetrie von w folgt weiter, daß $w|_{\mathbb{R}^N_+}$ das Minimum der Einschränkung von I_+ auf W_+ ist und daß gilt: $I_+(w) = m(+) = m(\infty)/2$.

Die eingangs erwähnte Skalierung von $(\mathrm{GL})_d$ wird durch den Isomorphismus

$$\sigma_d \colon E \to E_d$$

mit

$$\sigma_d(u)(z) = u(dz)$$

realisiert. Es ergeben sich dann die Beziehungen

$$\begin{aligned} J_d(u) &= d^N I_d(\sigma_d(u)) \\ \mathrm{crit}(I_d) &= \sigma_d(\mathrm{crit}(J_d)) \\ c_d &= d^N m(d)\ , \end{aligned}$$

so daß wir eine Entsprechung der Lösungen von $(\mathrm{GL})_d$ und $(\mathrm{SGL})_d$ (d.h. $(\mathrm{SGL})_{\Omega_d}$) erhalten. In [2] wird gezeigt, daß für $d \to 0$

$$m(d) = m(+) + o(1)$$

gilt, und wir zitieren außerdem noch die Lemmata 3.8 und 3.9 aus dieser Arbeit:

3.6 Lemma. *Seien $d_n \to 0$, $u_n \in E_{d_n} \setminus \{0\}$, $\|u_n\|$ und $\|u_n\|^{-1}$ beschränkt, und es gelte $L_{d_n}(u_n) \to 0$. Dann gibt es $C > 0$ mit $|\mathrm{D}L_{d_n}(u_n)[u_n]| \geq C$ für große n.*

3.7 Lemma. *Seien d_n und u_n wie in Lemma 3.6. Dann gilt $|1 - \xi_{d_n}(u_n)| = O(L_{d_n}(u_n))$ für $n \to \infty$.*

3.2 Beweis des Satzes

Wir definieren für $d > 0$ die Abbildungen $\psi_d \colon \partial\Omega_d \to E_d$ durch $\psi_d(y)(z) = w(z-y)$ für $z \in \Omega_d$. Wir setzen $X_d = \mathrm{image}\,\psi_d$ und für $\delta > 0$ sei $X_{d,\delta} = \{u \in E_d \mid \mathrm{dist}(u, X_d) < \delta\}$. Dann gelten:

3.8 Lemma. *Es existiert $\delta_0 > 0$, so daß für kleine d gilt: ψ_d ist eine C^3-Einbettung und X_{d,δ_0} eine normale Tubenumgebung von X_d. Das heißt, für alle $u \in X_{d,\delta_0}$ hat die Abbildung $\partial\Omega_d \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \|\psi_d(y) - u\|$ einen eindeutig bestimmten Minimalpunkt $\beta_d(u)$. Die Abbildung $\beta_d \colon X_{d,\delta_0} \to \partial\Omega_d$ ist eine C^2-Submersion, und für alle $y \in \partial\Omega_d$ ist $\beta_d^{-1}(y)$ eine C^2-Untermannigfaltigkeit von E_d.*

3.9 Lemma. *Es existiert $\varepsilon_0 > 0$ mit den folgenden Eigenschaften: Für kleine d und $y \in \partial\Omega_d$ gilt: $W_d^{m(d)+\varepsilon_0} \subseteq X_{d,\delta_0}$ und $\beta_d^{-1}(y) \pitchfork W_d^{m(d)+\varepsilon_0}$. Das heißt, $Y_{d,y} = \beta_d^{-1}(y) \cap W_d^{m(d)+\varepsilon_0}$ ist eine C^2-Untermannigfaltigkeit von E_d. Es ist $Y_{d,y} \neq \emptyset$ und die Einschränkung von I_d auf $Y_{d,y}$ hat einen eindeutig bestimmten kritischen Punkt $\varphi_d(y)$, ein striktes Minimum. Die Abbildung $\varphi_d \colon \partial\Omega_d \to W_d^{m(d)+\varepsilon_0}$ ist eine C^1-Einbettung, ein Schnitt von β_d. Weiter gilt: $\sup_{y\in\partial\Omega_d} \|\psi_d(y) - \varphi_d(y)\| = O(d)$ für $d \to 0$.*

3.10 Lemma. *Für $P \in \partial\Omega$ und $y = P/d \in \partial\Omega_d$ gilt:*

$$I_d(\varphi_d(y)) = m(+) - d(N-1)\gamma H(P) + o(d)$$
$$\frac{d}{dy} I_d(\varphi_d(y)) = -d^2(N-1)\gamma \frac{d}{dP} H(P) + o(d^2)$$

für $d \to 0$, unabhängig von P.

3.11 Lemma. *Ist $\varepsilon > 0$, dann gilt für kleine d: Ist $u \in E_d \setminus \{0\}$ mit $\mathrm{D}I_d(u) = 0$ und $I_d(u) \leq m(\infty) - \varepsilon$ dann folgt $u \in W_d^{m(d)+\varepsilon_0} \cap C^2(\overline{\Omega}_d)$, $u > 0$ auf $\overline{\Omega}_d$ und u hat genau ein lokales Maximum $M_d(u)$ in $\overline{\Omega}_d$. Ferner gilt $M_d(u) \in \partial\Omega_d$ und es gibt $C > 0$ mit $|M_d(u) - \beta_d(u)| \leq C$ unabhängig von d und u.*

Diese vier Lemmata werden in den vier Unterabschnitten von Kapitel 4 bewiesen.

Sei $\varepsilon \in (0, m(\infty)/2)$ und sei $d_0 > 0$ so klein, daß für dieses ε und für $d \leq d_0$ die Aussagen der Lemmata 3.8, 3.9 und 3.11 zutreffen, und so daß $\max_{y \in \partial\Omega_d} I_d(\varphi_d(y)) \leq m(\infty) - \varepsilon$ gilt. Das geht wegen Lemma 3.10 und $m(+) = m(\infty)/2$. Im folgenden sei $d \leq d_0$ und $Z_d = \varphi_d(\partial\Omega_d)$. Wir setzen für $P \in \partial\Omega$

$$\lambda_d(P) = \sigma_d^{-1}(\varphi_d(P/d))$$

und

$$H_d = -\frac{1}{d(N-1)\gamma} \left(\frac{1}{d^N} J_d \circ \lambda_d - m(+) \right) .$$

Damit ist Punkt b) des Satzes erfüllt. Es folgt aus Lemma 3.10

$$H_d(P) = -\frac{1}{d(N-1)\gamma} (I_d(\varphi_d(P/d)) - m(+)) = H(P) + o(1)$$

und

$$\frac{d}{dP} H_d(P) = -\frac{1}{d(N-1)\gamma} \frac{d}{dP} I_d(\varphi_d(P/d)) = \frac{d}{dP} H(P) + o(1) ,$$

wobei $o(1)$ unabhängig von P für $d \to 0$ gilt. Das bedeutet $H_d \to H$ in $C^1(\partial\Omega)$.

Um die restlichen Aussagen des Satzes zu zeigen, setzen wir

$$\overline{A}_{\varepsilon,d} = \{ u \in E_d \mid \mathrm{D}I_d(u) = 0, I_d(u) \leq m(\infty) - \varepsilon, u \neq 0 \} .$$

Nach Lemma 3.11 folgt $\overline{A}_{\varepsilon,d} \subseteq W_d^{m(d)+\varepsilon_0}$. Ist $\overline{I}_d$ die Einschränkung von I_d auf Z_d, so folgt aus Lemma 3.9 einerseits $\overline{A}_{\varepsilon,d} \subseteq \mathrm{crit}(\overline{I}_d)$. Ist andererseits $u \in \mathrm{crit}(\overline{I}_d)$ mit $u = \varphi_d(y)$, dann ist $u \neq 0$. Aus $T_u W_d = T_u Z_d \oplus T_u Y_{d,y}$ und $\mathrm{D}_{T_u Y_{d,y}} I_d(u) = 0$ folgt sogar $u \in \mathrm{crit}(I_d|_{W_d})$, nach (3.1) also $\mathrm{D}I_d(u) = 0$. Nun ist d so klein, daß auch $I_d(u) \leq m(\infty) - \varepsilon$ gilt, demnach also $u \in \overline{A}_{\varepsilon,d}$ ist. Insgesamt folgt

$$\overline{A}_{\varepsilon,d} = \mathrm{crit}(\overline{I}_d) .$$

Weil φ_d eine Einbettung ist liefert die Definition von λ_d und H_d

$$\mathrm{crit}(\overline{I}_d) = \varphi_d(\mathrm{crit}(I_d \circ \varphi_d)) = \varphi_d\left(\frac{1}{d}\,\mathrm{crit}(J_d \circ \lambda_d)\right) = \varphi_d\left(\frac{1}{d}\,\mathrm{crit}(H_d)\right) .$$

Daraus folgt schließlich

$$A_{\varepsilon,d} = \sigma_d^{-1}(\overline{A}_{\varepsilon,d}) = \sigma_d^{-1}\varphi_d\left(\frac{1}{d}\,\mathrm{crit}(H_d)\right) = \lambda_d(\mathrm{crit}(H_d)) \; ;$$

das ist Aussage a).

Die Qualitativen Aussagen über $u \in A_{\varepsilon,d}$ folgen aus Lemma 3.11. Die Asymptotische Abschätzung folgt aus $M(u) = d\,M_d(\sigma_d(u))$, $\lambda_d^{-1}(u) = d\beta_d(\sigma_d(u))$ und Aussage a).

4 Konstruktionen

Für alles Weitere benötigen wir nur noch die skalierten Größen. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels zeigen wir die Existenz der gleichmäßigen Tubenumgebungen X_{d,δ_0} von X_d. Der Name des zweiten Abschnittes rührt daher, daß die Konstruktion der Abbildungen φ_d, die wir dort zeigen, in jedem Punkt P von $\partial\Omega$ gewissermaßen eine Verbesserung der Näherungslösungen $\psi_d(P/d)$ beinhaltet. Außerdem bereiten wir im zweiten Abschnitt den Beweis der asymptotischen Abschätzungen von $I_d \circ \varphi_d$ vor, den wir dann im dritten Abschnitt angeben. Der vierte Abschnitt ist kurz und faßt im wesentlichen bekannte Ergebnisse über die qualitativen Eigenschaften von niederenergetischen Lösungen zusammen, in einer für uns geeigneten Form.

Wir führen zunächst einige Sprechweisen ein. Ist $P \in \partial\Omega$, dann wählen wir Koordinaten für $\mathbb{R}^N$ derart, daß P im Ursprung liegt, daß $T_P\partial\Omega = \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ gilt, daß die ersten $N-1$ Koordinatenrichtungen $z' = (z_1, \dots, z_{N-1})$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{N-1}$ bilden, und daß die N-te Koordinate z_N diese zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^N$ vervollständigt. Ferner soll z_N in Richtung des inneren Normalenvektors von $\partial\Omega$ in P zeigen. Es gibt dann $\rho_1 \geq \rho_2 > 0$ und eine C^4-Abbildung $\vartheta_P : B^{N-1}_{\rho_1}(0) \to \mathbb{R}$, so daß $\partial\Omega$ lokal der Graph von ϑ_P ist, genauer, so daß mit dieser Wahl des Koordinatensystems gilt:

$$\partial\Omega \cap (B^{N-1}_{\rho_1}(0) \times [-\rho_2, \rho_2]) = \{(z', \vartheta_P(z')) \mid z' \in B^{N-1}_{\rho_1}(0)\}$$

und $|\vartheta_P(0)| = |\mathrm{D}\vartheta_P(0)| = 0$. Wegen der Kompaktheit von $\partial\Omega$ können wir ρ_1, ρ_2 als unabhängig von P gewählt annehmen, und es gilt, daß $|\mathrm{D}^4\vartheta_P|$ auf $B^{N-1}_{\rho_1}(0)$ unabhängig von P beschränkt ist.

Wählen wir nun die Koordinatenrichtungen $(z_1, \dots, z_{N-1})$ noch als die Hauptnormalenrichtungen von $\partial\Omega$ in P, daß also diesbezüglich die bilineare Abbildung $\mathrm{D}^2\vartheta_P$ als Diagonalmatrix darstellbar ist, so sprechen wir von *P-Koordinaten für $\partial\Omega$*. Ist $d > 0$, $y \in \partial\Omega_d$ und $P = dy$, dann seien die *y-Koordinaten für $\partial\Omega_d$* gegeben durch die P-Koordinaten für $\partial\Omega$. In y-Koordinaten gilt, daß $\partial\Omega_d$ lokal der Graph von $\vartheta_{P,d}$ ist, wobei $\vartheta_{P,d}(z') = \frac{1}{d}\vartheta_P(dz')$ gesetzt sei. Ist P festgehalten, dann schreiben wir häufig auch ϑ_d anstatt $\vartheta_{P,d}$. Für alle asymptotischen Abschätzungen, die wir beweisen, gilt, daß sie von $P \in \partial\Omega$ unabhängig sind, auch wenn wir das nicht immer explizit erwähnen.

Wir zitieren zwei technische Hilfsmittel, die beginnend auf Seite 51 bewiesen werden. Sie begleiten uns in fast Allem, was folgt.

Zitat (Lemma 5.7). *Sei $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, und es gebe $C_1, C_2 > 0$ mit $|u(z)| \leq C_1 e^{-C_2|z|}$. Für $P \in \partial\Omega$ gilt dann in P-Koordinaten:*

$$\int_{\Omega_d} u(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^N_+} u(z)\,dz + O(d)$$

für $d \to 0$, unabhängig von P. Ist insbesondere u bzgl. P-Koordinaten ungerade in einer Koordinate z_i $(i = 1, \dots, N-1)$, dann folgt

$$\int_{\Omega_d} u(z)\,dz = O(d)\ .$$

Ist u wie oben und $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, dann gilt

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega_d)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} + O(\sqrt{d}\,)\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\ .$$

Zitat (Korollar 5.8). *In y_d-Koordinaten gilt für $i, j \in \{1, \dots, N-1\}$ mit $i \neq j$:*

$$\begin{aligned} \langle w, \partial_i w\rangle_{E_d} &= O(d) \\ \langle \partial_i w, \partial_j w\rangle_{E_d} &= O(d) \\ \|w\|^2_{E_d} &= \frac{1}{2}\|w\|^2_{E_\infty} + O(d) \\ \|\partial_i w\|^2_{E_d} &= \frac{1}{2}\|\partial_i w\|^2_{E_\infty} + O(d) \end{aligned}$$

Weiter verwenden wir Diffeomorphismen, die $\partial\Omega$ lokal begradigen, und zitieren dazu Lemma 4.3 aus [2].

4.1 Lemma. *Es gibt $\rho_0 > 0$, so daß für jedes $P \in \partial\Omega$ ein C^1-Diffeomorphismus Φ_P existiert, $\Phi_P : B_{\rho_0}(0) \to B_{\rho_0}(0)$, der bezüglich P-Koordinaten die folgenden Eigenschaften besitzt:*

$$\begin{aligned} \Phi_P(B^{N-1}_{\rho_0}(0) \times \{0\}) &= \partial\Omega \cap B_{\rho_0}(0) \\ \Phi_P(B_{\rho_0}(0) \cap \mathbb{R}^N_+) &= \Omega \cap B_{\rho_0}(0) \\ \mathrm{D}\Phi_P(0) &= \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N}\ . \end{aligned}$$

Außerdem erhält Φ_P Sphären, das heißt es gilt $|\Phi_P(z)| = |z|$. Wir setzen $\Psi_P = \Phi_P^{-1}$. Die Familie $\{\mathrm{D}\Phi_P\}_{P\in\partial\Omega}$ ist gleichstetig und beschränkt auf $B_{\rho_0}(0)$.

Stillschweigend verwenden wir in den Beweisen die folgende Tatsache: Ist U eine offene Menge eines Banachraumes, $k \geq 2$, g eine C^k-Abbildung von U in einen weiteren Banachraum, $x \in U$ und $\mathrm{D}g(x)$ ein Isomorphismus, dann liefert der Satz über die Umkehrfunktion eine Kugel $B_R(x) \subseteq U$, auf der g eine C^k-Inverse besitzt [20]. Dabei hängt der Radius R nur von oberen Schranken für $\|(\mathrm{D}g(x))^{-1}\|$ und $\|\mathrm{D}^2 g\|$ auf U ab (und von $\mathrm{dist}(x, \partial U)$). Weiterhin gibt es obere Schranken für $\|\mathrm{D}^k(g^{-1})\|$ auf $g(B_R(x))$, die nur von oberen Schranken für $\|(\mathrm{D}g(x))^{-1}\|$ und $\|\mathrm{D}^k g\|$ auf U abhängen. Eine ähnliche Aussage gilt auch für den Satz über implizite Funktionen.

4.2 Bemerkung. Ist X eine Mannigfaltigkeit, $g \in C^2(X)$ und $x \in X$ ein kritischer Punkt von g, dann genügt es, den Morse-Index von g in x bezüglich einer Karte von X zu untersuchen, da diese Größe invariant unter Kartentransformationen ist.

4.1 Die Tubenumgebungen von X_d

Nun zum Beweis von Lemma 3.8. Zunächst betrachten wir ψ_d als Abbildung von $\mathbb{R}^N$ in E_d. Wir haben

Zitat (Lemma 5.4). *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Dann ist die Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^N \to E_D$ mit $\psi(y)(z) = w(z-y)$ in C^3. Die Ableitungen sind gegeben durch*

$$D^\nu \psi(y) = (-1)^\nu D^\nu(\psi(y))$$

und beschränkt unabhängig von y und D.

Weil w radialsymmetrisch ist mit eindeutig bestimmtem Maximum, folgt außerdem, daß ψ_d injektiv ist.

Für $y \in \partial\Omega_d$ gilt in y-Koordinaten: $T_y\partial\Omega_d = \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$. Sei $h \in T_y\partial\Omega_d$ mit $|h| = 1$ gegeben. Dann existiert $k \le N-1$ mit $|h_k| = \max\{\,|h_i| \mid 1 \le i \le N\,\}$ und folglich $|h_k|^2 \ge 1/N$. Mit Korollar 5.8 folgt:

$$\text{(4.1)}\quad \|\mathrm{D}\psi_d(y)[h]\|^2_{E_d} = \Big\| \sum_1^{N-1} h_i \partial_i w \Big\|^2_{E_d} = \sum_1^{N-1} |h_i|^2 \|\partial_i w\|^2_{E_d} + o(1)$$
$$\ge \frac{1}{2N} \|\partial_k w\|^2_{E_\infty} + o(1) \ge C > 0$$

für $d \to 0$. Für kleine d ist demnach $\psi_d|_{\partial\Omega_d}$ eine injektive Immersion, also eine C^3-Einbettung (weil $\partial\Omega_d$ kompakt ist). Ferner ist $\|\mathrm{D}(\psi_d|_{\partial\Omega_d})^{-1}\|$ unabhängig von d und y beschränkt.

Als nächstes zeigen wir, daß für geeignetes $\delta_0 > 0$ die Menge X_{d,δ_0} für kleines d eine normale Tubenumgebung von X_d ist. Zu $d > 0$ und $u \in E_d$ betrachten wir die Abbildung $g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$ mit $g(y) = \frac{1}{2}\|u - \psi_d(y)\|^2_{E_d}$. Es gilt: $X_{d,\delta}$ ist genau dann eine normale Tubenumgebung von X_d, wenn für jedes $u \in X_{d,\delta}$ die Einschränkung der zugehörigen Abbildung g auf $\partial\Omega_d$ genau eine Minimalstelle besitzt, und wenn diese ein nichtausgearteter kritischer Punkt ist.

Seien $y \in \partial\Omega_d$, u und g wie oben. In y-Koordinaten erhalten wir aus der Darstellung von $\partial\Omega_d$ als Graph von ϑ_d eine Karte $\Phi\colon \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^N$ für $\partial\Omega_d$, mit $\Phi(z') = (z', \vartheta_d(z'))$ für z' nahe bei 0. Ferner gilt $\Phi(0) = y$, $\mathrm{D}\Phi(0)$ ist die identische Einbettung von $\mathbb{R}^{N-1}$ in $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ und $\mathrm{D}^2\Phi(0)$ ist für kleine d unabhängig von y beschränkt. Nun betrachten wir $\bar g = g \circ \Phi$. Für $h \in \mathbb{R}^{N-1}$ gilt dann wegen (4.1)

$$\text{(4.2)}\quad \mathrm{D}^2\bar g(0)[h,h] = \mathrm{D}^2 g(y)[h,h] + \mathrm{D}g(y)\mathrm{D}^2\Phi(0)[h,h]$$
$$= \|\mathrm{D}\psi_d(y)[h]\|^2 - \langle u - \psi_d(y), (\mathrm{D}^2\psi_d(y) + \mathrm{D}\psi_d(y)\mathrm{D}^2\Phi(0))[h,h]\rangle$$
$$\ge C_1(C_2 - \|u - \psi_d(y)\|)|h|^2$$

für kleine d, mit $C_1, C_2 > 0$ unabhängig von d, u und y. Wir wählen $R > 0$ so klein, daß für $d > 0$ aus $x, y \in \mathbb{R}^N$ mit $|x-y| \le R$ folgt: $\|\psi_d(x) - \psi_d(y)\| \le \frac{1}{4}C_2$. Das geht, weil $\|\mathrm{D}\psi_d(y)\|$ beschränkt ist.

Seien $d_n \to 0$, $x_n, y_n \in \partial\Omega_{d_n}$ mit $\|\psi_{d_n}(x_n) - \psi_{d_n}(y_n)\| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann bleibt $|x_n - y_n|$ beschränkt, weil w bei ∞ exponentiell abfällt und wegen Korollar 5.8. Wir können in x_n-Koordinaten daher annehmen, $y_n \to y \in \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$. Aus Lemma 5.7 folgt

$$\|w - w(\cdot - y)\|_{E_+}^2 = \|\psi_{d_n}(x_n) - \psi_{d_n}(y_n)\|_{E_{d_n}}^2 + o(1) = o(1) ,$$

also $y = 0$ bzw $|x_n - y_n| \to 0$. Demnach existiert $\varepsilon > 0$, so daß für kleine d gilt:

$$x, y \in \partial\Omega_d,\ \|\psi_d(x) - \psi_d(y)\| \leq \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |x - y| \leq R . \tag{4.3}$$

Wir setzen schließlich

$$\delta_0 = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{C_2}{4}\right\}$$

und behaupten, daß X_{d,δ_0} für kleine d eine normale Tubenumgebung von X_d ist.

Sei dazu d so klein, daß (4.2) und (4.3) gelten, und daß außerdem für jedes $y \in \partial\Omega_d$ die Menge $B_R(y) \cap \partial\Omega_d$ nur eine (Weg-)Zusammenhangskomponente hat. Ist dann $u \in X_{d,\delta_0}$ und g wie oben definiert, dann existiert $y \in \partial\Omega_d$ mit $\operatorname{dist}(u, X_d) = \|u - \psi_d(y)\| < \delta_0$, d.h. y ist Minimalstelle von g auf $\partial\Omega_d$. Aus $B_{\delta_0}(u) \subseteq B_\varepsilon(\psi_d(y))$ und (4.3) folgt $\{z \in \partial\Omega_d \mid g(z) \leq \frac{1}{2}\delta_0^2\} \subseteq B_R(y) \cap \partial\Omega_d$. Existierte mit $x \neq y$ eine weitere Minimalstelle von g auf $\partial\Omega_d$, dann wäre also $x \in B_R(y)$ und es gäbe einen Weg γ in $B_R(y) \cap \partial\Omega_d$ von y nach x. Wegen der Wahl von R folgte dann

$$\|u - \psi_d(\gamma(t))\| \leq \|u - \psi_d(y)\| + \|\psi_d(y) - \psi_d(\gamma(t))\| \leq \frac{1}{2}C_2 ,$$

d.h. γ läge ganz in $\{z \in \partial\Omega_d \mid g(z) \leq \frac{1}{8}C_2^2\}$. Nun ist aber nach Bemerkung 4.2 und (4.2) jeder kritische Punkt von $g|_{\partial\Omega_d}$ in dieser Menge nicht ausgeartet und ein striktes lokales Minimum. Es gäbe wegen der Existenz von y, x und γ daher einen kritischen Punkt vom Mountain-Pass Typ in dieser Menge. Widerspruch! Daher ist y eindeutiger Minimalpunkt.

Zu der nun konstruierten normalen Tubenumgebung X_{d,δ_0} gehört die C^2-Projektion $\Pi_d\colon X_{d,\delta_0} \to X_d$. Für $u \in X_{d,\delta_0}$ ist $\Pi_d(u)$ der eindeutig bestimmte Punkt in X_d mit $\operatorname{dist}(u, X_d) = \|\Pi_d(u) - u\|$.

Für spätere Rechnungen wollen wir noch eine spezielle Trivialisierung dieser normalen Tubenumgebung von X_d untersuchen und die Ableitung von Π_d näherungsweise bestimmen.

Wegen (4.1) und weil die mittlere Krümmung von $\partial\Omega_d$ beschränkt bleibt für kleine d und unabhängig von y, gibt es $\varepsilon > 0$, so daß für kleines d und für $u_0 \in X_d$ eine C^3-Abbildung $\vartheta\colon B_\varepsilon(0) \cap T_{u_0}X_d \to (T_{u_0}X_d)^\perp$ mit $\|\vartheta(0)\| = \|\mathrm{D}\vartheta(0)\| = 0$ existiert, so daß $X_d - u_0$ lokal der Graph von ϑ ist und so daß $\|\mathrm{D}^2\vartheta(0)\|$ sowie $\|\mathrm{D}^3\vartheta(0)\|$ unabhängig von d und u_0 beschränkt sind.

Für festes d und $u_0 \in X_d$ setzen wir $M = T_{u_0}X_d$ und identifizieren $E_d = M \times M^\perp$. Sei $\mathrm{D}\vartheta(u)^*\colon M^\perp \to M$ für $u \in M$ nahe bei 0 die zu $\mathrm{D}\vartheta(u)$ konjugierte Abbildung. Wir setzen

$$\begin{aligned}\Phi\colon M \times M^\perp &\to M \times M^\perp\\ (u,v) &\mapsto (u - \mathrm{D}\vartheta(u)^*[v], \vartheta(u)+v) + u_0\end{aligned}$$

für u nahe bei 0. Dann ist lokal $X_d = \Phi(M \times \{0\})$ und

$$\Phi(u,\cdot) - \Phi(u,0)\colon M^\perp \to \big(T_{\Phi(u,0)}X_d\big)^\perp$$

ist ein Isomorphismus. Insbesondere ist $\Phi(0,\cdot) - u_0 = \mathrm{Id}_{M^\perp}$. Weiter gilt

$$\mathrm{D}\Phi(0,v) = \begin{pmatrix}\mathrm{Id}_M - \mathrm{D}^2\vartheta(0)[\,\cdot\,]^*[v] & 0\\ 0 & \mathrm{Id}_{M^\perp}\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

also $\mathrm{D}\Phi(0) = \mathrm{Id}_{E_d}$. Demnach existiert $\varepsilon > 0$, so daß Φ auf $B_\varepsilon(0)$ invertierbar ist. Wir setzen $\Psi = \Phi^{-1}$. Dann gilt $\Psi(u_0) = 0$ und $\mathrm{D}\Psi(u_0) = \mathrm{Id}_{E_d}$. Es ist leicht zu sehen, daß $\varepsilon > 0$ unabhängig von d und u_0 so klein gewählt werden kann, daß auch gelten:

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(u_0) \subseteq \Phi(B_\varepsilon(0)) \quad \text{und} \quad B_{\frac{\varepsilon}{4}}(0) \subseteq \Psi(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(u_0))$$

und daß $\|\mathrm{D}^2\Phi\|$ auf $B_\varepsilon(0)$ sowie $\|\mathrm{D}^2\Psi\|$ auf $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(u_0)$ unabhängig von d und u_0 beschränkt sind.

Die oben definierten Familien Ψ_{d,u_0} für $u_0 \in X_d$ liefern also eine Trivialisierung von X_{d,δ_0}, wenn wir δ_0 klein genug wählen. In der Nähe von $u_0 \in X_d$ kommutiert dann

$$\begin{array}{ccc} X_{d,\delta_0} & \xrightarrow{\Psi_{d,u_0}} & M \times M^\perp\\ {\scriptstyle \Pi_d}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle P_M}\\ X_d & \xrightarrow[\Psi_{d,u_0}]{} & M \times \{0\}\end{array}$$

und insbesondere ist Π_d eine Submersion. Wegen (4.4) gilt für $v \in X_{d,\delta_0}$ und $u_0 = \Pi_d(v)$

$$\mathrm{D}\Psi_{d,u_0}(v) = \mathrm{D}\Phi_{d,u_0}(v-u_0)^{-1} = \begin{pmatrix}\mathrm{Id}_{T_{u_0}X_d} + O(\|v-u_0\|) & 0\\ 0 & \mathrm{Id}_{(T_{u_0}X_d)^\perp}\end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

also

$$\mathrm{D}\Pi_d(v) = \mathrm{D}\Phi_{d,u_0}(0)P_{T_{u_0}X_d}\mathrm{D}\Psi_{d,u_0}(v) = \begin{pmatrix}\mathrm{Id}_{T_{u_0}X_d} + O(\|v-u_0\|) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

bezüglich der Zerlegung $E_d = T_{u_0}X_d \times (T_{u_0}X_d)^\perp$. Hier ist der Term links oben in der Matrix ein Isomorphismus auf $T_{u_0}X_d$ weil $\mathrm{D}\Psi_{d,u_0}(v)$ ein Isomorphismus ist, und daher gilt auch

$$\ker \mathrm{D}\Pi_d(v) = (T_{u_0}X_d)^\perp\,. \tag{4.7}$$

Ist β_d wie in der Formulierung von Lemma 3.8 definiert, dann folgt schließlich $\beta_d = \psi_d^{-1} \circ \Pi_d \in C^2$ und β_d ist ebenfalls eine Submersion. Für $y \in \partial\Omega_d$ ist

$$\beta_d^{-1}(y) = \Pi_d^{-1}(\psi_d(y)) = \psi_d(y) + B_{\delta_0}(0) \cap (T_{\psi_d(y)}X_d)^\perp\,,$$

womit alle Aussagen dieses Lemmas bewiesen wären.

4.2 Gute Näherungslösungen am Rand

Bevor wir fortfahren, benötigen wir noch einen Begriff [10].

4.3 Definition. Seien X eine glatte Finsler-Mannigfaltigkeit, $g \in C^1(X)$ und $a \in \mathbb{R}$. Eine Folge $(x_n) \subseteq X$ heißt *lokale Palais-Smale-Folge von g auf dem Niveau a* (kurz $(\mathrm{PS})_a$-Folge für g), wenn $g(x_n) \to a$ und $\|\mathrm{D}g(x_n)\| \to 0$ gelten für $n \to \infty$. *g Erfüllt eine $(PS)_a$-Bedingung*, wenn jede $(\mathrm{PS})_a$-Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Den Beweis von Lemma 3.9 gliedern wir in Unterabschnitte, indem wir der Reihe nach zeigen: Für ε, d klein und $y \in \partial\Omega_d$ gelten

(A1) $W_d^{m(d)+\varepsilon} \subseteq X_{d,\delta_0}$

(A2) $\beta_d^{-1}(y) \pitchfork W_d^{m(d)+\varepsilon}$, d.h. $Y_{\varepsilon,d,y} = \beta_d^{-1}(y) \cap W_d^{m(d)+\varepsilon}$ ist eine C^2-Mannigfaltigkeit

(A3) I_d erfüllt $(\mathrm{PS})_a$ auf $Y_{\varepsilon,d,y}$ für $a < m(d) + \varepsilon$.

(A4) jeder kritische Punkt von $I_d|_{Y_{\varepsilon,d,y}}$ ist nicht ausgeartet und hat Morse-Index 0. Insbesondere ist jeder kritische Punkt ein striktes lokales Minimum.

Wir wählen $\varepsilon_1 > 0$ so klein, daß (A1)–(A4) mit $\varepsilon = \varepsilon_1$ für kleine d erfüllt sind. Wir zeigen weiter: Für kleine ε, d und $y \in \partial\Omega_d$ gilt:

(A5) zu $u, v \in Y_{\varepsilon,d,y}$ existiert ein Weg von u nach v in $Y_{\varepsilon_1,d,y}$.

Nun wählen wir $\varepsilon_0 \le \varepsilon_1$ so klein, daß (A5) für $\varepsilon = \varepsilon_0$ und kleine d erfüllt ist. Für kleine d gilt dann:

(A6) $\zeta_d(X_d) \subseteq W_d^{m(d)+\varepsilon_0}$ und zu jedem $u \in X_d$ existiert $v \in X_d$ mit $\Pi_d\zeta_d(v) = u$. Für diese Paare u und v gilt ferner $\|u - \zeta_d(v)\| = O(d)$, unabhängig von der Wahl von v.

Daraus gewinnen wir die Abbildung φ_d wie folgt: Sei d so klein, daß (A1)–(A4) bzgl. $\varepsilon = \varepsilon_1$, (A5) bzgl. $\varepsilon = \varepsilon_0$ und (A6) erfüllt sind. Wir setzen $Y_{d,y} = Y_{\varepsilon_0,d,y}$ für $y \in \partial\Omega_d$. Nach (A6) existiert $x \in \partial\Omega_d$ mit $\Pi_d\zeta_d\psi_d(x) = \psi_d(y)$, also $\zeta_d\psi_d(x) \in Y_{d,y}$. Damit ist $Y_{d,y}$ nichtleer. Weil I_d auf W_d nach unten beschränkt ist und wegen (A3) existiert ein Minimum $\varphi_d(y)$ von I_d auf $Y_{d,y}$. Gäbe es zwei kritische Punkte u, v der Einschränkung von I_d auf $Y_{d,y}$, dann wären sie nach (A4) strikte lokale Minima und nach (A5) durch einen Weg in $Y_{\varepsilon_1,d,y}$ miteinander verbunden. Wiederum mit (A3) folgte dann, daß es einen kritischen Punkt vom Mountain-Pass Typ der Einschränkung von I_d auf $Y_{\varepsilon_1,d,y}$ gäbe, im Widerspruch zu (A4). Das zeigt die Eindeutigkeit des Minimums $\varphi_d(y)$ als kritischer Punkt von $I_d|_{Y_{d,y}}$ und somit die Wohldefiniertheit von $\varphi_d(y)$.

Schließlich zeigen wir noch:

(A7) $\sup_{y\in\partial\Omega_d}\|\varphi_d(y) - \psi_d(y)\| = O(d)$ für $d \to 0$

(A8) φ_d ist eine C^1-Einbettung und es gelten folgende asymptotische Abschätzungen:

$$I_d(\varphi_d(y)) = I_d(\psi_d(y)) + O(d^2) \tag{4.8}$$

$$\mathrm{D}I_d(\varphi_d(y)) = o(d) \tag{4.9}$$

$$\mathrm{D}(I_d \circ \varphi_d)(y) = (1 + O(d))\mathrm{D}I_d(\varphi_d(y))\mathrm{D}\psi_d(y) \tag{4.10}$$

Beweis von (A1). Zunächst machen wir eine

4.4 Bemerkung. Gilt $\varepsilon_n \to 0$, $d_n \to 0$ und $u_n \in W_{d_n}^{m(d_n)+\varepsilon_n}$, dann folgt aus dem Beweis von Proposition 3.5 in [2]: $\|\mathrm{D}I_{d_n}(u_n)\| = o(1)$ und es existieren $y_n \in \partial\Omega_{d_n}$ mit $\|\psi_{d_n}(y_n) - u_n\| = o(1)$. Daraus folgt auch $\operatorname{dist}(u_n, X_{d_n}) = \|u_n - \Pi_{d_n}(u_n)\| = o(1)$.

Dies liefert sofort (A1).

Beweis von (A2). Seien $\varepsilon_n \to 0$, $d_n \to 0$, $y_n \in \partial\Omega_{d_n}$ und $u_n \in \beta_{d_n}^{-1}(y_n) \cap W_{d_n}^{m(d_n)+\varepsilon_n}$. Dann ist für jedes n die Menge $\beta_{d_n}^{-1}(y_n) \cap W_{d_n}$ das Urbild von $(y_n, 0)$ unter der Abbildung

$$\begin{aligned} \Gamma_n \colon X_{d_n,\delta_0} &\to \partial\Omega_{d_n} \times \mathbb{R} \\ v &\mapsto (\beta_{d_n}(v), L_{d_n}(v)) \ . \end{aligned}$$

Bezüglich der y_n-Koordinaten ist $M_n = T_{\Pi_{d_n}(u_n)}X_{d_n} = [\partial_1 w, \dots, \partial_{N-1} w]$ und es sei $F_n = M_n \oplus [\nabla L_{d_n}(u_n)]$. Wegen $\|u_n - w\| = \|u_n - \Pi_{d_n}(u_n)\| = o(1)$, weil w radialsymmetrisch und $\partial_i w$ ungerade in z_i-Richtung ist, folgt mit Lemma 5.7

$$\langle \partial_i w, \nabla L_{d_n}(u_n)\rangle = \mathrm{D}L_{d_n}(w)[\partial_i w] + o(1) = o(1) \ .$$

Aus (4.6) folgt weiter $\mathrm{D}\Pi_{d_n}(u_n) = P_{M_n} + o(1)$ und demnach

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\beta_{d_n}(u_n)[\partial_i w] &= e_i + o(1) \\ \mathrm{D}\beta_{d_n}(u_n)[\nabla L_{d_n}(u_n)] &= o(1) \\ \mathrm{D}L_{d_n}(u_n)[\partial_i w] &= o(1) \\ \mathrm{D}L_{d_n}(u_n)[\nabla L_{d_n}(u_n)] &= \|\nabla L_{d_n}(u_n)\|^2 \geq C > 0 \end{aligned}$$

für $n \to \infty$ (die letzte Ungleichung folgt aus Lemma 3.6). Wegen $\ker \mathrm{D}\Pi_{d_n}(u_n) = M_n^\perp$ folgt außerdem $\ker \mathrm{D}\Gamma_n(u_n) = F_n^\perp$. Daraus ergibt sich: $\mathrm{D}_{F_n}\Gamma_n(u_n)$ ist für große n invertierbar mit $\|\mathrm{D}_{F_n}\Gamma_n(u_n)^{-1}\| \leq C$. Da außerdem die zweiten Ableitungen von Γ_n auf X_{d,δ_0} gleichmäßig beschränkt bleiben und für kleine ε und d gilt $W_d^{m(d)+\varepsilon} \subseteq X_{d,\delta_0/2}$, erhalten wir: Es existieren $r_1 \geq r_2 > 0$, so daß für ε, d klein, $y \in \partial\Omega_d$, $u \in \beta_d^{-1}(y) \cap W_d^{m(d)+\varepsilon}$, $F = [\partial_1 w, \dots, \partial_{N-1} w, \nabla L_d(u)]$ bzgl. y-Koordinaten gilt: $(\beta_d^{-1}(y) \cap W_d) - u$ ist lokal der Graph einer C^2-Abbildung $\vartheta \colon B_{r_1}(0) \cap F^\perp \to F$, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} &((B_{r_1}(0) \cap F^\perp) \times (B_{r_2}(0) \cap F)) \cap ((\beta_d^{-1}(y) \cap W_d) - u) \\ &\qquad = \{ (v, \vartheta(v)) \mid v \in B_{r_1}(0) \cap F^\perp \} \ . \end{aligned}$$

Ferner ist $T_u Y_{\varepsilon,d,y} = F^\perp$, $\|\vartheta(0)\| = \|\mathrm{D}\vartheta(0)\| = 0$ und $\|\mathrm{D}^2\vartheta\|$ auf $B_{r_1}(0) \cap F^\perp$ gleichmäßig beschränkt. Insbesondere folgt (A2).

Wir betrachten außerdem die Abbildung $\Phi\colon B_{r_1}(0) \cap F^\perp \to F^\perp \times F$ mit $\Phi(v) = (v, \vartheta(v)) + u$, eine Karte für $\beta_d^{-1}(y) \cap W_d$. Es ist $\Phi(0) = u$, $\mathrm{D}\Phi(0)$ ist die kanonische Einbettung $F^\perp \to F^\perp \times F$ und $\mathrm{D}^2\Phi$ ist beschränkt unabhängig von d und u. Für $\overline{I} = I_d \circ \Phi$ und $v \in F^\perp$ gilt dann

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2\overline{I}(0)[v,v] &= \mathrm{D}^2 I_d(u)[\mathrm{D}\Phi(0)v, \mathrm{D}\Phi(0)v] + \mathrm{D}I_d(u)\mathrm{D}^2\Phi(0)[v,v] \\ &= \mathrm{D}^2 I_d(u)[v,v] + O(\|\mathrm{D}I_d(u)\|)\|v\|^2 \,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Beweis von (A3). Nach Lemma 3.3 existiert $C_1 > 0$, so daß für $d > 0$ und $u \in W_d^{m(\infty)}$ gilt: $\|u\| \le C_1$.

Für $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa < \frac{1}{2}$ setzen wir

$$G_\kappa(t) = \frac{1}{1+2\kappa}(F(t) + \kappa t f(t)) \,,$$

$g_\kappa = G_\kappa'$ und betrachten die Funktionale $\Gamma_{\kappa,D}\colon E_D \to \mathbb{R}$ mit

$$\Gamma_{\kappa,D}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{E_D}^2 - \int_D G_\kappa(u)\,dz = \frac{1}{1+2\kappa}(I_D(u) + \kappa L_D(u)) \,.$$

Ist $d_n \to 0$, $\kappa_n \to 0$, $u_n \in E_{d_n}$ mit $\|u_n\| \le 2C_1$ und $\|\mathrm{D}\Gamma_{\kappa_n,d_n}(u_n)\| \to 0$, dann untersuchen wir zwei Fälle:

(i) $u_n \to 0$ für eine Teilfolge. Dann gilt $I_{d_n}(u_n) = o(1)$ für diese Teilfolge.

(ii) Es gibt $C > 0$ mit $\|u_n\| \ge C$. Wegen $\|u_n\| \le 2C_1$ folgt

$$\begin{aligned} L_{d_n}(u_n) &= \mathrm{D}I_{d_n}(u_n)[u_n] \\ &= \big((1+2\kappa)\mathrm{D}\Gamma_{\kappa_n,d_n}(u_n) - \kappa_n \mathrm{D}L_{d_n}(u_n)\big)[u_n] = o(1) \end{aligned} \tag{4.12}$$

und mit Lemma 3.7 daher $\|u_n - \zeta_{d_n}(u_n)\| = o(1)$. Das liefert

$$I_{d_n}(u_n) = I_{d_n}(\zeta_{d_n}(u_n)) + o(1) \ge m(d_n) + o(1) = m(+) + o(1) \,. \tag{4.13}$$

Insgesamt folgt: $\liminf_{n\to\infty} I_{d_n}(u_n) \ge 0$.

Ist $\kappa_n \to 0$, $u_n \in E_\infty \setminus \{0\}$ mit $\|u_n\| \le 2C_1$ und $\mathrm{D}\Gamma_{\kappa_n,\infty}(u_n)[u_n] = 0$, dann folgt

$$\|u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} g_{\kappa_n}(u_n)u_n\,dz \le C(\|u_n\|^{p_1} + \|u_n\|^{p_2})$$

mit $C > 0$ unabhängig von κ_n. Daher bleibt $\|u_n\|$ von 0 weg beschränkt. Wie oben bei (4.12) folgt $L_\infty(u_n) = o(1)$. Mit derselben Argumentation wie im Beweis von Lemma 3.7 (siehe Lemma 3.9 in [2]) folgt $\|u_n - \zeta_\infty(u_n)\| = o(1)$, und daher wie in (4.13)

$\liminf_{n\to\infty} I_\infty(u_n) \ge m(\infty)$. Wir können also $\kappa_0, C_2, C_3 > 0$ so wählen, daß gelten:

(4.14) $\forall |\kappa| \le \kappa_0 \quad \forall u \in E_\infty \setminus \{0\}$:

$$\Big[\|u\| \le 2C_1 \text{ und } \mathrm{D}\Gamma_{\kappa,\infty}(u) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \|u\| \ge C_2 \text{ und } I_\infty(u) \ge \frac{7}{8} m(\infty)\Big]$$

und für kleine d

(4.15) $\forall |\kappa| \le \kappa_0 \quad \forall u \in E_d$:

$$\Big[\|u\| \le 2C_1 \text{ und } \|\mathrm{D}\Gamma_{\kappa,d}(u)\| \le C_3 \quad \Longrightarrow \quad I_d(u) \ge -\frac{1}{8} m(\infty)\Big] .$$

Ist $\varepsilon_n \to 0$, $d_n \to 0$, $y_n \in \partial\Omega_{d_n}$, $u_n \in Y_{\varepsilon_n,d_n,y_n}$, dann gilt $\|u_n - \psi_{d_n}(y_n)\| = o(1)$. In y_n-Koordinaten ist $M_n = T_{\psi_{d_n}(y_n)} X_{d_n} = [\partial_1 w, \dots, \partial_{N-1} w]$ und nach Lemma 5.7 folgt für die Orthogonalprojektionen P_{M_n} auf M_n: $\|P_{M_n} \nabla I_{d_n}(u_n)\| = o(1)$ und $\|P_{M_n} \nabla L_{d_n}(u_n)\| = o(1)$. Für kleine ε und d, $y \in \partial\Omega_d$, $u \in Y_{\varepsilon,d,y}$ und $M = T_{\psi_d(y)} X_d$ gilt wegen Lemma 3.6 also:

$$\|P_M \nabla I_d(u)\| + \|P_M \nabla L_d(u)\| \le \frac{C_3}{3} \tag{4.16}$$

und

$$\left| \frac{\langle P_M \nabla I_d(u), u\rangle}{\langle (\mathrm{Id} - P_M)\nabla L_d(u), u\rangle} \right| \le \min\{\kappa_0, 1/3\} . \tag{4.17}$$

Seien nun ε und d so klein, daß $m(d) + \varepsilon \le \frac{5}{8} m(\infty)$ gilt und daß (A1), (A2), (4.15), (4.16) und (4.17) erfüllt sind. Seien $y \in \partial\Omega_d$, $a < m(d) + \varepsilon$ und $(u_n) \subseteq Y_{\varepsilon,d,y}$ eine $(\mathrm{PS})_a$-Folge für die Einschränkung von I_d auf $Y_{\varepsilon,d,y}$. Sei $M = T_{\psi_d(y)} X_d$ und P_M die Orthogonalprojektion auf M. Dann existiert eine Folge $(\kappa_n) \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$(\mathrm{Id} - P_M)\nabla I_d(u_n) + \kappa_n (\mathrm{Id} - P_M)\nabla L_d(u_n) = o(1) .$$

Wegen $\langle \nabla I_d(u_n), u_n\rangle = L_d(u_n) = 0$ und (4.17) können wir annehmen, daß $\kappa_n \to \kappa$ mit $|\kappa| \le \min\{\kappa_0, 1/3\}$. Daraus folgt

$$(\mathrm{Id} - P_M)\nabla \Gamma_{\kappa,d}(u_n) = o(1) .$$

Ferner ist

$$\|P_M \nabla \Gamma_{\kappa,d}(u_n)\| \le \frac{1}{1 - 2|\kappa|}\big(\|P_M \nabla I_d(u_n)\| + \|P_M \nabla L_d(u_n)\|\big) \le C_3$$

wegen (4.16). Da P_M endlichdimensional ist, können wir annehmen, daß $\bar{w} \in M$ existiert mit $P_M \nabla \Gamma_{\kappa,d}(u_n) = \bar{w} + o(1)$. Weiter gilt dann $\|\bar{w}\| \le C_3$ und $\bar{w}$ ist exponentiell abfallend bei ∞ (denn in y-Koordinaten ist $M = [\partial_1 w, \dots, \partial_{N-1} w]$). Wir haben also

$$\nabla \Gamma_{\kappa,d}(u_n) - \bar{w} = o(1) .$$

Ähnlich wie im Beweis von Proposition 2.12 in [2] ist leicht zu sehen, daß für eine Teilfolge von (u_n) gilt: Es gibt $k \in \mathbb{N}_0$, $v_0 \in E_d$, $w_i \in E_\infty \setminus \{0\}$, Folgen $(y_n^i) \subseteq \mathbb{R}^N$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ mit:

$$\begin{aligned} |y_n^i| &\to \infty \\ \nabla\Gamma_{\kappa,d}(v_0) &= \bar{w} \\ \nabla\Gamma_{\kappa,\infty}(w_i) &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|u_n - v_0 - \sum_{i=1}^{k} w_i(\cdot - y_n^i)\|_{E_d} &= o(1) \\ \|u_n\|_{E_d}^2 - \|v_0\|_{E_d}^2 - \sum_{i=1}^{k} \|w_i\|_{E_\infty}^2 &= o(1) \\ I_d(u_n) - I_d(v_0) - \sum_{i=1}^{k} I_\infty(w_i) &= o(1)\ . \end{aligned}$$

Die Folge kann nur in endlich viele Anteile w_i zerfallen, da nach (4.14) $\|w_i\| \geq C_2$ gilt, aber $\|u_n\| \leq C_1$ bleibt. Wegen $\|v_0\|, \|w_i\| \leq 2C_1$, $\|\nabla\Gamma_{\kappa,d}(v_0)\| \leq C_3$ und $I_d(u_n) \leq \frac{5}{8}m(\infty)$ folgt aus (4.14) und (4.15): $k = 0$ und somit $u_n \to v_0$ in E_d. Weiter folgt aus $L_d(u_n) = 0$, $I_d(u_n) \to a$ und $\beta_d(u_n) = y$: $L_d(v_0) = 0$, $I_d(v_0) = a < m(d) + \varepsilon$ und $\beta_d(v_0) = y$, d.h. $v_0 \in Y_{\varepsilon,d,y}$. Jede solche $(\mathrm{PS})_a$-Folge u_n besitzt also eine konvergente Teilfolge in $Y_{\varepsilon,d,y}$.

Beweis von (A4). Sei D_n eine Folge von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^N$, $u_n \in E_{D_n} \setminus \{0\}$ und $y_n \in \mathbb{R}^N$. Wir nennen (u_n) *konzentriert in den Punkten y_n bezüglich der E_{D_n}-Norm*, wenn die Folge der Wahrscheinlichkeitsmaße

$$\mu_n(A) = \frac{1}{\|u_n\|_{E_{D_n}}^2} \int_{A\cap D_n} (|\nabla u_n|^2 + u_n^2)\, dz$$

in folgendem Sinne konzentriert ist: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $R_0 > 0$, so daß für $R \geq R_0$ und große n gilt:

$$\mu_n(\mathbb{R}^N \setminus B_R(y_n)) \leq \varepsilon\ .$$

Seien $\varepsilon_n \to 0$, $d_n \to 0$, $y_n \in \partial\Omega_{d_n}$, $u_n \in Y_{\varepsilon_n,d_n,y_n}$, $v_n \in T_{u_n}Y_{\varepsilon_n,d_n,y_n}$ mit $\|v_n\| = 1$. In y_n-Koordinaten gilt:

$$T_{u_n}Y_{\varepsilon_n,d_n,y_n} = [\partial_1 w, \ldots, \partial_{N-1} w, \nabla L_{d_n}(u_n)]^\perp \tag{4.18}$$

und $\|u_n - w\| = o(1)$. Wir definieren auf $\mathbb{R}^N$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ_n durch

$$\mu_n(A) = \int_{A\cap\Omega_{d_n}} (|\nabla v_n|^2 + v_n^2)\, dz$$

und verwenden

Zitat (Lemma 5.16). *Sei* (μ_n) *eine Folge von beschränkten positiven Maßen auf* $\mathbb{R}^N$, (r_n) *eine Folge in* $\mathbb{R}^+$ *mit* $r_n \to \infty$. *Dann existiert für eine Teilfolge eine Folge* $R_n \to \infty$ *mit* $R_n \le r_n$, *so daß gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R > 0, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_0 : \mu_n(B_{R_n}(0) \setminus B_R(0)) \le \varepsilon \ .$$

Demnach existiert eine Folge $R_n \to \infty$, $2R_n \le \rho_0/d_n$ (mit ρ_0 aus Lemma 4.1), so daß für eine Teilfolge von (μ_n) gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R > 0, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_0 \colon \mu_n(B_{4R_n}(0) \setminus B_R(0)) \le \varepsilon \ . \tag{4.19}$$

Insbesondere gilt

$$\mu_n(B_{4R_n}(0) \setminus B_{R_n}(0)) = o(1) \ . \tag{4.20}$$

Wir definieren eine Abschneidefunktion wie folgt: $\eta \colon \mathbb{R}_0^+ \to [0, 1]$ sei gegeben durch

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 2 - t & 1 \le t \le 2 \\ 0 & 2 \le t \end{cases}$$

und für $R > 0$ setzen wir $\eta_R(t) = \eta(t/R)$. Es seien $v_{1,n}(z) = \eta_{R_n}(|z|)v_n(z)$, $v_{2,n}(z) = (1 - \eta_{2R_n}(|z|))v_n(z)$. Dann ist $\operatorname{supp} v_{1,n} \cap \operatorname{supp} v_{2,n}$ eine (Lebesguesche) Nullmenge, und (4.20) liefert $\|v_n - v_{1,n} - v_{2,n}\| = o(1)$. Aus (4.18) folgt $\langle v_n, \partial_i w\rangle = 0$, $\langle v_n, \nabla L_{d_n}(w)\rangle = o(1)$, und da w und $\partial_i w$ bei ∞ exponentiell abfallen, haben wir $\langle v_{2,n}, \partial_i w\rangle = o(1)$ und $\langle v_{2,n}, \nabla L_{d_n}(w)\rangle = o(1)$. Daraus folgt

$$\langle v_{1,n}, \partial_i w\rangle = o(1) \quad \text{und} \quad \langle v_{1,n}, \nabla L_{d_n}(w)\rangle = o(1) \tag{4.21}$$

für $i = 1, \dots, N-1$.

Wir wählen erneut eine Teilfolge aus, so daß einer der folgenden zwei Fälle eintritt:

1. Fall: $\|v_{1,n}\| = o(1)$, d.h. $\mu_n(B_{R_n}(0)) = o(1)$. Dann folgt aus dem exponentiellen Abfall von w bei ∞

$$\mathrm{D}^2 I_{d_n}(w)[v_n, v_n] = \|v_n\|^2 + o(1) = 1 + o(1) \ .$$

2. Fall: $\|v_{1,n}\| \ge C > 0$. Mit den lokalen Diffeomorphismen Φ_P aus Lemma 4.1 setzen wir $\overline{\Phi}_n(z) = \frac{1}{d_n}\Phi_{d_n y_n}(d_n z)$ für $z \in B_{\rho_0/d_n}(0)$. Weiter definieren wir (in y_n-Koordinaten nach wie vor)

$$w_n(z) = \begin{cases} v_{1,n}(\overline{\Phi}_n(z)) & z_N \ge 0, |z| \le 2R_n \\ v_{1,n}(\overline{\Phi}_n(z', -z_N)) & z_N < 0, |z| \le 2R_n \\ 0 & |z| \ge 2R_n \end{cases} .$$

Dann gilt $w_n \in E_\infty$, $\|w_n\| \geq C > 0$, und wegen $\overline{\Phi}_n \to \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N}$ in C^1_{loc} und dem exponentiellen Abfall von w und $\partial_i w$ folgt aus (4.21)

$$\langle w_n, \partial_i w\rangle = o(1) \quad \text{und} \quad \langle w_n, \nabla L_\infty(w)\rangle = o(1)$$

für $i = 1, \dots, N$. Aus (4.19) folgt, daß $v_{1,n}$ und somit auch w_n bei 0 konzentriert sind in der E_{d_n}- bzw. E_∞-Norm. Daher gilt

$$\|v_{1,n}\|^2 = \frac{1}{2}\|w_n\|^2 + o(1) \ .$$

weiter folgt auch

$$\int_{\Omega_{d_n}} f'(w) v_{1,n}^2 \, dz = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f'(w) w_n^2 \, dz + o(1)$$

und wie im 1. Fall gilt

$$\mathrm{D}^2 I_{d_n}(w)[v_{2,n}, v_{2,n}] = \|v_{2,n}\|^2 + o(1) \ .$$

Es gilt

Zitat (Lemma 5.12). *Es gibt $C > 0$, so daß für jedes $v \in E_\infty$ mit*

$$v \in [\partial_1 w, \dots, \partial_N w, \nabla L_\infty(w)]^\perp$$

gilt: $\mathrm{D}^2 I_\infty(w)[v,v] \geq C\|v\|^2_{E_\infty}$.

Aus diesen Beziehungen von $v_{1,n}$, $v_{2,n}$ und w_n folgt also

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^2 I_{d_n}(w)[v_n, v_n] &= \mathrm{D}^2 I_{d_n}(w)[v_{1,n}, v_{1,n}] + \mathrm{D}^2 I_{d_n}(w)[v_{2,n}, v_{2,n}] + o(1) \\
&\geq \frac{1}{2}\mathrm{D}^2 I_\infty(w)[w_n, w_n] + o(1) \\
&\geq C + o(1)
\end{aligned}$$

mit $C > 0$.

In beiden Fällen folgt also mit Lemma 5.5

$$\mathrm{D}^2 I_{d_n}(u_n)[v_n, v_n] = \mathrm{D}^2 I_{d_n}(w)[v_n, v_n] + o(1) \geq C + o(1)$$

für eine Teilfolge.

Damit haben wir bewiesen: Es existiert $C > 0$, so daß für kleine ε und d, für $y \in \partial\Omega_d$, $u \in Y_{\varepsilon,d,y}$ und $v \in T_u Y_{\varepsilon,d,y}$ gilt:

$$\mathrm{D}^2 I_d(u)[v,v] \geq C\|v\|^2 \ . \tag{4.22}$$

Wegen Bemerkung 4.2, Bemerkung 4.4 und (4.11) folgt daraus für kleine ε und d auch (A4).

Beweis von (A5). Seien wieder $\varepsilon_n \to 0$, $d_n \to 0$, $y_n \in \partial\Omega_{d_n}$ und $u_n, v_n \in Y_{\varepsilon_n,d_n,y_n}$. Aus $\psi_{d_n}(y_n) = \Pi_{d_n}(u_n) = \Pi_{d_n}(v_n)$ und Bemerkung 4.4 folgt dann $\|u_n - v_n\| = o(1)$, also $\|u_n - v_n\| \le r_2$ (mit r_2 aus dem Beweis von (A2)) für große n. Nach dem Beweis von (A2) ist $(\beta_{d_n}^{-1}(y_n) \cap W_{d_n}) - u_n$ lokal der Graph eines $\vartheta_n\colon B_{r_1}(0) \cap F_n^\perp \to F_n$ mit $F_n = (T_{u_n} Y_{\varepsilon_n,d_n,y_n})^\perp$. Es gibt daher $w_n \in F_n^\perp$ mit $v_n - u_n = (w_n, \vartheta_n(w_n))$ und

$$\|w_n\|^2 \le \|w_n\|^2 + \|\vartheta_n(w_n)\|^2 = \|v_n - u_n\|^2 = o(1) \ .$$

Wir setzen $\gamma_n(t) = u_n + (tw_n, \vartheta_n(tw_n))$ für $t \in [0,1]$. Dann ist γ_n ein Weg von u_n nach v_n in $\beta_{d_n}^{-1}(y_n) \cap W_{d_n}$. Da $\|\vartheta_n(0)\| = \|\mathrm{D}\vartheta_n(0)\| = 0$ gilt und $\|\mathrm{D}^2\vartheta_n\|$ beschränkt bleibt, folgt aus $\dot\gamma_n(t) = (w_n, \mathrm{D}\vartheta_n(tw_n)[w_n])$

$$\|\dot\gamma_n(t)\|^2 \le \|w_n\|^2(1 + C\|w_n\|^2) \le C\|u_n - v_n\|^2 \ .$$

Daher ist

$$|I_{d_n}(\gamma_n(t)) - I_{d_n}(u_n)| \le \int_0^t \|\mathrm{D}I_{d_n}(\gamma_n(s))\| \|\dot\gamma_n(s)\|\, ds \le C\|u_n - v_n\|$$

und wegen $I_{d_n}(u_n) = m(d_n) + o(1)$ also auch $\max_{t\in[0,1]} I_{d_n}(\gamma_n(t)) < m(d_n) + \varepsilon_1$ für große n. Damit ist (A5) bewiesen.

Beweis von (A6). Nach Lemma 5.7 gilt für $y \in \partial\Omega_d$

$$L_d(\psi_d(y)) = L_+(w) + O(d) = O(d)$$
$$I_d(\psi_d(y)) = I_+(w) + O(d) = m(+) + O(d) \ .$$

Lemma 3.7 liefert

$$|1 - \xi_d(\psi_d(y))| = O(d) \quad \text{und} \quad \|\psi_d(y) - \zeta_d(\psi_d(y))\| = O(d) \ . \tag{4.23}$$

Insgesamt folgt also

$$I_d(\zeta_d\psi_d(y)) = m(+) + O(d) = m(d) + o(1)$$

für $d \to 0$ und damit die erste Behauptung.

Für kleine d betrachten wir die Abbildungen $g_d\colon X_d \to X_d$, $g_d = \Pi_d \circ \zeta_d$. Wegen (4.23) ist für $u \in X_d$

$$\|g_d(u) - u\| = \|\Pi_d(u + O(d)) - u\| = O(d) \tag{4.24}$$

denn $\|\mathrm{D}\Pi_d\|$ ist auf X_{d,δ_0} beschränkt. Für kleine d und $t \in [0,1]$ liegt daher das Bild von X_d unter der Abbildung $(1-t)g_d + t\mathrm{Id}$ in X_{d,δ_0} und $u \mapsto \Pi_d((1-t)g_d(u) + tu)$ ist eine Homotopie von g_d nach Id_{X_d}. Weil $\partial\Omega_d$ glatt und kompakt ist, gibt es nur endlich viele Zusammenhangskomponenten, und dasselbe gilt auch für X_d. Auf jeder dieser Komponenten hat g_d den Abbildungsgrad 1, ist also surjektiv. Zu jedem $u \in X_d$ gibt es $v \in X_d$ mit $g_d(v) = u$, und aus (4.23) und (4.24) folgt

$$\|u - \zeta_d(v)\| = \|g_d(v) - v\| + O(d) = O(d) \ .$$

Der Beweis von (A6) ist damit vollständig.

Für das Weitere benötigen wir folgendes Ergebnis:

Zitat (Lemma 5.14). *Sei $P \in \partial\Omega$. Dann existiert zu einer Wahl von P-Koordinaten $U_P \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N) \cap E_\infty$, so daß in diesen P-Koordinaten gilt*

$$\nabla I_d(w) = -dU_P + o(d)$$

in der E_d-Norm für $d \to 0$, unabhängig von P. Ferner gilt $\|U_P\|_{C^{2,1}(B_1(z))} \le C_1 e^{-C_2|z|}$ mit $C_1, C_2 > 0$ unabhängig von P wählbar, und U_P ist gerade bezüglich der Hauptnormalenrichtungen von $\partial\Omega$ in P.

Es gilt auch

$$\mathrm{D}^2 I_d(w)[\partial_i w] = O(d)$$

in der E_d-Norm für $d \to 0$.

Insbesondere ist also $\|\mathrm{D}I_d(\psi_d(y))\| = O(d)$ unabhängig von $y \in \partial\Omega_d$, und mit Lemma 5.7 folgt auch in y-Koordinaten

$$\mathrm{D}I_d(w)[\partial_i w] = o(d)\ . \tag{4.25}$$

Beweis von (A7). Seien d klein, $y \in \partial\Omega_d$ und $u = \varphi_d(y)$. Nach (A6) existiert $x \in \partial\Omega_d$ mit $v = \zeta_d(\psi_d(x)) \in Y_{d,y}$ und $\|v - \psi_d(y)\| = O(d)$. Wegen $I_d(v) = I_d(\psi_d(y)) + O(d) = m(+) + O(d) = m(d) + o(1)$ und $I_d(u) \le I_d(v)$ folgt $I_d(u) = m(d) + o(1)$, zusammen mit Bemerkung 4.4 außerdem $\|u - \psi_d(y)\| = o(1)$ und daher

$$\|u - v\| = o(1)\ . \tag{4.26}$$

Wir können annehmen, daß $\|u - v\| \le r_2$ gilt (siehe den Beweis von (A2)). Wiederum sei $F = (T_u Y_{d,y})^\perp$ und ϑ wie dort gegeben. Es gibt $v_1 \in F^\perp$ mit $v = u + (v_1, \vartheta(v_1))$. Wir betrachten den Weg $\gamma(t) = u + (tv_1, \vartheta(tv_1))$ in $Y_{d,y}$ von u nach v mit $\dot\gamma(t) = (v_1, \mathrm{D}\vartheta(tv_1)[v_1])$. Aus (4.26) und der Beschränktheit von $\|\mathrm{D}^2\vartheta\|$ folgt (mit verschieden konstanten $C > 0$)

$$\|v-u\|^2 = \|v_1\|^2 + \|\vartheta(v_1)\|^2 \le C\|v_1\|^2 \le C\|\dot\gamma(t)\|^2 \le C\|v_1\|^2 \le C\|v-u\|^2 \tag{4.27}$$

und

$$\|\dot\gamma(t) - \dot\gamma(0)\| = \|\mathrm{D}\vartheta(tv_1)[v_1]\| \le C\|v_1\|^2 \le C\|v-u\|^2 \tag{4.28}$$

für kleine d.

Sei $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(t) = \mathrm{D}I_d(\gamma(t))[\dot\gamma(0)]$. Dann folgt $g(0) = 0$, da u kritischer Punkt von $I_d|_{Y_{d,y}}$ ist und $\dot\gamma(0) \in T_u Y_{d,y}$. Weiter haben wir mit (4.27), (4.28),(4.22) und (4.26)

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \mathrm{D}^2 I_d(\gamma(t))[\dot\gamma(0), \dot\gamma(t)] \\
&= \mathrm{D}^2 I_d(\gamma(t))[\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)] + \mathrm{D}^2 I_d(\gamma(t))[\dot\gamma(t), \dot\gamma(0) - \dot\gamma(t)] \\
&\ge C_1\|\dot\gamma(t)\|^2 - C_2\|\dot\gamma(t)\|\|\dot\gamma(t) - \dot\gamma(0)\| \\
&\ge C\|v-u\|^2
\end{aligned}$$

für kleine d, mit $C > 0$. Das liefert

$$C\|v-u\|^2 \le \int_0^1 g'(t)\,dt = g(1)-g(0) = \mathrm{D}I_d(v)[\dot\gamma(0)] \le \|\mathrm{D}I_d(v)\|\,\|v-u\| \ .$$

Wegen $\|v-\psi_d(y)\| = O(d)$ und Lemma 5.14 gilt auch $\|\mathrm{D}I_d(v)\| = O(d)$, aus obiger Ungleichung folgt also $\|v-u\| = O(d)$ und $\|u-\psi_d(y)\| = O(d)$ für $d \to 0$, die Behauptung. Des weiteren folgt auch

$$\mathrm{D}I_d(u) = \mathrm{D}I_d(v) + O(d) = O(d) \ . \tag{4.29}$$

Beweis von (A8). Seien $d > 0$, $y \in \partial\Omega_d$ und $u_0 = \varphi_d(y)$. In y-Koordinaten ist dann $\psi_d(y) = w$ und $T_{u_0}Y_{d,y} = [\partial_1 w, \dots, \partial_{N-1}w, \nabla L_d(u_0)]^\perp$. Wir haben

$$\begin{aligned} I_d(u_0) &= I_d(w) + \mathrm{D}I_d(w)[u_0-w] + O(\|u_0-w\|)^2 \\ &= I_d(w) + O(d^2) \end{aligned}$$

wegen Lemma 5.14 und (A7). Damit ist (4.8) gezeigt. Wiederum mit Lemma 5.14, mit (4.25) und mit Lemma 5.5 folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{D}I_d(u_0)[\partial_i w] &= \mathrm{D}I_d(w)[\partial_i w] + \mathrm{D}^2 I_d(w)[\partial_i w, u_0-w] + o(\|u_0-w\|) \\ &= o(d) \ . \end{aligned} \tag{4.30}$$

Weil u_0 Minimalstelle von I_d auf $Y_{d,y}$ ist, gibt es $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$, mit

$$\nabla I_d(u_0) = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \partial_i w + \alpha_N \nabla L_d(u_0) \ . \tag{4.31}$$

Nach Lemma 5.7 ist $\|\partial_i w\|^2 \ge C > 0$, $\langle \partial_i w, \partial_k w\rangle = O(d)$ für $i \ne k$, $\langle \partial_i w, \nabla L_d(u_0)\rangle = \mathrm{D}L_d(w)[\partial_i w] + O(d) = O(d)$, und Lemma 3.6 liefert $\|\nabla L_d(u_0)\| \ge C > 0$. Daher folgt aus (4.29): Es gibt $C > 0$ mit

$$\begin{aligned} O(d^2) = \|\nabla I_d(u_0)\|^2 &\ge C\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 + O(d) \sum_{\substack{1\le i,k\le N \\ i\ne k}} \alpha_i\alpha_k \\ &= (C + O(d)) \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \ . \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet:

$$\sum_{\substack{1\le i,k\le N \\ i\ne k}} |\alpha_i\alpha_k| \le N \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \ .$$

Das liefert $\alpha_i = O(d)$ für $i = 1, \dots, N$. Aus (4.31) und (4.30) folgt sogar $\alpha_i = o(d)$ für $i = 1, \dots, N-1$. Ferner liefert $\mathrm{D}I_d(u_0)[u_0] = L_d(u_0) = 0$ und $|\mathrm{D}L_d(u_0)[u_0]| \ge C > 0$ (siehe Lemma 3.6) auch

$$\alpha_N = O(d) \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i = o(d^2) \ .$$

Insgesamt folgt $\|\nabla I_d(u_0)\| = o(d)$, also (4.9).

Für den Beweis von (4.10) setzen wir $M = T_{\psi_d(y)} X_d$, $N = (M \oplus [\nabla L_d(u_0)])^\perp$ und $S = (M \oplus N)^\perp$. Es folgt $T_{u_0} Y_{d,y} = N$ und $M^\perp = N \oplus S$. Wir identifizieren $E_d = M \times N \times S$. Unser Ziel ist es zunächst, einen lokalen Diffeomorphismus $\Phi\colon M \times N \times S \to M \times N \times S$ zu finden, $\Psi = \Phi^{-1}$, mit $\Phi(0) = u_0$, $\Phi(M \times N \times \{0\}) = W_d$ und

$$Y_{d,x} = \Phi(\{P_M \Psi \psi_d(x)\} \times N \times \{0\}) \tag{4.32}$$

für $x \in \partial\Omega_d$ nahe bei y.

In y-Koordinaten ist $\psi_d(y) = w$. Sei $\Phi_1\colon M \times N \times S \to M \times N \times S$ der lokale Diffeomorphismus aus dem Beweis von Lemma 3.8, der zu der Trivialisierung von X_{d,δ_0} gehört, mit $\Phi_1(0) = w$. Weiter sei $\Psi_1 = \Phi_1^{-1}$ und $\tilde{u}_0 = \Psi_1(u_0)$. Aus $\|u_0 - w\| = O(d)$ folgt $\|\tilde{u}_0\| = O(d)$, also wegen (4.4) und $\tilde{u}_0 \in M^\perp$

$$\mathrm{D}\Phi_1(\tilde{u}_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_M + O(d) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_N & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_S \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

und eine gleichlautende Matrix für $\mathrm{D}\Psi_1(u_0)$.

Sei nun $\overline{L}\colon M \times N \times S \to \mathbb{R}$ lokal bei 0 gegeben durch $\overline{L} = L_d \circ \Phi_1$. Es ist $\nabla\overline{L}(\tilde{u}_0) = \mathrm{D}\Phi_1(\tilde{u}_0)^* \nabla L_d(u_0)$ wo $\mathrm{D}\Phi_1(\tilde{u}_0)^*$ die adjungierte Abbildung bedeutet. Zusammen mit (4.33) folgt $N = (M \oplus [\nabla\overline{L}(\tilde{u}_0)])^\perp$ und es ist $\overline{L}(\tilde{u}_0) = 0$. In der Nähe von $\tilde{u}_0$ gilt nun $\Phi_1(\overline{L}^{-1}(0)) = W_d$. Wir haben mit Lemma 5.7

$$\begin{aligned} P_M \nabla\overline{L}(\tilde{u}_0) &= P_M \mathrm{D}\Phi_1(\tilde{u}_0)^* \nabla L_d(u_0) \\ &= P_M \nabla L_d(u_0) + O(d) \\ &= P_M \nabla L_d(w) + O(d) = O(d) \end{aligned}$$

und

$$0 < C \le \|\nabla L_d(u_0)\| = \|\mathrm{D}\Psi_1(u_0)^* \nabla\overline{L}(\tilde{u}_0)\| \le C \|\nabla\overline{L}(\tilde{u}_0)\| \ .$$

Daher ist

$$\|P_S \nabla\overline{L}(\tilde{u}_0)\|^2 = \|\nabla\overline{L}(\tilde{u}_0)\|^2 - \|P_M \nabla\overline{L}(\tilde{u}_0)\|^2 \ge C > 0 \ .$$

Weil außerdem $\|\mathrm{D}^2\overline{L}\|$ beschränkt ist, existiert eine lokale C^2-Abbildung $\vartheta_2\colon M \times N \to S$ mit $\vartheta_2(0) = 0$, so daß $\overline{L}^{-1}(0) - \tilde{u}_0$ lokal der Graph von ϑ_2 ist, und so daß $\|\mathrm{D}^2\vartheta_2\|$ beschränkt ist unabhängig von $d \to 0$ und y. Wir definieren die lokale C^2-Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_2\colon M \times N \times S &\to M \times N \times S \\ (u, v, s) &\mapsto (u, v, \vartheta_2(u, v) + s) + \tilde{u}_0 \ . \end{aligned}$$

Dann ist lokal $\Phi_2(M \times N \times \{0\}) = \overline{L}^{-1}(0)$ und $\Phi_2(0) = \tilde{u}_0$. Aus $\mathrm{D}_M\vartheta_2(0) = -\mathrm{D}_S\overline{L}(\tilde{u}_0)^{-1}\mathrm{D}_M\overline{L}(\tilde{u}_0) = O(d)$ und $\mathrm{D}_N\vartheta_2(0) = -\mathrm{D}_S\overline{L}(\tilde{u}_0)^{-1}\mathrm{D}_N\overline{L}(\tilde{u}_0) = 0$ folgt

$$\mathrm{D}\Phi_2(0) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_M & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_N & 0 \\ O(d) & 0 & \mathrm{Id}_S \end{pmatrix}, \tag{4.34}$$

d.h. für kleine d ist Φ_2 ein C^2-Diffeomorphismus. Weil $\mathrm{D}^2\Phi_2$ beschränkt bleibt, existiert $\varepsilon > 0$, so daß Φ_2 auf $B_\varepsilon(0)$ und $\Psi_2 = \Phi_2^{-1}$ auf $B_\varepsilon(\tilde{u}_0)$ definiert sind, unabhängig von d und y.

Sei d im Folgenden so klein, daß 0 und $\tilde{u}_0$ im Definitionsbereich von Φ_1 und Ψ_2 liegen. Aus $P_M\Phi_2 = P_M$ folgt $P_M\Psi_2 = P_M$ und aus $\Pi_d\Phi_1 = \Phi_1 P_M$ folgt $\Psi_1\Pi_d = P_M\Psi_1$. Wir setzen $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$, $\Psi = \Phi^{-1}$. Es ist leicht zu sehen, daß folgende Äquivalenzen für $u = \Phi(v)$ gelten:

$$\begin{aligned} \Pi_d(u) = \psi_d(x) &\Longleftrightarrow P_M v = P_M\Psi\psi_d(x) \\ L_d(u) = 0 &\Longleftrightarrow P_S v = 0\ . \end{aligned}$$

Daraus folgt die Eigenschaft (4.32) für Φ. Aus (4.33) und (4.34) folgt weiter:

$$\mathrm{D}\Phi(0) = \mathrm{D}\Phi_1(\tilde{u}_0)\mathrm{D}\Phi_2(0) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_M + O(d) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_N & 0 \\ O(d) & 0 & \mathrm{Id}_S \end{pmatrix}. \tag{4.35}$$

Außerdem gilt: $\mathrm{D}^2\Phi$ und $\mathrm{D}^2\Psi$ sind auf ihren Definitionsbereichen beschränkt, unabhängig von d und y.

Nun setzen wir $\overline{I} = I \circ \Phi$, dann folgt aus der Eindeutigkeit des kritischen Punktes von I auf $Y_{d,x}$ und aus (4.32), daß $\Psi(\varphi_d(x))$ für x nahe bei y der eindeutige kritische Punkt von $\overline{I}$ auf $\{P_M\Psi\psi_d(x)\} \times N \times \{0\}$ ist. Wir betrachten daher die lokale C^1-Abbildung $g\colon M \times N \to N$ mit $g(u, v) = P_N\nabla\overline{I}(u, v, 0)$. Mit $Z_d = \varphi_d(\partial\Omega_d)$ ist dann lokal $\Psi(Z_d) = g^{-1}(0) \times \{0\}$. Für $u, v \in N$ gilt

$$\langle \mathrm{D}g(0)u, v\rangle = \mathrm{D}^2\overline{I}(0)[u, v] = \langle \mathrm{D}g(0)v, u\rangle$$

und

$$\langle \mathrm{D}g(0)v, v\rangle = \mathrm{D}^2\overline{I}(0)[v, v] \geq C\|v\|^2$$

wegen (A4) (die Einschränkung von Φ auf N ist eine Karte für $Y_{d,y}$ bei u_0 und u_0 ist ein kritischer Punkt von $I_d|_{Y_{d,y}}$). Demnach induziert $\mathrm{D}_N g(0)$ auf N eine symmetrische, positiv definite Bilinearform, d.h. $\mathrm{D}_N g(0)$ ist ein Isomorphismus. Das liefert die Existenz einer lokalen C^1-Abbildung $\vartheta_3\colon M \to N$ mit $g^{-1}(0) = \{(u, \vartheta_3(u)) \mid u \in M\}$ nahe bei 0 und $\vartheta_3(0) = 0$. Wegen (4.32) ist also für x nahe bei y

$$\varphi_d(x) = \Phi(P_M\Psi\psi_d(x), \vartheta_3 P_M\Psi\psi_d(x), 0)$$

und φ_d ist eine C^1-Einbettung.

Aus $\|u_0 - w\| = O(d)$ und der Beschränktheit von $\mathrm{D}^2\Psi$ folgt

$$\mathrm{D}\Psi(w) = \mathrm{D}\Psi(u_0) + O(d) = \mathrm{D}\Phi(0)^{-1} + O(d) \ .$$

Ferner liefert (4.35) nach leichter Rechnung

$$\mathrm{D}_M\Phi(0) P_M \mathrm{D}\Phi(0)^{-1} = P_M + O(d) \ .$$

Aus diesen Beziehungen folgt zusammen mit $N = \operatorname{image} \mathrm{D}_N\Phi(0) \subseteq \ker \mathrm{D}I_d(u_0)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(I_d \circ \varphi_d)(y) &= \mathrm{D}I_d(u_0)\mathrm{D}_M\Phi(0) P_M \mathrm{D}\Psi(w)\mathrm{D}\psi_d(y) \\ &= (1 + O(d))\mathrm{D}I_d(u_0)\mathrm{D}\psi_d(y) \ , \end{aligned}$$

also (4.10).

4.3 Entwicklungen in d

Mit dem Beweis von Lemma 3.10, den wir jetzt in Angriff nehmen, werden wir die asymptotischen Abschätzungen in (A7) und (A8) aus dem Beweis von Lemma 3.9 verbessern. Insbesondere werden wir die letzte Aussage dieses Lemmas dahingehend verbessern, daß wir φ_d bis zur ersten Ordnung in d bezüglich der Norm in E_d entwickeln.

Wir beginnen mit einer anderen Darstellung der Konstanten

$$\gamma = \frac{1}{N+1} \int_{\mathbb{R}^N_+} w'(|z|)^2 z_N \, dz \ .$$

Lemma 3.3 in [31] liefert

$$\gamma = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N_+} \left(\frac{1}{2}(|\nabla w|^2 + w^2) - F(w) \right) z_N \, dz \ .$$

Ferner haben wir

Zitat (Lemma 5.17). *Sei* $u \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar, mit* $|u(r)|, |u'(r)| \leq C_1 e^{-C_2 r}$*. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(|x|)|x|^2 \, dx = (N-1) \int_{\mathbb{R}^N_+} u(|z|) z_N \, dz \ .$$

Daraus folgt, da w und $|\nabla w|$ radialsymmetrisch sind,

$$\gamma = \frac{1}{2(N-1)} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2}(|\nabla w(z',0)|^2 + w(z',0)^2) - F(w(z',0)) \right) |z'|^2 \, dz' \ .$$

Wir verwenden weiter

Zitat (Lemma 5.9). *Seien $H\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ die mittlere Krümmung von $\partial\Omega$ und $P \in \partial\Omega$. Sei $u \in C^3(\mathbb{R}^N)$, $|\mathrm{D}^k u(z)| \le C_1 e^{-C_2|z|}$ für $k = 0, 1, 2, 3$, und u sei radialsymmetrisch bezüglich des Ursprungs. Mit*

$$\kappa = \frac{1}{2(N-1)} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(z', 0)|z'|^2 \, dz'$$

gilt dann in P-Koordinaten

$$\int_{\Omega_d} u \, dz = \int_{\mathbb{R}^N_+} u \, dz - d(N-1)\kappa H(P) + O(d^2)$$

und

$$\int_{\Omega_d} \partial_i u \, dz = d^2(N-1)\kappa\, \partial_i H(P) + O(d^3)$$

für $i = 1, \dots, N-1$ und $d \to 0$, unabhängig von P.

Ist lediglich $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $|\mathrm{D}^k u(z)| \le C_1 e^{-C_2|z|}$ für $k = 0, 1$ und u ungerade in einer Richtung z_i ($i \in \{1, \dots, N-1\}$) dann gilt

$$\int_{\Omega_d} u \, dz = O(d^2)$$

für $d \to 0$, unabhängig von P.

Es folgt also für $d > 0$, $y \in \partial\Omega_d$ und $P = dy \in \partial\Omega$ in P-Koordinaten

$$\begin{aligned} I_d(w) &= \int_{\Omega_d} \left(\frac{1}{2}(|\nabla w|^2 + w^2) - F(w) \right) dz \\ &= I_+(w) - d(N-1)\gamma H(P) + O(d^2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{D}I_d(w)[\partial_i w] &= \int_{\Omega_d} \partial_i \left(\frac{1}{2}(|\nabla w|^2 + w^2) - F(w) \right) dz \\ &= d^2(N-1)\gamma\, \partial_i H(P) + O(d^3) \ . \end{aligned}$$

Demnach liefert (4.8) die erste Behauptung von Lemma 3.10.

Wegen (4.10) und Lemma 5.4 ist in P-Koordinaten

$$\partial_i (I_d \circ \varphi_d)(y) = -(1 + O(d))\mathrm{D}I_d(\varphi_d(y))[\partial_i w] \ ,$$

für die zweite Behauptung von Lemma 3.10 genügt es also zu zeigen:

$$\mathrm{D}I_d(\varphi_d(y))[\partial_i w] = \mathrm{D}I_d(w)[\partial_i w] + o(d^2) \ . \tag{4.36}$$

Zuvor jedoch eine

4.5 Bemerkung. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $G_D \colon L^2(D) \to H^1(D)$ der Greensche Operator zu Neumann-Randbedingungen, d.h. für $u \in H^1(D)$ gilt

$$\langle u, G_D v\rangle_{H^1(D)} = \langle u, v\rangle_{L^2(D)} \ .$$

Dann folgt aus

$$\begin{aligned} \|G_D v\|^2_{H^1(D)} = \langle G_D v, G_D v\rangle_{H^1(D)} &= \langle G_D v, v\rangle_{L^2(D)} \\ &\leq \|G_D v\|_{L^2(D)} \|v\|_{L^2(D)} \leq \|G_D v\|_{H^1(D)} \|v\|_{L^2(D)} \end{aligned}$$

daß $\|G_D\| \leq 1$ gilt.

Im schwachen Sinne erfüllt $u = G_D[v]$ die folgende Gleichung in Divergenzform:

$$\mathrm{div}(\nabla u) - u = -v$$

so daß nach Theorem 8.8 in [16] für $v \in L^2(D)$ immer $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(D)$ gilt. Demnach erfüllt u im starken Sinne

$$-\Delta u + u = v$$

in D. Ist außerdem $\partial\Omega$ glatt und kompakt, dann lassen sich die Abschätzungen von Theorem 9.13 in [16] auf diesen Fall ausdehnen, auch wenn D unbeschränkt ist. Die auftretenden Konstanten hängen nur von den lokalen Eigenschaften von ∂D ab. Es folgt, daß wir für solche D und $u = G_D[v]$ eine globale Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(D)} \leq C(\|u\|_{L^2(D)} + \|v\|_{L^2(D)})$$

erhalten. In ähnlicher Weise kann man die globalen Aussagen von Theorem 9.19 (ebenda) auf diesen Fall anwenden, d.h. aus $\alpha \in (0,1)$, $\partial D \in C^{2,\alpha}$, ∂D kompakt, $v \in C^{0,\alpha}(\overline{D})$ und $u = G_D[v]$ folgt $u \in C^{2,\alpha}(\overline{D})$, und u erfüllt

$$\begin{bmatrix} -\Delta u + u = v & \text{in } D \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial D \end{bmatrix}$$

Ist $D = \mathbb{R}^N$, so fällt G_∞ mit dem Bessel-Potential der Ordnung 2 zusammen. Für $\alpha \in (0,1]$ und $v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ gilt dann $u = G_\infty[v] \in H^2(\mathbb{R}^N) \cap C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ und u erfüllt

$$-\Delta u + u = v \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \ .$$

Eine Referenz dafür ist z.B. [36], V, §3 und §4. Damit können wir obige Regularitätsaussagen auch auf den Fall $D = \mathbb{R}^N_+$ ausdehnen, indem wir $v \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ durch Spiegelung an $\partial\mathbb{R}^N_+$ auf $\mathbb{R}^N$ fortsetzen und die Eigenschaften des Bessel-Potentials benutzen.

Des weiteren wollen wir für $D \subseteq \mathbb{R}^N$ offen die Operatoren $K_D \colon L^2(D) \to E_D$, $K_D[u] = G_D[f'(w)u]$ betrachten. Mit dieser Bezeichnung gilt $\mathrm{D}^2 I_D(w) = \mathrm{Id} - K_D$, und dies ist ein symmetrischer Operator bezüglich des Skalarproduktes in E_D.

Wir schreiben, wie bei früher eingeführten Größen, G_d, G_+ und G_∞ für $D = \Omega_d$, $D = \mathbb{R}^N_+$ und $D = \mathbb{R}^N$. Dasselbe gilt für K_D.

Für den Beweis von (4.36) halten wir $P \in \partial\Omega$ fest und arbeiten in P-Koordinaten. Seien $u_d = \varphi_d(P/d)$ und $v_d = (u_d - w)/d$. Nach Lemma 3.9 bleibt $\|v_d\|_{E_d}$ dann beschränkt für $d \to 0$. Lemma 5.5 liefert

$$\mathrm{D}I_d(u_d) = \mathrm{D}I_d(w) + \mathrm{D}^2 I_d(w)[u_d - w] + o(\|u_d - w\|) .$$

Zusammen mit (4.9), Lemma 5.14 und Bemerkung 4.5 folgt hieraus

$$(\mathrm{Id} - K_d)[v_d] = U_P + o(1) \tag{4.37}$$

für $d \to 0$. Nun haben wir

Zitat (Lemma 5.15). *Sei $P \in \partial\Omega$, U_P wie in Lemma 5.14 gegeben. Dann existiert $V_P \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N) \cap E_\infty$, so daß in P-Koordinaten gilt*

$$(\mathrm{Id} - K_d)[V_P] = U_P + o(1)$$

in der E_d-Norm für $d \to 0$, unabhängig von P. Ferner gilt $\|V_P\|_{C^{2,1}(B_1(z))} \le C_1 e^{-C_2|z|}$ und V_P ist gerade bzgl. der Hauptnormalenrichtungen von $\partial\Omega$ in P.

Daher folgt

$$(\mathrm{Id} - K_d)[V_P - v_d] = o(1) .$$

Es seien $M_d = [\partial_1 w, \dots, \partial_{N-1} w] \subseteq E_d$ in P-Koordinaten, und $Q_d \colon E_d \to M_d$ der Orthogonalprojektor. Wir verwenden

Zitat (Lemma 5.18). *Seien $d_n \to 0$, $y_n \in \partial\Omega_{d_n}$ und $u_n \in E_{d_n}$ mit $\|(\mathrm{Id} - K_{d_n})[u_n]\|_{E_{d_n}} = o(1)$ für $n \to \infty$, und $\|u_n\|_{E_{d_n}}$ beschränkt. Dann gibt es $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N-1$, so daß für eine Teilfolge in y_n-Koordinaten gilt:*

$$\left\| u_n - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \partial_i w \right\|_{E_{d_n}} = o(1) .$$

Dies liefert

$$(\mathrm{Id} - Q_d)[V_P - v_d] = o(1)$$

für $d \to 0$ unabhängig von P. Wegen $u_d \in w + (T_w X_d)^\perp = w + M_d^\perp$ ist nun aber $Q_d[v_d] = 0$, und wegen Lemma 5.7 ist $Q_d[V_P] = o(1)$. Damit erhalten wir

$$v_d = V_P + o(1)$$

und

$$u_d = w + d V_P + o(d) \tag{4.38}$$

in E_d für $d \to 0$, unabhängig von P. Dies ist die angestrebte Entwicklung von u_d bis zur ersten Ordnung in d.

Nun zum Beweis von (4.36). Eine direkte Umformung liefert

$$\mathrm{D}I_d(u_d)[\partial_i w] = \mathrm{D}I_d(w)[\partial_i w] + \mathrm{D}^2 I_d(w)[dv_d, \partial_i w] - \int_{\Omega_d} (f(u_d) - f(w) - f'(w)dv_d)\partial_i w \, dz \, . \tag{4.39}$$

Für den zweiten Term auf der rechten Seite von (4.39) folgt nun aus den Symmetrieeigenschaften von V_P, (4.38), Lemma 5.14 und Lemma 5.9

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2 I_d(w)[dv_d, \partial_i w] &= d\mathrm{D}^2 I_d(w)[V_P, \partial_i w] + d\mathrm{D}^2 I_d(w)[o(1), \partial_i w] \\ &= dO(d^2) + dO(d)o(1) = o(d^2) \, . \end{aligned}$$

Um den dritten Term auf der rechten Seite von (4.39) abzuschätzen, führen wir die Mengen

$$\Sigma_d = \{ z \in \Omega_d \mid w(z) \geq 2|dv_d(z)| \}$$

ein. Auf $\Omega_d \setminus \Sigma_d$ gelten dann

$$\begin{aligned} |w| &\leq 2d|v_d| \\ |u_d| &\leq |w| + d|v_d| \leq 3d|v_d| \, . \end{aligned}$$

Das liefert zusammen mit $|\partial_i w| \leq C|w|$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_d \setminus \Sigma_d} f(u_d)\partial_i w \, dz \right| &\leq C \int_{\Omega_d \setminus \Sigma_d} (|u_d|^{p_1 - 1} + |u_d|^{p_2 - 1})|w| \, dz \\ &\leq C \int_{\Omega_d \setminus \Sigma_d} (|dv_d|^{p_1} + |dv_d|^{p_2}) \, dz \\ &\leq C(\|dv_d\|_{E_d}^{p_1} + \|dv_d\|_{E_d}^{p_2}) = o(d^2) \, , \end{aligned} \tag{4.40}$$

weil $\|v_d\|_{E_d}$ unabhängig von P und d beschränkt ist. Ähnlich folgen

$$\int_{\Omega_d \setminus \Sigma_d} f(w)\partial_i w \, dz = o(d^2) \tag{4.41}$$

$$\int_{\Omega_d \setminus \Sigma_d} f'(w)\partial_i w dv_d \, dz = o(d^2) \tag{4.42}$$

$$\int_{\Omega_d \setminus \Sigma_d} f''(w)\partial_i w (dv_d)^2 \, dz = o(d^2) \tag{4.43}$$

Auf Σ_d ist $w + sdv_d > 0$ für $s \in [0, 1]$, mit (4.40)–(4.42) folgt also aus der Taylorentwicklung von f

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_d} (f(u_d) - f(w) - f'(w)dv_d)\partial_i w \, dz \\
&\qquad = \int_{\Sigma_d} (f(u_d) - f(w) - f'(w)dv_d)\partial_i w \, dz + o(d^2) \\
&\qquad = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_d} f''(w)\partial_i w(dv_d)^2 \, dz \\
&\qquad\quad + \int_{\Sigma_d} \partial_i w \int_0^1 (f''(w + sdv_d) - f''(w))(dv_d)^2(1-s) \, ds \, dz + o(d^2) \\
&\qquad = I_1 + I_2 + o(d^2) \; .
\end{aligned}$$

Für I_1 folgt aus (4.43), wegen $v_d = V_P + o(1)$ in $L^2(\Omega_d)$ und Lemma 5.7

$$\begin{aligned}
2I_1 &= d^2 \int_{\Omega_d} f''(w)\partial_i w v_d^2 \, dz + o(d^2) \\
&= d^2 \int_{\Omega_d} f''(w)\partial_i w V_P^2 \, dz + o(d^2) \\
&= d^2 O(d) + o(d^2) = o(d^2) \; .
\end{aligned}$$

Für die Abschätzung von I_2 benötigen wir

Zitat (Lemma 5.19). *Es gibt $\alpha^* \in (0, 1]$, $2 + \alpha^* \leq 2^*$, $q_1^*, q_2^* \geq 0$, so daß für $T > 0$, $t_1, t_2 \in [T/2, 3T/2]$ gilt:*

$$|f''(t_1) - f''(t_2)| \leq C(|T|^{q_1^*-1} + |T|^{q_2^*-1})|t_1 - t_2|^{\alpha^*} \; .$$

Wir können demnach annehmen, daß für die Konstanten in der Bedingung (N3) an f gilt: $\alpha_1 \in (0, 1]$, $\alpha_1 + 2 \leq 2^*$, und $q_1, q_2 \geq 0$. Daraus gewinnen wir mit der Definition von Σ_d und der Beschränktheit von w:

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq d^2 C \int_{\Sigma_d} |w| \int_0^1 |f''(w + sdv_d) - f''(w)| v_d^2 \, ds \, dz \\
&\leq d^{2+\alpha_1} C \int_{\Sigma_d} (|w|^{q_1} + |w|^{q_2})|v_d|^{2+\alpha_1} \, dz \\
&\leq d^{2+\alpha_1} C \int_{\Omega_d} |v_d|^{2+\alpha_1} \, dz \\
&\leq d^{2+\alpha_1} C \|v_d\|_{E_d}^{2+\alpha_1} = o(d^2) \; .
\end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir (4.36) gezeigt, und der Beweis ist vollständig.

4.4 Punktweise Eigenschaften von Lösungen

Wir müssen jetzt nur noch die Aussagen von Lemma 3.11 beweisen. Zunächst bemerken wir, daß sich die kritischen Punkte $u \neq 0$ von I_d mit $I_d(u) \leq m(\infty) - \varepsilon$ wegen Proposition 3.6 in [2] am Rand von $\partial\Omega_d$ konzentrieren und daß gilt: $I_d(u) \leq m(d) + \varepsilon_0$ für kleine d. Die Regularität der schwachen Lösungen von $(\mathrm{SGL})_d$ wird in [37] recht ausführlich behandelt, und wir entnehmen dieser Arbeit, daß jede solche Lösung aus E_d in $C^2(\overline{\Omega_d})$ liegt. In [26] wird mit Hilfe des Maximumprinzips bewiesen, daß $u > 0$ ist auf $\overline{\Omega_d}$. Eine Kombination der Methoden aus [31] und [38] liefert für kleine d die Existenz eines eindeutigen Maximums von u auf $\overline{\Omega_d}$, welches auf $\partial\Omega_d$ angenommen wird. Wir müssen also nur noch die asymptotische Abschätzung

$$|M_d(u) - \beta_d(u)| \leq C$$

für kleine d zeigen, wo $M_d(u)$ für eine Lösung u von $(\mathrm{SGL})_d$ wie oben das eindeutige Maximum bedeute.

Wir führen einen indirekten Beweis. Angenommen, es gäbe Folgen $d_n \to 0$, $u_n \in E_{d_n} \setminus \{0\}$ mit $\mathrm{D}I_{d_n}(u_n) = 0$ und $I_{d_n}(u_n) \leq m(\infty) - \varepsilon$, wobei die u_n nach Obigem eindeutige Maxima $M_n = M_{d_n}(u_n) \in \partial\Omega_{d_n}$ haben und wo gelte: $|M_n - \beta_{d_n}(u_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$. Wir setzen $y_n = \beta_{d_n}(u_n)$. Dann gilt wegen Lemma 3.9 $u_n = \varphi_{d_n}(y_n)$. Sei $\bar{u}$ der eindeutig bestimmte positive Fixpunkt von f. Mit einer Harnack-Ungleichung am Rand (Lemma 4.3 in [26]) erhalten wir ein $\alpha > 0$, so daß für alle n gilt: $u_n \geq \alpha\bar{u}$ auf $B_1(M_n)$. Da w bei ∞ gleichmäßig abfällt, folgt mit Lemma 3.9 und $|M_n - y_n| \to \infty$

$$\begin{aligned} O(d^2) = \|\psi_{d_n}(y_n) - u_n\|^2 &\geq \int_{B_1(M_n)\cap\Omega_{d_n}} (|u_n| - |w(z-y_n)|)^2\,dz \\ &\geq \int_{B_1(M_n)\cap\Omega_{d_n}} \frac{\alpha^2\bar{u}^2}{4}\,dz \geq C \end{aligned}$$

für $n \to \infty$ und ein $C > 0$. Widerspruch!

5 Technische Hilfsmittel

5.1 Differenzierbarkeit von Funktionalen

Für einen Banachraum E und eine stetige Abbildung $A\colon [0,1] \to E$ soll im folgenden

$$\int_0^1 A(s)\,ds$$

das Bochner-Integral bedeuten, d.h. das eindeutig bestimmte Element aus E, so daß für jedes $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ gilt:

$$\varphi \int_0^1 A(s)\,ds = \int_0^1 \varphi A(s)\,ds \ .$$

Die Differenzierbarkeit einiger Abbildungen erhalten wir mit dem folgenden Kriterium:

5.1 Lemma. *Seien E, F Banachräume, $U \subseteq E$ offen, $f\colon U \to F$ eine Abbildung, $x \in U$, $A\colon U \to \mathcal{L}(E,F)$ stetig und es gelte für kleine $h \in E$:*

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 A(x+sh)h\,ds \ .$$

Dann ist f in x differenzierbar mit $\mathrm{D} f(x) = A(x)$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \| f(x+h) - f(x) - A(x)h \| &= \left\| \int_0^1 (A(x+sh) - A(x))h\,ds \right\| \\ &\le \|h\| \int_0^1 \|A(x+sh) - A(x)\|\,ds \\ &= o(\|h\|) \quad \text{für } h \to 0 \end{aligned}$$

da A stetig ist. □

Für das Rechnen mit dem Bochner-Integral benötigen wir noch zwei Aussagen.

5.2 Lemma. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $A\colon [0,1] \to L^2(D)$ stetig und die Repräsentanten von $A(s)$ seien so gewählt, daß $A(s)(z)$ (Borel-)meßbar ist auf* $[0,1] \times D$. *Dann gilt: für fast alle $z \in D$ ist $s \mapsto A(s)(z)$ in* $L^1[0,1]$ *und*

$$\Big(\int_0^1 A(s)\,ds\Big)(z) = \int_0^1 A(s)(z)\,ds \ .$$

Beweis. Zunächst ist $A(s)(z)A(t)(z)$ meßbar auf $[0,1] \times [0,1] \times D$ und

$$\begin{aligned}\int_D \Big(\int_0^1 |A(s)(z)|\,ds\Big)^2 dz &= \int_D \int_0^1 \int_0^1 |A(s)(z)A(t)(z)|\,ds\,dt\,dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_D |A(s)(z)A(t)(z)|\,dz\,ds\,dt \\ &\le \int_0^1 \int_0^1 \|A(s)\|\,\|A(t)\|\,ds\,dt \\ &= \Big(\int_0^1 \|A(s)\|\,ds\Big)^2 < \infty\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt: $s \mapsto A(s)(z)$ ist in $L^1[0,1]$ für fast alle $z \in D$ und für u mit

$$u(z) = \int_0^1 A(s)(z)\,ds$$

gilt $u \in L^2(D)$.

Für beliebige $v \in L^2(D)$ ist

$$\int_0^1 \int_D |A(s)(z)||v(z)|\,dz\,ds \le \int_0^1 \|A(s)\|\,\|v\|\,ds < \infty$$

und daher

$$\begin{aligned}\Big\langle v, \int_0^1 A(s)\,ds\Big\rangle_{L^2(D)} &= \int_0^1 \langle v, A(s)\rangle_{L^2(D)}\,ds \\ &= \int_0^1 \int_D A(s)(z)v(z)\,dz\,ds \\ &= \int_D \int_0^1 A(s)(z)v(z)\,ds\,dz \\ &= \langle v, u\rangle_{L^2(D)}\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt die zweite Behauptung. □

5.3 Lemma. *Seien E,F Banachräume und $A\colon [0,1] \to \mathcal{L}(E,F)$ stetig. Dann gilt für $x \in E$:*

$$\Big(\int_0^1 A(s)\,ds\Big)x = \int_0^1 A(s)x\,ds$$

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{L}(F,\mathbb{R})$ beliebig. Wir definieren $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F),\mathbb{R})$ durch $\psi B =$

φBx. Es folgt

$$\begin{aligned}\varphi\Big(\int_0^1 A(s)\,ds\Big)x &= \psi \int_0^1 A(s)\,ds\\ &= \int_0^1 \psi A(s)\,ds\\ &= \int_0^1 \varphi A(s)x\,ds\\ &= \varphi \int_0^1 A(s)x\,ds\end{aligned}$$

Da $\varphi \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Als erste Anwendung zeigen wir:

5.4 Lemma. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Dann ist die Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^N \to E_D$ mit $\psi(y)(z) = w(z-y)$ in C^3. Die Ableitungen sind gegeben durch*

$$D^\nu \psi(y) = (-1)^\nu D^\nu(\psi(y))$$

und beschränkt unabhängig von y und D.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß $\psi\colon \mathbb{R}^N \to L^2(D)$ stetig differenzierbar ist. Sei dazu $A\colon \mathbb{R}^N \to L^2(D, \mathbb{R}^N)$ gegeben durch $A(y)(z) = -\nabla w(z-y)$. Sei

$$U(z) = \sup_{x \in B_1(z)} |\nabla w(x)|$$

für $z \in \mathbb{R}^N$. Dann ist $U \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ und fällt exponentiell ab bei ∞, also $U \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Um die Stetigkeit von A zu zeigen, seien $y \in \mathbb{R}^N$, $y_n \to y$. Dann gilt für große n und für $z \in D$:

$$|\nabla w(z-y) - \nabla w(z-y_n)| \le 2U(z-y)$$

und mit der Stetigkeit von ∇w daher

$$\lim_{n\to\infty} \|A(y) - A(y_n)\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_D |\nabla w(z-y) - \nabla w(z-y_n)|^2\,dz = 0\ .$$

Demnach ist A stetig.

A kann als stetige Abbildung $\mathbb{R}^N \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, L^2(D))$ aufgefaßt werden durch den Ausdruck $A(y)[h](z) = -\langle \nabla w(z-y), h\rangle$. Für feste y und h ist die Abbildung $(s,z) \mapsto A(y+sh)[h](z)$ stetig, also meßbar, und es gilt mit Lemma 5.2 für fast alle $z \in D$

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^1 A(y+sh)[h]\,ds\Big)(z) &= \int_0^1 A(y+sh)[h](z)\,ds\\ &= \int_0^1 -\langle \nabla w(z-y-sh), h\rangle\,ds\\ &= w(z-y-h) - w(z-y)\\ &= (\psi(y+h) - \psi(y))(z)\ .\end{aligned}$$

Nach Lemma 5.1 ist ψ also differenzierbar als Abbildung nach $L^2(D)$ mit

$$\mathrm{D}_{L^2}\psi(y)[h](z) = A(y)[h](z) = -\langle \nabla w(z-y), h\rangle = -\mathrm{D}(\psi(y))(z)[h]\ ,$$

kurz $\mathrm{D}_{L^2}\psi(y) = -\mathrm{D}(\psi(y))$.

Wendet man die gleiche Argumentation jeweils auf die Koordinatenfunktionen der Ableitungen von $w(z-y)$ an, dann ergibt sich aus $w \in C^4$: $\psi \in C^4(\mathbb{R}^N, L^2(D))$ mit $D^\nu_{L^2}\psi(y) = (-1)^\nu D^\nu(\psi(y))$ für $\nu = 1, 2, 3, 4$. Daraus folgt unmittelbar $\psi \in C^3(\mathbb{R}^N, E_D)$ mit $D^\nu_{E_D}\psi(y) = (-1)^\nu D^\nu(\psi(y))$. □

In der folgenden Aussage beziehen wir uns auf die Bezeichnungen aus Abschnitt 3.1.

5.5 Lemma. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und erfülle eine Kegelbedingung. Weiter gelte, daß $D \cap B_R(0)$ und $D \setminus B_R(0)$ für große R eine gleichmäßige Kegelbedingung erfüllen. Dann sind I_D und L_D zweimal stetig differenzierbar. Für $u \in E_D$ sind die Normen der Ableitungen an der Stelle u beschränkt, abhängig nur von einer oberen Schranke für $\|u\|$, der Kegelbedingung von D und von f.*

Weiter gilt für $u, v \in E_D$:

$$\|\mathrm{D}^2 I_D(u) - \mathrm{D}^2 I_D(v)\| \le C(1 + \|u+v\|^{q_3})\|u-v\|^{\alpha_3}$$

mit $\alpha_3 = \min\{1, p_1 - 2\} \in (0,1]$, $q_3 = p_2 - 2 - \alpha_3 \ge 0$ *und einer Konstanten* $C \ge 0$, *die nur von f und der Kegelbedingung von D abhängt.*

Beweis. Wir zeigen zunächst: Die Abbildung $B\colon E_D \to \mathcal{L}^2(E_D, \mathbb{R})$ mit

$$B(u)[h,k] = \int_D f'(u)hk\,dz$$

ist lokal Hölderstetig.

Es ist wegen (N3) für $t_1, t_2 \ge 0$:

$$|f'(t_1) - f'(t_2)| \le \int_{[t_1,t_2]} |f''(s)|\,ds \le C(|t_1^{p_1-2} - t_2^{p_1-2}| + |t_1^{p_2-2} - t_2^{p_2-2}|)$$

Nun gilt für $i = 1, 2$ falls $p_i \ge 3$:

$$\begin{aligned}
|t_1^{p_i-2} - t_2^{p_i-2}| &\le C(t_1+t_2)^{p_i-3}|t_1 - t_2| \\
&= C(t_1+t_2)^{p_i-2}\left|\frac{t_1-t_2}{t_1+t_2}\right| \\
&\le C(t_1+t_2)^{p_i-2}\left|\frac{t_1-t_2}{t_1+t_2}\right|^{\alpha_3} \\
&= C(t_1+t_2)^{p_i-2-\alpha_3}|t_1-t_2|^{\alpha_3}
\end{aligned}$$

und falls $p_i < 3$:

$$
\begin{aligned}
|t_1^{p_i-2} - t_2^{p_i-2}| &\le |t_1 - t_2|^{p_i-2} \\
&= (t_1+t_2)^{p_i-2} \left| \frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2} \right|^{p_i-2} \\
&\le (t_1+t_2)^{p_i-2} \left| \frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2} \right|^{\alpha_3} \\
&= (t_1+t_2)^{p_i-2-\alpha_3} |t_1 - t_2|^{\alpha_3} \ .
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
|f'(t_1) - f'(t_2)| \le C(|t_1+t_2|^{p_1-2-\alpha_3} + |t_1+t_2|^{p_2-2-\alpha_3})|t_1-t_2|^{\alpha_3} \ .
$$

Somit gilt

$$
\begin{aligned}
\|B(u) - B(v)\| &= \sup_{\|h\|=1} |(B(u) - B(v))[h,h]| \\
&\le \sup \int_D |f'(u) - f'(v)||h|^2 \, dz \\
&\le C \sup \int_D (|u+v|^{p_1-2-\alpha_3} + |u+v|^{p_2-2-\alpha_3})|u-v|^{\alpha_3}|h|^2 \, dz \\
&\le C \sup(\|u+v\|^{p_1-2-\alpha_3} + \|u+v\|^{p_2-2-\alpha_3})\|u-v\|^{\alpha_3}\|h\|^2 \\
&\le C(1 + \|u+v\|^{q_3})\|u-v\|^{\alpha_3} \ .
\end{aligned}
$$

Als nächstes zeigen wir: Die Abbildung $A\colon E_D \to \mathcal{L}(E_D, \mathbb{R})$ mit

$$
A(u)[h] = \int_D f(u) h \, dz
$$

ist differenzierbar und $\mathrm{D}A(u) = B(u)$.

Es ist für alle $h, k \in E_D$ und $s \in [0,1]$:

$$
\begin{aligned}
\int_D |f'(u+sh)hk| \, dz &\le C(\|u+sh\|^{p_1-2} + \|u+sh\|^{p_2-2})\|h\|\|k\| \\
&\le C((\|u\| + \|h\|)^{p_1-2} + (\|u\| + \|h\|)^{p_2-2})\|h\|\|k\|
\end{aligned}
$$

und daher mit Lemma 5.3

$$
\begin{aligned}
\Big(\int_0^1 B(u+sh)[h] \, ds\Big)[k] &= \int_0^1 B(u+sh)[h,k] \, ds \\
&= \int_0^1 \int_D f'(u+sh)hk \, dz \, ds \\
&= \int_D \int_0^1 f'(u+sh)hk \, ds \, dz \\
&= \int_D (f(u+h) - f(u))k \, dz \\
&= (A(u+h) - A(u))[k] \ ,
\end{aligned}
$$

also für alle $h \in E_D$:

$$A(u+h) - A(u) = \int_0^1 B(u+sh)[h]\,ds\ .$$

Mit Lemma 5.1 folgt aus der Stetigkeit von B: $\mathrm{D}A(u) = B(u)$. Insbesondere ist A stetig, und ähnlich wie oben folgt, daß die Abbildung $E_D \to \mathbb{R}$, gegeben durch $u \mapsto \int_D F(u)\,dz$ differenzierbar ist mit Ableitung A.

Zusammenfassend gilt daher:

$$\mathrm{D}I_D(u)[h] = \langle u, h\rangle - \int_D f(u)h\,dz$$
$$\mathrm{D}^2 I_D(u)[h,k] = \langle h, k\rangle - \int_D f'(u)hk\,dz\ .$$

Für das Funktional L_D gehen wir genauso vor und zeigen zunächst die Stetigkeit der Abbildung $B\colon E_D \to \mathcal{L}^2(E_D, \mathbb{R})$ mit

$$B(u)[h,k] = \int_D g'(u)hk\,dz\ ,$$

wobei $g(t) = f(t) + tf'(t) = (tf(t))'$ und $g'(t) = 2f'(t) + tf''(t)$ stetig sind und gilt: $|g'(t)| \le C(|t|^{p_1-2} + |t|^{p_2-2})$.

Sei $u_n \to u$ eine konvergente Folge in E_D. Weil auch $u_n \to u$ in $L^{p_i}(D)$ gilt, existieren Funktionen $U_i \in L^{p_i}(D)$ mit $|u|, |u_n| \le U_i$ für $i = 1, 2$ und für eine Teilfolge von (u_n). (Dies folgt aus dem Beweis der Vollständigkeit von L^p.) Für große $R > 0$ und $h \in E_D$ mit $\|h\| = 1$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
&|(B(u) - B(u_n))[h,h]| \\
&\le \int_{D\cap B_R(0)} |g'(u) - g'(u_n)||h|^2\,dz + \int_{D\setminus B_R(0)} |g'(u) - g'(u_n)||h|^2\,dz \\
&\le C\|g'(u) - g'(u_n)\|_{L^{\frac{p_2}{p_2-2}}(D\cap B_R(0))} + C\left(\|U_1\|^{p_1-2}_{L^{p_1}(D\setminus B_R(0))} + \|U_2\|^{p_2-2}_{L^{p_2}(D\setminus B_R(0))}\right)\ .
\end{aligned}$$

Da g' ein stetiger Nemyckii-Operator

$$H^1(D \cap B_R(0)) \to L^{\frac{p_2}{p_2-2}}(D \cap B_R(0))$$

ist, folgt also

$$\lim_{n\to\infty} \|B(u) - B(u_n)\| = \lim_{R\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sup_{\|h\|=1} |(B(u) - B(u_n))[h,h]| = 0\ .$$

Also ist B stetig. Damit ergibt sich genauso wie oben (indem man f durch g ersetzt):

$$\mathrm{D}L_D(u)[h] = 2\langle u, h\rangle - \int_D g(u)h\,dz$$
$$\mathrm{D}^2 L_D(u)[h,k] = 2\langle h, k\rangle - \int_D g'(u)hk\,dz\ .$$

□

5.2 Die Geometrie des Randes

In diesem Abschnitt wollen wir einige asymptotische Abschätzungen erhalten, die mit dem „Auseinanderziehen“ des Randes von $\partial\Omega_d$ für $d \to 0$ zusammenhängen. Dies ist der Punkt, an dem die mittlere Krümmung H von $\partial\Omega$ in die Berechnungen eingeht.

5.6 Bemerkung. Zu $P \in \partial\Omega$ betrachten wir ϑ und ϑ_d wie auf Seite 21 beschrieben (indem wir den Index P unterschlagen). Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$ die Eigenwerte von $\mathrm{D}^2\vartheta(0)$ und $\alpha_{jkl} = \partial_j\partial_k\partial_l\vartheta(0)$. Für $z \in \mathbb{R}^N$ schreiben wir $z = (z', z_N) = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}^{N-1}$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt in P-Koordinaten für $x \in B^{N-1}_{\rho_1/d}(0)$:

$$\vartheta_d(x) = d\frac{1}{2}\sum_{1\le k\le N-1}\lambda_k x_k^2 + d^2\frac{1}{6}\sum_{1\le j,k,l\le N-1}\alpha_{jkl}x_jx_kx_l + d^3O(|x|^4)$$

$$\partial_k\vartheta_d(x) = d\lambda_k x_k + d^2O(|x|^2)\ .$$

Hier ist ein Term der Art $O(|x|^k)$ zu verstehen als ein Ausdruck, der unabhängig von P für $x \in B^{N-1}_{\rho_1/d}(0)$ kleiner oder gleich $C|x|^k$ ist, nicht nur für x nahe bei 0.

5.7 Lemma. *Sei $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, und es gebe $C_1, C_2 > 0$ mit $|u(z)| \le C_1e^{-C_2|z|}$. Für $P \in \partial\Omega$ gilt dann in P-Koordinaten:*

$$\int_{\Omega_d} u(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^N_+} u(z)\,dz + O(d)$$

für $d \to 0$, unabhängig von P. Ist insbesondere u bzgl. P-Koordinaten ungerade in einer Koordinate z_i $(i = 1, \dots, N-1)$, dann folgt

$$\int_{\Omega_d} u(z)\,dz = O(d)\ .$$

Ist u wie oben und $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, dann gilt

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega_d)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} + O(\sqrt{d}\,)\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\ .$$

Beweis. Es seien

$$\Omega_d\Delta\mathbb{R}^N_+ = (\Omega_d \setminus \mathbb{R}^N_+) \cup (\mathbb{R}^N_+ \setminus \Omega_d)$$

die symmetrische Differenz und ρ_1, ρ_2 wie auf Seite 21 eingeführt. Dann ist $|\vartheta_d(x)| =$

$d\,O(|x|^2)$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\Omega_d} u\,dz - \int_{\mathbb{R}^N_+} u\,dz\Big| \\
&\le \int_{\Omega_d \Delta \mathbb{R}^N_+} |u|\,dz \\
&\le \int_{(\Omega_d \Delta \mathbb{R}^N_+)\cap(B^{N-1}_{\rho_1/d}\times[-\rho_2/d,\rho_2/d])} |u|\,dz + \int_{(\Omega_d \Delta \mathbb{R}^N_+)\setminus B_{\rho_2/d}} |u|\,dz \\
&\le C_1 \int_{B^{N-1}_{\rho_1/d}} \int_0^{|\vartheta_d(x)|} e^{-C_2|x|}\,dy\,dx + O(e^{-C/d}) \\
&\le dC_1 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-C_2|x|} O(|x|^2)\,dx + O(e^{-C/d}) = O(d)\ ,
\end{aligned}$$

also die erste Behauptung. Ist $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, dann folgt wie oben

$$\begin{aligned}
|\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega_d)} - \langle u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N_+)}| &\le \int_{\Omega_d \Delta \mathbb{R}^N_+} |uv|\,dz \\
&\le \|u\|_{L^2(\Omega_d \Delta \mathbb{R}^N_+)} \|v\|_{L^2(\Omega_d \Delta \mathbb{R}^N_+)} \le O(\sqrt{d}\,)\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

und damit die letzte Behauptung. □

5.8 Korollar. *In y_d-Koordinaten gilt für $i, j \in \{1, \dots, N-1\}$ mit $i \neq j$:*

$$\begin{aligned}
\langle w, \partial_i w\rangle_{E_d} &= O(d) \\
\langle \partial_i w, \partial_j w\rangle_{E_d} &= O(d) \\
\|w\|^2_{E_d} &= \frac{1}{2}\|w\|^2_{E_\infty} + O(d) \\
\|\partial_i w\|^2_{E_d} &= \frac{1}{2}\|\partial_i w\|^2_{E_\infty} + O(d)
\end{aligned}$$

5.9 Lemma. *Seien $H\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ die mittlere Krümmung von $\partial\Omega$ und $P \in \partial\Omega$. Sei $u \in C^3(\mathbb{R}^N)$, $|\mathrm{D}^k u(z)| \le C_1 e^{-C_2|z|}$ für $k = 0, 1, 2, 3$, und u sei radialsymmetrisch bezüglich des Ursprungs. Mit*

$$\kappa = \frac{1}{2(N-1)} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(z', 0)|z'|^2\,dz'$$

gilt dann in P-Koordinaten

$$\int_{\Omega_d} u\,dz = \int_{\mathbb{R}^N_+} u\,dz - d(N-1)\kappa H(P) + O(d^2)$$

und

$$\int_{\Omega_d} \partial_i u\,dz = d^2(N-1)\kappa\,\partial_i H(P) + O(d^3)$$

für $i = 1, \dots, N-1$ *und* $d \to 0$*, unabhängig von* P.

Ist lediglich $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $|\mathrm{D}^k u(z)| \leq C_1 e^{-C_2|z|}$ *für* $k = 0, 1$ *und* u *ungerade in einer Richtung* z_i $(i \in \{1, \dots, N-1\})$ *dann gilt*

$$\int_{\Omega_d} u\, dz = O(d^2)$$

für $d \to 0$*, unabhängig von* P.

Beweis. Mit den Bezeichnungen von Seite 21 gilt

$$H(P) = \frac{1}{N-1}\Delta\vartheta(0) \qquad \text{und} \qquad \partial_i H(P) = \frac{1}{N-1}\partial_i \Delta\vartheta(0)\ ,$$

denn für $x \in B_{\rho_1}(0)$ ist

$$\begin{aligned}(N-1)&H(x, \vartheta(x)) \\ &= \frac{1}{(1+|\nabla\vartheta(x)|^2)^{3/2}}((1+|\nabla\vartheta(x)|^2)\Delta\vartheta(x) - \mathrm{D}^2\vartheta(x)[\nabla\vartheta(x), \nabla\vartheta(x)])\end{aligned}$$

(siehe [16], (16.1) auf Seite 388). Das liefert zusammen mit Bemerkung 5.6

$$(N-1)H(P) = \sum_{k=1}^{N-1}\lambda_k \qquad \text{und} \qquad (N-1)\partial_i H(P) = \sum_{k=1}^{N-1}\alpha_{ikk}\ . \tag{5.1}$$

Zunächst betrachten wir $v \in C^2(\mathbb{R}^N)$ mit $|\mathrm{D}^k v(z)| \leq C_1 e^{-C_2|z|}$ für $k = 0, 1, 2$. Wir schreiben $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ und haben

$$\begin{aligned}\int_0^t v(x,y)\, dy &= t v(x,0) + t^2\frac{1}{2}\partial_N v(x,0) + t^3\frac{1}{2}\int_0^1 \partial_N^2 v(x,st)(1-s)^2\, ds \\ &= t v(x,0) + t^2\frac{1}{2}\partial_N v(x,0) + t^3 O(e^{-C|(x,t)|})\ .\end{aligned} \tag{5.2}$$

Wir verwenden die Entwicklung von ϑ_d, die in Bemerkung 5.6 gegeben wurde. Dann folgt aus (5.2) und $e^{-C|(x,\vartheta_d(x))|} = O(e^{-C|x|})$ ähnlich wie in Lemma 5.7

$$
\begin{aligned}
(5.3)\quad & \int_{\Omega_d} v\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_+} v\,dz - \int_{B^{N-1}_{\rho_1/d}} \int_0^{\vartheta_d(x)} v(x,y)\,dy\,dx + O(e^{-C/d}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_+} v\,dz - \int_{B^{N-1}_{\rho_1/d}} \Big(\vartheta_d(x) v(x,0) + \vartheta_d(x)^2 \frac{1}{2} \partial_N v(x,0) \\
&\qquad\qquad + \vartheta_d(x)^3 O(e^{-C|x|}) \Big)\,dx + O(e^{-C/d}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_+} v\,dz - d \int_{\mathbb{R}^{N-1}} v(x,0) \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k x_k^2\,dx \\
&\qquad - d^2 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Bigg(\partial_N v(x,0) \frac{1}{8} \Big(\sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k x_k^2 \Big)^2 \\
&\qquad\qquad + v(x,0) \frac{1}{6} \sum_{1\le j,k,l \le N-1} \alpha_{jkl} x_j x_k x_l \Bigg)\,dx + O(d^3)\ .
\end{aligned}
$$

Ist v bzgl. einer Richtung x_i ungerade und gerade in x_k-Richtung für $k \neq i$, so folgt:

$$
(5.4)\qquad \int_{\Omega_d} v\,dz = -d^2 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} v(x,0) \Big(\frac{1}{2} \sum_{k\neq i} \alpha_{ikk} x_i x_k^2 + \frac{1}{6} \alpha_{iii} x_i^3 \Big)\,dx + O(d^3)\ .
$$

Da u radialsymmetrisch ist, liefert (5.3)

$$
\int_{\Omega_d} u\,dz = \int_{\mathbb{R}^N_+} u\,dz - d \frac{1}{2(N-1)} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} v(x,0)|x|^2\,dx \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k + O(d^2)\ ,
$$

also mit (5.1) die erste Behauptung.

Für $v = \partial_i u$ folgt aus (5.4) mit partieller Integration in der x_i-Koordinate

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_d} \partial_i u\,dz &= -d^2 \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \partial_i u(x,0) \Big(\sum_{k\neq i} \alpha_{ikk} x_i x_k^2 + \frac{1}{3} \alpha_{iii} x_i^3 \Big)\,dx + O(d^3) \\
&= d^2 \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x,0) \Big(\sum_{k\neq i} \alpha_{ikk} x_k^2 + \alpha_{iii} x_i^2 \Big)\,dx + O(d^3) \\
&= d^2 \frac{1}{2(N-1)} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x,0)|x|^2\,dx \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_{ikk} + O(d^3)
\end{aligned}
$$

und aus (5.1) also die zweite Behauptung.

Ist $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$, so haben wir statt (5.2) lediglich

$$\begin{aligned}\int_0^t u(x,y)\,dy &= tu(x,0) + t^2 \int_0^1 \partial_N u(x,st)(1-s)\,ds \\ &= tu(x,0) + t^2 O(e^{-C|(x,t)|})\ ,\end{aligned}$$

aber wie in (5.3) und (5.4) folgt immer noch

$$\int_{\Omega_d} u\,dz = O(d^2)\ .$$

Damit ist alles bewiesen. □

5.10 Lemma. *Sei $P \in \partial\Omega$. Es existiert $\Gamma \in C^3(\mathbb{R}^N)$, $|\mathrm{D}^k\Gamma(z)| \le C_1 e^{-C_2|z|}$ für $k = 0, 1, 2, 3$, so daß in P-Koordinaten gilt*

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = d\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} + O(d^2) \qquad \text{in } L^2(\partial\Omega_d)\ . \tag{5.5}$$

Ferner ist Γ gerade in den Koordinatenrichtungen $z_1, \dots, z_{N-1}$. Ist $W \in C^2(\mathbb{R}^N)$ mit $|\mathrm{D}^k W(z)| \le C_1 e^{-C_2|z|}$ für $k = 0, 1, 2$ und $\partial_N W(x, 0) = 0$, dann gilt

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = O(d) \qquad \text{in } L^2(\partial\Omega_d)\ . \tag{5.6}$$

Beweis. Wir arbeiten durchgängig in P-Koordinaten und verwenden die Notation von Bemerkung 5.6.

Zum Beweis von (5.5) haben wir wegen $w \in C^4(\mathbb{R}^N)$ für $k = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned}\partial_k w(x,y) &= \partial_k w(x,0) + y\partial_N\partial_k w(x,0) + y^2 \int_0^1 \partial_N^2\partial_k w(x,sy)(1-s)\,ds \\ &= \partial_k w(x,0) + y\partial_N\partial_k w(x,0) + y^2 O(e^{-C|z|}) \\ &= \partial_k w(x,0) + yO(e^{-C|z|})\ ,\end{aligned}$$

und weil w auch radialsymmetrisch ist, gilt

$$\partial_N w(x,0) = 0\ .$$

Für $x \in B_{\rho_1/d}(0)$ gilt dann: $e^{-C|(x,\vartheta_d(x))|} = O(e^{-C|x|})$ und

$$
\begin{aligned}
(5.7)\quad \sqrt{1+|\nabla\vartheta_d(x)|^2}\,\partial_\nu w(x,\vartheta_d(x))
&= \langle \nabla w(x,\vartheta_d(x)), (\nabla\vartheta_d(x),-1)\rangle_{\mathbb{R}^N} \\
&= -\partial_N w(x,\vartheta_d(x)) + \sum_{k=1}^{N-1} \partial_k w(x,\vartheta_d(x))\partial_k\vartheta_d(x) \\
&= -(\partial_N w(x,0) + \partial_N^2 w(x,0)\vartheta_d(x) + \vartheta_d(x)^2 O(e^{-C|x|})) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{N-1} (\partial_k w(x,0) + \vartheta_d(x) O(e^{-C|x|}))\partial_k\vartheta_d(x) \\
&= -\partial_N w(x,0) + d\Bigg(\sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k \partial_k w(x,0)x_k - \frac{1}{2}\partial_N^2 w(x,0)\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_k x_k^2\Bigg) \\
&\qquad + d^2 O(e^{-C|x|})\ .
\end{aligned}
$$

Mit ähnlicher Rechnung folgt für ein $W \in C^2(\mathbb{R}^N)$ wie in der Formulierung des Lemmas für $x \in B_{\rho_1/d}(0)$:

$$
(5.8)\qquad \sqrt{1+|\nabla\vartheta_d(x)|^2}\,\partial_\nu W(x,\vartheta_d(x)) = -\partial_N W(x,0) + d\,O(e^{-C|x|})\ .
$$

Wir setzen nun für $z = (x,y) \in \mathbb{R}^N$:

$$
\Gamma(x,y) = -e^{-|y|^2}\Bigg(y\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_k\partial_k w(x,0)x_k - \frac{1}{2}\partial_N w\Bigg(x, y\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_k x_k^2\Bigg)\Bigg)\ .
$$

Dann gilt $\Gamma \in C^3(\mathbb{R}^N)$, $|\mathrm{D}^k\Gamma(z)| \le C_1 e^{-C_2|z|}$ für $k = 0,1,2,3$, Γ ist gerade in den Koordinaten $x_1,\ldots,x_{N-1}$, und es gilt

$$
\partial_N\Gamma(x,0) = -\Bigg(\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_k\partial_k w(x,0)x_k - \frac{1}{2}\partial_N^2 w(x,0)\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_k x_k^2\Bigg)\ .
$$

Wir können auch $\partial_\nu\Gamma(x,\vartheta_d(x))$ gemäß (5.8) entwickeln, und erhalten für $x \in B_{\rho_1/d}(0)$ aus (5.7) wegen $\partial_N w(x,0) = 0$

$$
(5.9)\qquad \sqrt{1+|\nabla\vartheta_d(x)|^2}\,|\partial_\nu w(x,\vartheta_d(x)) - d\partial_\nu\Gamma(x,\vartheta_d(x))| = d^2 O(e^{-C|x|})\ .
$$

Daraus folgt zusammen mit dem exponentiellen Abfall von ∇w und $\nabla\Gamma$ bei ∞

$$\begin{aligned}
&\|\partial_\nu w - d\partial_\nu\Gamma\|^2_{L^2(\partial\Omega_d)}\\
&\quad\le \|\partial_\nu w - d\partial_\nu\Gamma\|^2_{L^2(\partial\Omega_d\cap(B^{N-1}_{\rho_1/d}\times[-\rho_2/d,\rho_2/d]))} + \|\partial_\nu w - d\partial_\nu\Gamma\|^2_{L^2(\partial\Omega_d\setminus B_{\rho_2/d})}\\
&\quad= \int_{B^{N-1}_{\rho_1/d}} |\partial_\nu w(x,\vartheta_d(x)) - d\partial_\nu\Gamma(x,\vartheta_d(x))|^2\sqrt{1+|\nabla\vartheta_d(x)|^2}\,dx\\
&\qquad\qquad + O(\mathrm{vol}_{N-1}(\partial\Omega_d)e^{-C/d})\\
&\quad\le d^4\int_{\mathbb{R}^N} O(e^{-C|x|})\,dx + \frac{1}{d^{N-1}}O(e^{-C/d}) = O(d^4)
\end{aligned}$$

also (5.5). In ähnlicher Weise folgt (5.6) auch aus (5.8), falls $\partial_N W(x,0) = 0$ gilt. □

5.3 Analyse von Differentialoperatoren

5.11 Lemma. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $G_D\colon L^2(D) \to H^1(D)$ der Greensche Operator zu Neumannschen Randbedingungen (siehe Bemerkung 4.5). Dann gelten:*

a) *Ist $v \in L^2(D)$ und gibt es $C_1, C_2 > 0$ mit*

$$\|v\|_{L^2(D\setminus B_r(0))} \le C_1 e^{-C_2 r}$$

für $r > 0$, dann existieren $C_3, C_4 > 0$, so daß für $u = G_D[v]$ und $r > 0$ gilt:

$$\|u\|_{H^1(D\setminus B_r(0))} \le C_3 e^{-C_4 r}$$

b) *Ist $D = \mathbb{R}^N$, $\alpha \in (0,1]$, $v \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ und gilt für $z \in \mathbb{R}^N$*

$$\|v\|_{C^{0,\alpha}(B_1(z))} \le C_1 e^{-C_2|z|}\ ,$$

dann gibt es $C_3, C_4 > 0$, so daß für $u = G_\infty[v]$ und $z \in \mathbb{R}^N$ gilt:

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_1(z))} \le C_3 e^{-C_4|z|}\ .$$

Die Konstanten C_3 und C_4 hängen dabei jeweils nur von C_1, C_2 und N ab.

Beweis. **a)** Wir setzen für $r > 0$

$$Q(r) = \int_{D\setminus B_r(0)} (|\nabla u|^2 + |u|^2)\,dz = \|u\|^2_{H^1(D\setminus B_r(0))}\ .$$

Dann ist Q monoton fallend und es gilt nach Bemerkung 4.5

$$Q(0) = \|u\|^2_{H^1(D)} = \|G_D[v]\|^2_{H^1(D)} \le \|v\|^2_{L^2(D)} \le C_1^2\ . \tag{5.10}$$

Wir verwenden eine Abschneidefunktion $\eta\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t & 0 \le t \le 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$$

Für $r \ge 0$ setzen wir $u_r(z) = \eta(|z| - r)u(z) \in H^1(D)$. Dann gilt

$$\nabla u_r(z) = \eta(|z| - r)\nabla u(z) + \eta'(|z| - r)\tfrac{z}{|z|}u(z)$$

für $|z| \neq r, r + 1$ und

$$\begin{aligned} u_r &= u && \text{in } D \setminus B_{r+1}(0) \\ u_r &= 0 && \text{in } D \cap B_r(0) \\ u_r &= (|z| - r)u && \text{in } D \cap (B_{r+1}(0) \setminus B_r(0)) \\ \nabla u_r(z) &= (|z| - r)\nabla u(z) + \tfrac{z}{|z|}u(z) && \text{in } D \cap (B_{r+1}(0) \setminus B_r(0))\ . \end{aligned} \tag{5.11}$$

Daraus folgt wegen $|\frac{z}{|z|}u\nabla u| \le \frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + u^2)$

$$\begin{aligned} &\langle u, u_r\rangle_{H^1(D)} \\ &= \int_{D\setminus B_{r+1}} (|\nabla u|^2 + u^2)\,dz + \int_{D\cap(B_{r+1}\setminus B_r)} \left((|z| - r)(|\nabla u|^2 + u^2) + \frac{z}{|z|}u\nabla u\right) dz \\ &\qquad \ge Q(r + 1) - \frac{1}{2}\int_{D\cap(B_{r+1}\setminus B_r)} (|\nabla u|^2 + u^2)\,dz \ge Q(r + 1) - \frac{1}{2}Q(r) \end{aligned}$$

und mit (5.10)

$$\begin{aligned} |\langle u, u_r\rangle_{H^1(D)}| = |\langle v, u_r\rangle_{L^2(D)}| &\le \int_{D\setminus B_r} |u_r v|\,dz \\ &\le \|u\|_{L^2(D)}\|v\|_{L^2(D\setminus B_r)} \le C_1 e^{-C_2 r}\|u\|_{H^1(D)} \le C_1^2 e^{-C_2 r}\ . \end{aligned}$$

Das liefert zusammen

$$Q(r + 1) - \frac{1}{2}Q(r) \le C_1^2 e^{-C_2 r}\ . \tag{5.12}$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} C_4 &= \min\{C_2, \log(3/2)\} > 0 \\ C_3 &= 4C_1^2 e^{C_4 + C_2} \end{aligned}$$

und behaupten, daß gilt:

$$Q(r) \le C_3 e^{-C_4 r}\ . \tag{5.13}$$

Ersetzen wir dann C_3 durch $\sqrt{C_3}$ und C_4 durch $C_4/2$, so sind wir fertig.

Für $0 \le r \le 1$ ist wegen (5.10)

$$Q(r) \le Q(0) \le C_1^2 \le C_3 e^{-C_4} \le C_3 e^{-C_4 r} \ .$$

Für $r \ge 1$ haben wir, falls $Q(r) > 0$ gilt, wegen (5.12)

$$Q(r)\left(2 - \frac{Q(r-1)}{Q(r)}\right) \le 2C_1^2 e^{C_2} e^{-C_2 r} \ . \tag{5.14}$$

Wir setzen

$$\mu(r) = \max\left(\left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; n \le r, \frac{Q(n-1)}{Q(n)} \le \frac{3}{2} \right\} \cup \{0\}\right) .$$

Es folgt: $\mu(r) \in \mathbb{N}_0$ ist wohldefiniert, da für $n \le r$ nach Voraussetzung $Q(n) \ge Q(r) > 0$ gilt. Ferner haben wir (hier sei $[\,\cdot\,]$ die Gauß-Klammer)

$$\mu(r) \le [r] \le r \ , \qquad Q(\mu(r)) > 0 \tag{5.15}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \frac{Q(\mu(r)-1)}{Q(\mu(r))} &\le \frac{3}{2} \qquad \text{falls } \mu(r) \ge 1 \\ \frac{Q(n-1)}{Q(n)} &> \frac{3}{2} \qquad \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ und } \mu(r) < n \le r \ . \end{aligned} \tag{5.16}$$

Aus (5.14) und (5.16) folgt daher für $\mu(r) \ge 1$

$$Q(\mu(r)) \le 4C_1^2 e^{C_2} e^{-C_2 \mu(r)} = C_3 e^{-C_4} e^{-C_2 \mu(r)} \ .$$

Für $\mu(r) = 0$ folgt dies aus (5.10). Dies liefert zusammen mit (5.15) und (5.16)

$$\begin{aligned} Q(r) \le Q([r]) = Q(\mu(r)) \prod_{n=\mu(r)+1}^{[r]} \frac{Q(n)}{Q(n-1)} \\ &\le C_3 e^{-C_4} e^{-C_2 \mu(r)} \left(\frac{2}{3}\right)^{[r]-\mu(r)} \\ &= C_3 e^{-C_4} \exp\Big(-C_2 \underbrace{\mu(r)}_{\ge 0} - \log\frac{3}{2} \underbrace{([r]-\mu(r))}_{\ge 0}\Big) \\ &\le C_3 e^{-C_4} \exp\big(-C_4(\mu(r) + [r] - \mu(r))\big) \\ &\le C_3 e^{-C_4 r} \end{aligned}$$

und daher (5.13). Damit ist a) bewiesen.

b) In diesem Beweis seien alle Kugeln B_r abgeschlossen, und für $U \in C^{k,\alpha}(B_r(z))$ sei

$$\|U\|_{C^{k,\alpha}(B_r(z))} = \|U\|_{C^k(B_r(z))} + \sup_{\substack{x,y \in B_r(z) \\ x \neq y}} \frac{|U(x) - U(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

die zugehörige Norm. Ferner bezeichnen C, C_1 und C_2 diverse Konstanten, ohne feste Bedeutung. Jetzt ist u eine schwache Lösung der Gleichung in Divergenzform:

$$\operatorname{div}(\nabla u) - u = -v \ .$$

Außerdem haben wir Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit

$$\|v\|_{L^N(\mathbb{R}^N \setminus B_r(0))} \leq C_1 e^{C_2 r}$$

und

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_r(0))} \leq C_1 e^{C_2 r}$$

wegen Teil a). Für jedes $R > 0$ und $z_0 \in \mathbb{R}^N$ folgt dann aus Theorem 8.17 in [16]:

$$\sup_{B_R(z_0)} |u| \leq C \left(R^{-N/2} \|u\|_{L^2(B_{2R}(z_0))} + R\|v\|_{L^N(B_{2R}(z_0))} \right) \ , \tag{5.17}$$

wo C nur von R und N abhängt.

Ist $|z_0| \leq 2$, so setzen wir $R = 2$ und haben wegen (5.17)

$$\begin{aligned} |u(z_0)| \leq \sup_{B_2(0)} |u| &\leq C(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|v\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}) \\ &\leq C(\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|v\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}) \ . \end{aligned}$$

Ist $|z_0| > 2$, so setzen wir $R = 1$, $r = |z_0| - 2 > 0$ und (5.17) liefert

$$\begin{aligned} |u(z_0)| &\leq C(\|u\|_{L^2(B_2(z_0))} + \|v\|_{L^N(B_2(z_0))}) \\ &\leq C(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_r(0))} + \|v\|_{L^N(\mathbb{R}^N \setminus B_r(0))}) \\ &\leq C_1 e^{-C_2 r} = C_1 e^{-C_2 |z_0|} \ . \end{aligned}$$

Insgesamt folgt für $z_0 \in \mathbb{R}^N$:

$$|u(z_0)| \leq C_1 e^{-C_2 |z_0|} \ . \tag{5.18}$$

Es gilt weiter, wie leicht zu sehen ist,

$$\|v\|_{C^{0,\alpha}(B_2(z_0))} \leq C_1 e^{-C_2 |z_0|}$$

und wegen (5.18)

$$\|u\|_{C^0(B_2(z_0))} \le C_1 e^{-C_2|z_0|} ,$$

so daß die inneren Schauder-Abschätzungen (Corollary 6.3 in [16] mit $d = 1$, $\Omega = B_2(z_0)$) uns liefern:

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_1(z_0))} \le C(\|u\|_{C^0(B_2(z_0))} + \|v\|_{C^{0,\alpha}(B_2(z_0))}) \le C_1 e^{-C_2|z_0|} ,$$

also die Behauptung. □

5.12 Lemma. *Es gibt $C > 0$, so daß für jedes $v \in E_\infty$ mit*

$$v \in [\partial_1 w, \dots, \partial_N w, \nabla L_\infty(w)]^\perp$$

gilt: $\mathrm{D}^2 I_\infty(w)[v, v] \ge C\|v\|^2_{E_\infty}$.

Beweis. Wir betrachten die linearen Operatoren $S, T : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, gegeben durch

$$\begin{aligned} Su &= -\Delta u + u - f'(w)u \\ Tu &= -\Delta u + u \end{aligned}$$

und mit den Definitionsbereichen $D(S) = D(T) = H^2(\mathbb{R}^N)$. Es seien $G = G_\infty = T^{-1} \in \mathcal{L}(L^2, H^2)$ und $K = K_\infty$ wie in Bemerkung 4.5 beschrieben. Nach Lemma 4.2 in [32] gilt $\ker S = [\partial_1 w, \dots, \partial_N w]$. Aus $S = T(\mathrm{Id} - K)$ auf H^2 folgt also

$$\ker(\mathrm{Id} - K) = \ker S = [\partial_1 w, \dots, \partial_N w] ,$$

auch wenn wir $\mathrm{Id} - K$ als Operator in $\mathcal{L}(E_\infty, E_\infty)$ betrachten.

Wir zeigen als nächstes: K ist als Operator in $\mathcal{L}(E_\infty, E_\infty)$ kompakt. Wir folgen dabei dem Beweis von Lemma 4.2 in [32]. Für $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ mit $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le 1$ gilt

$$\|f'(w)u\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \le C_1 e^{-C_2 R} ,$$

da $f'(w)$ bei ∞ exponentiell abfällt. Lemma 5.11 liefert dann

$$\|Ku\|_{H^1(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \le C_1 e^{-C_2 R}$$

mit C_1, C_2 unabhängig von u mit $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le 1$. Sei nun $(u_n) \subseteq L^2$ mit $\|u_n\| \le 1$. Für $\varepsilon > 0$ gibt es nach Obigem ein $R > 0$ mit

$$\|Ku_n - Ku_m\|_{H^1(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \le \frac{\varepsilon}{2} .$$

Die Einbettung $H^2(B_R(0)) \to H^1(B_R(0))$ ist kompakt. Daher existiert eine Teilfolge, so daß $Ku_n|_{B_R(0)}$ eine Cauchyfolge in $H^1(B_R(0))$ ist. Es gibt also n_0, so daß für $n, m \ge n_0$ gilt

$$\|Ku_n - Ku_m\|_{H^1(B_R(0))} \le \frac{\varepsilon}{2} .$$

Diese beiden Ungleichungen zeigen, daß diese Teilfolge von Ku_n eine Cauchyfolge in E_∞ ist. Somit sind $K: L^2 \to E_\infty$ und auch $K: E_\infty \to E_\infty$ kompakt.

Wir haben demnach erhalten: $\mathrm{Id}-K$ ist auf E_∞ ein symmetrischer FredholmOperator vom Index 0. Mit $M = [\partial_1 w, \ldots, \partial_N w]$ folgt

$$\mathrm{image}(\mathrm{Id}-K) = \ker(\mathrm{Id}-K)^\perp = M^\perp\ . \tag{5.19}$$

Wir setzen $R = [\nabla L_\infty(w)]$, dann folgt (da w radialsymmetrisch ist): $M \perp R$. Weiter sei $N = (M \oplus R)^\perp$. Wir betrachten $A: N \to N$ mit $A = P_N(\mathrm{Id}-K)|_N$. Dann ist A auch ein symmetrischer Fredholm-Operator vom Index 0 und für $v \in N$ gilt:

$$\mathrm{D}^2 I_\infty(w)[v,v] = \langle Av, v\rangle\ .$$

Da w Minimalstelle von I_∞ auf $W_\infty = \{u \in E_\infty \mid L_\infty(u) = 0\}$ ist, folgt für das Spektrum $\sigma(A) \subseteq [0,\infty)$. Wir zeigen: A ist ein Isomorphismus, d.h. $\sigma(A) \subseteq (0,\infty)$. Nach dem Spektralsatz folgt dann die Behauptung.

Es genügt zu zeigen: $\ker(A) = \{0\}$. Sei also $u \in N$ mit $Au = 0$. Nach Definition von A folgt $(\mathrm{Id}-K)u \in M \oplus R$, und wegen (5.19) existiert $\kappa \in \mathbb{R}$ mit $(\mathrm{Id}-K)u = \kappa \nabla L_\infty(w)$. Mit der Definition von L_∞ und mit $\mathrm{D}I_\infty(w) = 0$ folgt hieraus

$$\begin{aligned}\kappa \mathrm{D}L_\infty(w)[w] &= \mathrm{D}^2 I_\infty(w)[w,u] + \mathrm{D}I_\infty(w)[u] \\ &= \mathrm{D}L_\infty(w)[u] = \langle u, \nabla L_\infty(w)\rangle = 0\ .\end{aligned}$$

Weil $\mathrm{D}_\infty(w)[w] \neq 0$ gilt (siehe Lemma 3.4) ist $\kappa = 0$, mithin $u \in M \cap N = \{0\}$. □

5.13 Bemerkung. Weil $\partial\Omega$ ausreichend glatt und kompakt ist, gibt es zu $0 < d \leq 1$ nach Theorem 4.26 in [3] einen stetigen linearen Fortsetzungsoperator $\Lambda_d: E_d \to E_\infty$. Es ist aus dem Beweis dieses Satzes klar, daß die Norm von Λ_d unabhängig von d beschränkt ist, weil wir eine Überdeckung von $\partial\Omega$ mit offenen Mengen $U_j \subseteq \mathbb{R}^N$ fest wählen können, so daß dort Abbildungen zur Begradigung des Randes existieren. Daraus erhalten wir mit den Mengen $\frac{1}{d}U_j$ jeweils eine offene Überdeckung von $\partial\Omega_d$ mit zugehörigen begradigenden Abbildungen, so daß es gleichmäßige Schranken für deren Differentiale gibt, unabhängig von d. Die Norm von Λ_d hängt nur von diesen Schranken ab.

Definieren wir $L^2(\partial\Omega_d)$ mit Hilfe des Lebesgue-Maßes auf $\partial\Omega_d$, so folgt ähnlich wie oben aus Theorem 5.22 in [3], daß die Einschränkungsabbildungen $E_d \to L^2(\partial\Omega_d)$ wohldefiniert sind, linear und stetig, und daß deren Normen für $0 < d \leq 1$ gleichmäßig beschränkt sind.

5.14 Lemma. *Sei $P \in \partial\Omega$. Dann existiert zu einer Wahl von P-Koordinaten $U_P \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N) \cap E_\infty$, so daß in diesen P-Koordinaten gilt*

$$\nabla I_d(w) = -dU_P + o(d)$$

in der E_d-Norm für $d \to 0$, unabhängig von P. Ferner gilt $\|U_P\|_{C^{2,1}(B_1(z))} \leq C_1 e^{-C_2|z|}$ mit $C_1, C_2 > 0$ unabhängig von P wählbar, und U_P ist gerade bezüglich der Hauptnormalenrichtungen von $\partial\Omega$ in P.

Es gilt auch

$$D^2 I_d(w)[\partial_i w] = O(d)$$

in der E_d-Norm für $d \to 0$.

Beweis. Für $d > 0$ setzen wir $u_d = G_d[f(w)]$ (siehe Bemerkung 4.5). Dann gilt $\nabla I_d(w) = w - u_d$ und die erste Behauptung des Lemmas folgt, wenn wir U_P finden mit

$$\|u_d - w - dU_P\|_{E_d} = o(d) \tag{5.20}$$

für $d \to 0$. Dazu setzen wir zunächst mit der Funktion Γ aus Lemma 5.10

$$v_1 = \Delta\Gamma - \Gamma$$

und

$$v_2(z) = \begin{cases} v_1(z) & \text{für } z_N \geq 0 \\ v_1(z', -z_N) & \text{für } z_N \leq 0\ . \end{cases}$$

Es gilt dann $v_1 \in C^1(\mathbb{R}^N)$ mit $|D^k v_1(z)| \leq C_1 e^{-C_2|z|}$ für $k = 0, 1$ und daher $v_2 \in C^{0,1}(\mathbb{R}^N)$ mit $\|v_2\|_{C^{0,1}(B_1(z))} \leq C_1 e^{-C_2|z|}$ (siehe Lemma 5.11 für die Definition dieser Norm).

Nun setzen wir $W_d = G_d[v_1]$. Nach Bemerkung 4.5 ist dann $W_d \in C^2(\overline{\Omega}_d)$ und erfüllt

$$\begin{bmatrix} -\Delta W_d + W_d = v_1 & \text{in } \Omega_d \\ \dfrac{\partial W_d}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega_d \end{bmatrix}$$

Weiter sei $W = G_\infty[v_2]$. Dann ist nach Lemma 5.11 $W \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N)$ mit $\|W\|_{C^{2,1}(B_1(z))} \leq C_1 e^{-C_2|z|}$ und W ist gerade in Richtung der Koordinatenachsen $z_1, \ldots, z_N$, da dies auch für v_2 gilt. Daraus folgt insbesondere

$$\partial_N W(z', 0) = 0\ . \tag{5.21}$$

Wir verwenden nun die Fortsetzungsoperatoren Λ_d aus Bemerkung 5.13. Es gilt für jedes $v \in E_d$ wegen Lemma 5.7, $v_1 = v_2$ auf $\mathbb{R}^N_+$ und (5.21)

$$\begin{aligned} \langle v, W\rangle_{E_d} &= \langle \Lambda_d v, W\rangle_{E_+} + O(\sqrt{d}\,)\|v\|_{E_d} \\ &= \langle \Lambda_d v, v_2\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} + O(\sqrt{d}\,)\|v\|_{E_d} \\ &= \langle \Lambda_d v, v_1\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} + O(\sqrt{d}\,)\|v\|_{E_d} \\ &= \langle v, v_1\rangle_{L^2(\Omega_d)} + O(\sqrt{d}\,)\|v\|_{E_d} \\ &= \langle v, W_d\rangle_{E_d} + O(\sqrt{d}\,)\|v\|_{E_d}\ . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|W_d - W\|_{E_d} = O(\sqrt{d}\,)\ . \tag{5.22}$$

Setzen wir $V_d = W_d + \Gamma$, dann gilt mit Bemerkung 4.5

$$\begin{bmatrix} -\Delta V_d + V_d = 0 & \text{in } \Omega_d \\ \dfrac{\partial V_d}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \Gamma}{\partial \nu} & \text{auf } \partial\Omega_d \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

Daraus folgt für $v \in E_d$ mit (5.5), Bemerkung 5.13 sowie der Definition von u_d und w

$$\begin{aligned} &\langle u_d - w + dV_d, v\rangle_{E_d} \\ &\qquad = \int_{\Omega_d} (\nabla(u_d - w)\nabla v + (u_d - w)v)\, dz + d\int_{\Omega_d} (\nabla V_d \nabla v + V_d v)\, dz \\ &\qquad = -\int_{\partial\Omega_d} \partial_\nu w v\, do + d\int_{\partial\Omega_d} \partial_\nu V_d v\, do \\ &\qquad = -d\int_{\partial\Omega_d} \partial_\nu \Gamma v\, do + \|v\|_{L^2(\partial\Omega_d)} O(d^2) + d\int_{\partial\Omega_d} \partial_\nu \Gamma v\, do \\ &\qquad = O(d^2)\|v\|_{E_d} \end{aligned}$$

also $\|u_d - w + d(W_d + \Gamma)\|_{E_d} = O(d^2)$. Setzen wir $U_P = -W - \Gamma$, dann folgen aus (5.22) und den Symmetrie- und Differenzierbarkeitseigenschaften von W und Γ (5.20) und die verlangten Eigenschaften von U_P.

Für die zweite Behauptung des Lemmas sei $u_d = G_d[f'(w)\partial_i w]$. Dann haben wir $\mathrm{D}^2 I_d(w)[\partial_i w] = \partial_i w - u_d$. Wegen $-\Delta\partial_i w + \partial_i w = f'(w)\partial_i w$ und $\partial_N\partial_i w(x,0) = 0$ folgt aus (5.6) und Bemerkung 5.13

$$\begin{aligned} \|u_d - \partial_i w\|_{E_d}^2 &= -\int_{\partial\Omega_d} \partial_\nu\partial_i w(u_d - \partial_i w)\, do \\ &\le O(d)\|u_d - \partial_i w\|_{L^2(\partial\Omega_d)} \\ &= O(d)\|u_d - \partial_i w\|_{E_d}\ , \end{aligned}$$

also die Behauptung. □

5.15 Lemma. *Sei $P \in \partial\Omega$, U_P wie in Lemma 5.14 gegeben. Dann existiert $V_P \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N) \cap E_\infty$, so daß in P-Koordinaten gilt*

$$(\mathrm{Id} - K_d)[V_P] = U_P + o(1)$$

in der E_d-Norm für $d \to 0$, unabhängig von P. Ferner gilt $\|V_P\|_{C^{2,1}(B_1(z))} \le C_1 e^{-C_2|z|}$ und V_P ist gerade bzgl. der Hauptnormalenrichtungen von $\partial\Omega$ in P.

Beweis. Wir arbeiten wieder durchgängig in P-Koordinaten. Zunächst setzen wir $v_1 = f'(w)U_P \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap E_\infty$ und

$$v_2(z) = \begin{cases} v_1(z) & z_N \geq 0 \\ v_1(z', -z_N) & z_N \leq 0\,. \end{cases}$$

Dann ist $v_2 \in C^{0,1}(\mathbb{R}^N)$, $\|v_2\|_{C^{0,1}(B_1(z))} \leq C_1 e^{-C_2|z|}$ und v_2 gerade bzgl. der Koordinatenachsen. Wir setzen $M = [\partial_1 w, \dots, \partial_N w]$ als Unterraum von E_∞. Aus dem Beweis von Lemma 5.12 folgt $\mathrm{image}(\mathrm{Id} - K_\infty) = M^\perp = \ker(\mathrm{Id} - K_\infty)^\perp$ und $\mathrm{Id} - K_\infty \colon M^\perp \to M^\perp$ ist ein Isomorphismus. Es ist $G_\infty[v_2] \in M^\perp$, d.h. es gibt $W \in M^\perp$ mit

$$(\mathrm{Id} - K_\infty)[W] = G_\infty[v_2]\,.$$

Hier ist außerdem $\|v_2\|_{E_\infty}$, und daher auch $\|W\|_{E_\infty}$, unabhängig von P beschränkt. Weil $\mathrm{image}\, G_\infty \subseteq H^2(\mathbb{R}^N)$ gilt, ist sogar $W \in H^2(\mathbb{R}^N)$ und W erfüllt die Gleichung

$$-\Delta W + W - f'(w)W = v_2 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N. \tag{5.24}$$

Mit Lemma 9.19 in [16] folgt: Es gibt $\alpha \in (0, 1)$ mit $W \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$.

Andererseits ist W schwache Lösung der Gleichung (in Divergenzform)

$$\mathrm{div}(\nabla W) + (f'(w) - 1)W = -v_2$$

mit $v_2 \in L^N(\mathbb{R}^N)$. Lemma 8.17 in [16] (mit $R = 1$) liefert

$$\|W\|_{C^0(\mathbb{R}^N)} \leq C(\|W\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|v_2\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}) \leq C$$

unabhängig von P, so daß wir mit den inneren Schauder-Abschätzungen (Corollary 6.3 in [16], mit $d = 1$) erhalten:

$$\|W\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C$$

unabhängig von P. Weil außerdem $\partial_i(f'(w)) = f''(w)\partial_i w$ nach Lemma 3.5 stetig und exponentiell abfallend ist, folgt

$$\|v_2 + f'(w)W\|_{C^{0,1}(B_1(z))} \leq C_1 e^{-C_2|z|}\,,$$

und zusammen mit $W = G_\infty[v_2 + f'(w)W]$ und Lemma 5.11 liefert dies $W \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N)$ und

$$\|W\|_{C^{2,1}(B_1(z))} \leq C_1 e^{-C_2|z|}\,. \tag{5.25}$$

Da W die eindeutige Lösung von (5.24) in $M^\perp$ ist, Zugehörigkeit zu $M^\perp$ invariant unter Spiegelungen an Unterräumen von $\mathbb{R}^N$ ist und dasselbe für die Gleichung (5.24) gilt, muß auch W gerade in Richtung der Koordinatenachsen sein. Daraus folgt insbesondere

$$\partial_N W(z', 0) = 0\,. \tag{5.26}$$

Seien Λ_d die Fortsetzungsoperatoren wie in Bemerkung 5.13 beschrieben. Für $v \in E_d$ erhalten wir aus (5.24), (5.25), (5.26) und $v_1 = v_2$ auf $\mathbb{R}^N_+$ mit Lemma 5.7

$$\begin{aligned}\langle v, (\mathrm{Id} - K_d)W\rangle_{E_d} &= \langle v, W\rangle_{E_d} - \langle v, f'(w)W\rangle_{L^2(\Omega_d)}\\ &= \langle \Lambda_d v, W\rangle_{E_+} - \langle \Lambda_d v, f'(w)W\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} + O(\sqrt{d}\,)\|v\|_{E_d}\\ &= \langle \Lambda_d v, v_2\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} + O(\sqrt{d}\,)\|v\|_{E_d}\\ &= \langle \Lambda_d v, v_1\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} + O(\sqrt{d}\,)\|v\|_{E_d}\\ &= \langle v, v_1\rangle_{L^2(\Omega_d)} + O(\sqrt{d}\,)\|v\|_{E_d}\\ &= \langle v, K_d[U_P]\rangle_{E_d} + O(\sqrt{d}\,)\|v\|_{E_d}\end{aligned}$$

und daher

$$(\mathrm{Id} - K_d)[W] = K_d[U_P] + O(\sqrt{d}\,) \tag{5.27}$$

in E_d für $d \to 0$, unabhängig von P. Für $V_P = W + U_P$ gilt dann $\|V_P\|_{C^{2,1}(B_1(z))} \le C_1 e^{-C_2|z|}$ unabhängig von P, und (5.27) liefert

$$(\mathrm{Id} - K_d)[V_P] = K_d[U_P] + (\mathrm{Id} - K_d)[U_P] + O(\sqrt{d}\,) = U_P + o(1)$$

für $d \to 0$, unabhängig von P. Die Symmetrieeigenschaften von V_P folgen aus denjenigen von W und U_P. □

5.4 Diverse

5.16 Lemma. *Sei (μ_n) eine Folge von beschränkten positiven Maßen auf $\mathbb{R}^N$, (r_n) eine Folge in $\mathbb{R}^+$ mit $r_n \to \infty$. Dann existiert für eine Teilfolge eine Folge $R_n \to \infty$ mit $R_n \le r_n$, so daß gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R > 0, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_0 : \mu_n(B_{R_n}(0) \setminus B_R(0)) \le \varepsilon\ .$$

Beweis. Wir setzen $Q_n(t) = \mu_n(B_t(0))$ für $t \ge 0$. Dann sind die Q_n monoton wachsend, gleichmäßig beschränkt, und bilden daher eine beschränkte Folge in den Abbildungen von beschränkter Variation auf jedem kompakten Teilintervall von $\mathbb{R}^+$. Da diese kompakt in L^1 eingebettet sind, existiert eine Teilfolge (wieder mit Q_n bezeichnet), die fast überall in $\mathbb{R}^+_0$ punktweise gegen eine beschränkte, monoton wachsende Abbildung Q konvergiert. Es sei $\lambda = \lim_{t\to\infty} Q(t)$. Zu $k \in \mathbb{N}$ wählen wir $R_k \ge k$ so groß, daß $Q(R_k) \ge \lambda - 1/k$ gilt, und so daß $\lim_{n\to\infty} Q_n(R_k) = Q(R_k)$ ist. Nun setzen wir induktiv $n_k > n_{k-1}$ so groß, daß jeweils $|Q_{n_k}(R_k) - Q(R_k)| \le 1/k$ und $R_k \le r_{n_k}$ gelten. Dann folgt $|Q_{n_k}(R_k) - \lambda| \le 2/k$, also $\lim_{k\to\infty} Q_{n_k}(R_k) = \lambda$. Wir wählen die Teilfolge zu n_k aus und verwenden wieder den Index n. Es gilt also

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(R_n) = \lambda \qquad \text{und} \qquad R_n \le r_n\ .$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert $R > 0$ mit $|Q(R) - \lambda| \le \varepsilon/3$ und $\lim_{n\to\infty} Q_n(R) = Q(R)$. Es gibt ein n_0, so daß für $n \ge n_0$ gelten: $|Q_n(R_n) - \lambda| \le \varepsilon/3$, $|Q_n(R) - Q(R)| \le \varepsilon/3$ und $R_n \ge R$. Daraus folgt für alle $n \ge n_0$:

$$\begin{aligned}\mu_n(B_{R_n}(0) \setminus B_R(0)) &= |Q_n(R_n) - Q_n(R)| \\ &\le |Q_n(R_n) - \lambda| + |\lambda - Q(R)| + |Q(R) - Q_n(R)| \le \varepsilon \ ,\end{aligned}$$

also die Behauptung. □

5.17 Lemma. *Sei $u\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, mit $|u(r)|, |u'(r)| \le C_1 e^{-C_2 r}$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(|x|)|x|^2 \, dx = (N-1) \int_{\mathbb{R}^N_+} u(|z|) z_N \, dz \ .$$

Beweis. Zunächst bemerken wir: Ist $v\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit $|v(r)| \le C_1 e^{-C_2 r}$, dann liefert eine Rechnung in Polarkoordinaten (siehe z.B. den Anhang in [31]) ein $\mu > 0$, nur von N abhängig, mit

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} v(|z|) z_N \, dz = \mu \int_0^\infty v(r) r^N \, dr \ .$$

Zweimalige Anwendung dieser Gleichung liefert

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N_+} u'(|z|)|z| z_N \, dz &= \mu \int_0^\infty u'(r) r^{N+1} \, dr \\ &= -\mu(N+1) \int_0^\infty u(r) r^N \, dr \\ &= -(N+1) \int_{\mathbb{R}^N_+} u(|z|) z_N \, dz \ .\end{aligned}$$

Wir schreiben $z = (x, z_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ und erhalten für $x \in \mathbb{R}^{N-1}$

$$-u(|x|)|x|^2 = \int_0^\infty \frac{d}{dz_N}(u(|z|)|z|^2) \, dz_N = \int_0^\infty (u'(|z|)|z| + 2u(|z|)) z_N \, dz_N \ .$$

Daraus folgt nun mit Obigem

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(|x|)|x|^2 \, dx &= -\int_{\mathbb{R}^N_+} (u'(|z|)|z| + 2u(|z|)) z_N \, dz \\ &= (N-1) \int_{\mathbb{R}^N_+} u(|z|) z_N \, dz \ ,\end{aligned}$$

also die Behauptung. □

5.18 Lemma. *Seien $d_n \to 0$, $y_n \in \partial\Omega_{d_n}$ und $u_n \in E_{d_n}$ mit $\|(\mathrm{Id} - K_{d_n})[u_n]\|_{E_{d_n}} = o(1)$ für $n \to \infty$, und $\|u_n\|_{E_{d_n}}$ beschränkt. Dann gibt es $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N-1$, so daß für eine Teilfolge in y_n-Koordinaten gilt:*

$$\Big\| u_n - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \partial_i w \Big\|_{E_{d_n}} = o(1) .$$

Beweis. Wir verwenden die auf Seite 31 gegebene Abschneidefunktion η. Es seien wieder Φ und Ψ die begradigenden Diffeomorphismen auf $B_{\rho_0}(0)$ aus Lemma 4.1, und wir setzen wie im Beweis von (A4) im Abschnitt 4.2

$$\overline{\Phi}_n(z) = \frac{1}{d_n}\Phi_{d_n y_n}(d_n z)$$

für $z \in B_{\rho_0/d_n}(0)$. In y_n-Koordinaten definieren wir $v_n(z) = \eta_{\rho_0/2d_n}(|z|)u_n(z)$ und haben

$$\text{(5.28)} \qquad \operatorname{supp} v_n \subseteq B_{\rho_0/d_n}(0) \qquad \text{und} \qquad |\nabla v_n|^2 + v_n^2 \le C(|\nabla u_n|^2 + u_n^2) .$$

Es gilt $\|f'(w)u_n\|_{L^2(\Omega_{d_n} \setminus B_R(0))} \le C_1 e^{-C_2 R}$ mit $C_1, C_2 > 0$ unabhängig von n, weil $f'(w)$ bei ∞ exponentiell abfällt. Lemma 5.11 liefert dann zusammen mit den Voraussetzungen

$$\|u_n\|_{H^1(\Omega_n \setminus B_{\rho_0/2d_n})} \le \|(\mathrm{Id} - K_n)u_n\|_{E_{d_n}} + \|K_n u_n\|_{H^1(\Omega_n \setminus B_{\rho_0/2d_n})} = o(1) .$$

Weiter gilt wegen (5.28)

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega_n \setminus B_{\rho_0/2d_n})} \le C\|u_n\|_{H^1(\Omega_n \setminus B_{\rho_0/2d_n})} ,$$

insgesamt also

$$\text{(5.29)} \qquad \|u_n - v_n\|_{E_{d_n}} = \|u_n - v_n\|_{H^1(\Omega_n \setminus B_{\rho_0/2d_n})} = o(1)$$

und v_n bleibt bei 0 konzentriert in der E_d-Norm (in dem Sinne, wie im Beweis von (A4) auf Seite 26 verwendet). Wir setzen

$$w_n(z) = \begin{cases} v_n(\overline{\Phi}_n(z)) & \text{für } |z| \le \rho_0/d_n, z_N \ge 0 \\ v_n(\overline{\Phi}_n(z', -z_N)) & \text{für } |z| \le \rho_0/d_n, z_N \le 0 \\ 0 & \text{für } |z| \ge \rho_0/d_n . \end{cases}$$

Wegen (5.28) ist dann $w_n \in E_\infty$ und die w_n bleiben bei 0 konzentriert. Wegen $\overline{\Phi}_n \to \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N}$ in $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, ist außerdem

$$\text{(5.30)} \qquad \|v_n - w_n\|_{E_{d_n}} = o(1) .$$

Wie im Beweis von Proposition 3.6 in [2] folgt dann, daß $\|(\mathrm{Id} - K_\infty)[w_n]\|_{E_\infty} = o(1)$ gilt. Nach Lemma 5.12 ist K_∞ kompakt, d.h. wir können annehmen, daß (w_n) in E_∞ gegen ein Element in $\ker(\mathrm{Id} - K_\infty) = [\partial_1 w, \dots, \partial_N w]$ konvergiert. Da die w_n gerade sind bzgl. der z_N-Richtung, existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}$ mit

$$\Big\| w_n - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \partial_i w \Big\|_{E_\infty} = o(1) ,$$

und die Behauptung folgt aus (5.30). □

5.19 Lemma. *Es gibt* $\alpha^* \in (0,1]$, $2 + \alpha^* \leq 2^*$, $q_1^*, q_2^* \geq 0$, *so daß für* $T > 0$, $t_1, t_2 \in [T/2, 3T/2]$ *gilt:*

$$|f''(t_1) - f''(t_2)| \leq C(|T|^{q_1^*-1} + |T|^{q_2^*-1})|t_1 - t_2|^{\alpha^*} .$$

Beweis. Wir setzen $\alpha^* = \min_{i=1,2}\{2^* - 2, \alpha_1, \alpha_1 + q_i\}$. Daraus folgt $\alpha^* \in (0,1]$ und $\alpha^* + 2 \leq 2^*$. Weiter setzen wir für $i = 1, 2$: $q_i^* = q_i + \alpha_1 - \alpha^*$. Dann ist $q_i^* \geq 0$ und es folgt für T, t_1 und t_2 aus Bedingung (N3) an f:

$$\begin{aligned}
|f''(t_1) - f''(t_2)| &\leq C(|T|^{q_1-1} + |T|^{q_2-1})|t_1 - t_2|^{\alpha_1} \\
&= C(|T|^{q_1-1} + |T|^{q_2-1})T^{\alpha_1}\left|\frac{t_1 - t_2}{T}\right|^{\alpha_1} \\
&\leq C(|T|^{q_1-1} + |T|^{q_2-1})T^{\alpha_1-\alpha^*}|t_1 - t_2|^{\alpha^*} \\
&= C(|T|^{q_1^*-1} + |T|^{q_2^*-1})|t_1 - t_2|^{\alpha^*} .
\end{aligned}$$

Wir haben hier verwendet: $|t_1 - t_2| \leq T$ und $0 < \alpha^* \leq \alpha_1$. □

Literaturverzeichnis

[1] Ackermann, N.: Die Anzahl positiver Lösungen bei semilinearen elliptischen Neumann-Problemen. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (1995) 7, 8

[2] Ackermann, N.: Multiple single-peaked solutions of a class of semilinear Neumann problems via the category of the domain boundary. Calc. Var. **7**, 263–292 (1998) 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 22, 27, 28, 30, 44, 68

[3] Adams, R.: Sobolev Spaces. New York San Francisco London: Academic Press 1975 15, 62

[4] Adimurthi, Pacella, F., and Yadava, S.: Interaction between the geometry of the boundary and positive solutions of a semilinear Neumann problem with critical nonlinearity. J. Funct. Anal. **113**, 318–350 (1993) 8

[5] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P.H.: Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. Anal. **14**, 349–381 (1973) 7, 12

[6] Bahri, A. and Coron, J.M.: On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain. Comm. Pure Appl. Math. **41**, 253–294 (1988) 8

[7] Benci, V. and Cerami, G.: The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems. Arch. Rational Mech. Anal. **114**, 79–93 (1991) 8

[8] Benci, V. and Cerami, G.: Multiple positive solutions of some elliptic problems via the Morse Theory and the domain topology. Calc. Var. **2**, 29–48 (1994) 7, 8

[9] Berestycki, H. and Lions, P.L.: Nonlinear scalar field equations. Part I, Existence of a ground state. Arch. Rational Mech. Anal. **82**, 313–345 (1983) 7, 17

[10] Chang, K.C.: Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems, vol. 6 of Progr. Nonlin. Diff Eq. Appl. Boston: Birkhäuser 1993 26

[11] Chen, C.C. and Lin, C.S.: Uniqueness of the ground state solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Comm. Partial Differential Equations **16**, 1549–1572 (1991) 13

[12] Coti-Zelati, V. and Rabinowitz, P.H.: Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on $\mathbb{R}^N$. Comm. Pure Appl. Math. **45**, 1217–1269 (1992) 9

[13] Esteban, M.J.: Nonsymmetric ground states of symmetric variational problems. Comm. Pure Appl. Math. **44**, 259–274 (1991) 7

[14] Gidas, B., Ni, W.M., and Nirenberg, L.: Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$. Adv. in Math., Supplementary Studies **7A**, 369–402 (1981) 17

[15] Gierer, A.: Generation of biological patterns and form: Some physical, mathematical, and logical aspects. Prog. Biophys. molec. Biol. **37**, 1–47 (1981) 6

[16] Gilbarg, D. and Trudinger, N.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer 1983 14, 40, 53, 60, 61, 65

[17] Gui, C.: Existence of multi-bump solutions for nonlinear Schrödinger equations via variational method. Comm. Partial Differential Equations **21**, 787–820 (1996) 9

[18] Gui, C.: Multi-peak solutions for a semilinear Neumann problem. Duke Math. J. **84**, 739–769 (1996) 8

[19] Keller, E.F. and Segel, L.A.: Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. J. Theoret. Biol. **26**, 399–415 (1970) 6

[20] Lang, S.: Differential and Riemannian Manifolds. Springer, third edn. 1995 22

[21] Li, Y.: On a singularly perturbed elliptic equation. Adv. in Differential Equations **2**, 955–980 (1997) 9

[22] Li, Y. and Ni, W.M.: Radial symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$. Comm. Partial Differential Equations **18**, 1043–1054 (1993)

[23] Li, Y.Y.: The Dirichlet problem for singularly perturbed elliptic equations. Comm. Pure Appl. Math. **51**, 1445–1490 (1998) 9

[24] Li, Y.Y.: On a singularly perturbed equation with Neumann boundary condition. Comm. Partial Differential Equations **23**, 487–545 (1998) 12, 13

[25] Lin, C.S. and Ni, W.M.: On the diffusion coefficient of a semilinear Neumann problem. In: Hildebrandt, S., Kinderlehrer, D., and Miranda, M. (eds.), Calculus of Variations and Partial Differential Equations, no. 1340 in Lecture Notes in Mathematics, pp. 160–174, Berlin Heidelberg New York: Springer (1988)

[26] Lin, C.S., Ni, W.M., and Takagi, I.: Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system. J. Differential Equations **72**, 1–27 (1988) 6, 7, 17, 44

[27] Mancini, G. and Musina, R.: The role of the boundary in some semilinear Neumann problems. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **88**, 127–138 (1992) 8

[28] McLeod, K.: Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^n$, II. Trans. Amer. Math. Soc. **339**, 495–505 (1993) 13, 17

[29] Meinhardt, H.: Models of Biological Pattern Formation. Academic Press 1982 6

[30] Ni, W.M., Pan, X.B., and Takagi, I.: Singular behaviour of least-energy solutions of a semilinear Neumann problem involving critical Sobolev exponents. Duke Math. J. **67**, 1–20 (1992) 8

[31] Ni, W.M. and Takagi, I.: On the shape of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem. Comm. Pure Appl. Math. **44**, 819–851 (1991) 7, 8, 12, 13, 17, 38, 44, 67

[32] Ni, W.M. and Takagi, I.: Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem. Duke Math. J. **70**, 247–281 (1993) 8, 13, 61

[33] del Pino, M. and Felmer, P.: Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains. Calc. Var. **4**, 121–137 (1996) 9

[34] Ren, X.: Least-energy solutions to a non-autonomous semilinear problem with small diffusion coefficient. Electronic Journal of Differential Equations **5**, 1–21 (1993) 9

[35] Rey, O.: Boundary effect for an elliptic Neumann problem with critical nonlinearity. Comm. Partial Differential Equations **22**, 1055–1139 (1997) 8

[36] Stein, E.M.: Singular Integrals and Differentiability Properties. Princeton University Press 1970 40

[37] Wang, X.J.: Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. J. Differential Equations **93**, 283–310 (1991) 17, 44

[38] Wang, Z.Q.: On the existence of multiple, single-peaked solutions for a semilinear Neumann problem. Arch. Rational Mech. Anal. **120**, 375–399 (1992) 7, 8, 44

[39] Wang, Z.Q.: On the existence of positive solutions for semilinear Neumann problems in exterior domains. Comm. Partial Differential Equations **17**, 1309–1325 (1992) 7, 8

[40] Wang, Z.Q.: Remarks on a nonlinear Neumann problem with critical exponent. Houston J. Math. **20**, 671–684 (1994) 8

[41] Wang, Z.Q.: Construction of multi-peaked solutions for a nonlinear Neumann problem with critical exponent in symmetric domains. Nonlinear Anal. **27**, 1281–1306 (1996) 9

[42] Wang, Z.Q.: Existence and nonexistence of G-least energy solutions for a nonlinear Neumann problem with critical exponent. Preprint 9