

2. Grundlagen

2.1 Der "return-flow"

Es sei eine rechteckige Küvette mit endlicher Ausdehnung L und kleiner Schichtdicke d betrachtet. Eine Seitenwand (Thermode) der Küvette werde erwärmt, die andere gekühlt, so daß ein Temperaturgradient an einer eingefüllten Flüssigkeit anliegt. Der Temperaturgradient bewirkt einen Gradienten der Oberflächenspannung $d\sigma/dT$ - der sogenannte Marangonieffekt [Levich69] - und so eine antreibende Kraft an der Oberfläche, die die Flüssigkeit von der heißen Seite zur kalten Seite zieht ($d\sigma/dT < 0$), die thermokapillare Konvektion.

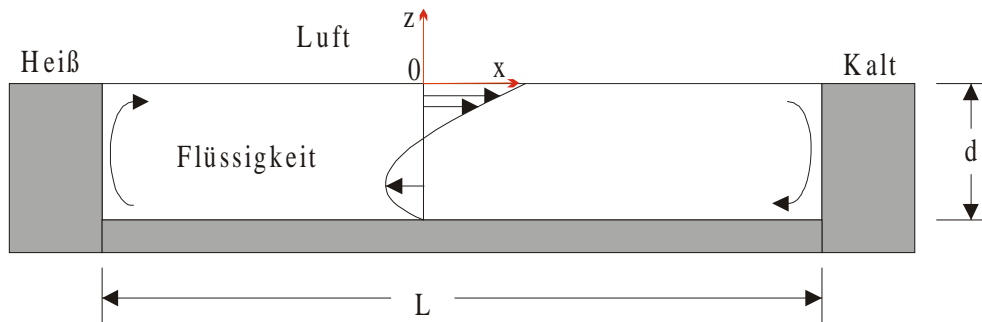


Abb. 2.1 Durch Marangonieffekt angetriebene "return-flow"-Strömung in endlicher Rechteckgeometrie.

Aus Kontinuitätsgründen bildet sich ein Rückstrom am Boden der Küvette aus, den SEN und DAVIS [Sen82] beschrieben und dessen Stabilität SMITH und DAVIS [Smith83] analysiert haben. Es bildet sich eine *return-flow* genannte Strömung. Diese Grundströmung der Küvette ist eine Überlagerung eines linearen Couette-Profiles und eines parabolischen Poiseuille-Profiles. Das Couette-Profil wird durch Scherkräfte des Marangonieffekts an der Oberfläche gebildet, das Poiseuille-Profil durch den sich durch die Kontinuitätsbedingungen bestimmten Druckgradienten.

Auftriebskräfte tragen ebenfalls zur Strömung bei und treiben sie mit dem gleichen Drehsinn an. Der Anteil der Auftriebströmung hängt von der Dicke d der Flüssigkeitsschicht ab. Für kleine Schichtdicken d dominiert die Marangonikonvektion.

Randbedingungen und Entdimensionalisierung der beschriebenen Geometrie finden sich in [Schneider95].

2.2 Hydrodynamische Kennzahlen

Die Strömung in einer solchen Küvette wird durch mehrere entdimensionalisierte Kennzahlen beschrieben:

Die Marangonizahl

$$Ma = - \frac{d\sigma}{dT} \frac{1}{\eta\chi} \cdot a \cdot \Delta T$$

mit

σ der Oberflächenspannung,

η der dynamischen Viskosität und

χ der thermischen Diffusivität.

Die Marangonizahl ist ein Maß für die Stärke der thermokapillaren Konvektion. Dabei ist a die charakteristische Länge für die Strömung, im Falle der Küvette die Schichtdicke d . Bei der obigen Notation handelt es sich um eine Definition der Marangonizahl, die vor allem bei experimentellen Arbeiten verwendet wird und sich auf die angelegte Temperaturdifferenz ΔT bezieht. Aufgrund von Effekten der thermischen Randschicht an den Thermoden unterscheidet sich der angelegte Temperaturgradient $\Delta T/L$ von dem über den größten Bereich der Oberfläche auftretenden Temperaturgradienten dT/dx . Bezieht man sich auf diesen Temperaturgradienten erhält man:

$$Ma = - \frac{d\sigma}{dT} \frac{1}{\eta\chi} \cdot d \cdot L \cdot \frac{dT}{dx}$$

Die Rayleighzahl

$$Ra = \frac{d\rho}{dT} \frac{g}{\nu\chi} \cdot d^2 \cdot L \cdot \Delta T$$

mit

ρ der Dichte der Flüssigkeit,

ν der kinematischen Viskosität,

χ der thermischen Diffusivität und

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

Die Rayleighzahl charakterisiert den Einfluß der Auftriebskonvektion.

Die Prandtlzahl

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$$

gibt die Stärke viskoser Kräfte im System wieder.

Die Kapillaritätszahl

$$\text{Ca} = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}}$$

wird auch kapillare Längenskala genannt. Sie gibt die Stärke kapillarer Kräfte bei Verformungen der freien Oberfläche an.

Das Seitenverhältnis

$$A = \frac{L}{d}$$

mit

L der Ausdehnung der Küvette zwischen beiden Thermoden und

d der Dicke der Flüssigkeitsschicht in der Küvette.

2.3 Bifurkationen

Die Bildung hydrodynamischer Instabilitäten läßt sich meist als Bifurkation im Phasenraum beschreiben. Stabile Strömungen besitzen im Phasenraum einen Attraktor in Form eines

Fixpunkts bei stationärer Strömung oder eines Grenzyklus bei periodischer Strömung.

Wird der kritische Parameter des Systems - Marangoni- und Reynoldszahl, auf experimenteller Seite die angelegte Temperaturdifferenz - erhöht, kann es zur Instabilität des Attraktors gegen Störungen kommen. Dabei tritt eine Verzweigung in mehrere Lösungen des hydrodynamischen Systems auf (Bifurkation). Das System nimmt dabei meist nur eine Lösung ein.

In hydrodynamischen Systemen wird meist eine HOPF-Bifurkation beim Übergang von stationärer zu periodischer Strömung beobachtet. Kennzeichnend für diese Bifurkation ist das wurzelförmige Anwachsen der Oszillationsamplitude bei Erhöhung des kritischen Parameters:

$$A = A_0 \sqrt{\frac{Re - Re^{krit.}}{Re^{krit.}}}$$

bzw.

$$A = B_0 \sqrt{\Delta T - \Delta T_{krit.}}$$

bei annähernd konstanter Frequenz [Berge84].

2.4 Hydrothermale Wellen

SMITH und DAVIS [Smith83, Smith86, Davis87] haben auf theoretischer Basis eine zeitabhängige Instabilität im "return-flow" untersucht, die sie hydrothermale Welle nennen. Es sei zunächst eine Flüssigkeit geringer Viskosität, also kleiner Prandtlzahl betrachtet. Die Hauptstromrichtung sei entlang der x-Achse. Weiterhin gehe man von einer zufällig entstandenen Störung in Form einer Linie auf der Flüssigkeitsoberfläche mit relativ zur Umgebung höherer Temperatur entlang der x-Achse aus. Aufgrund thermokapillarer Kräfte strömt Flüssigkeit von dieser heißen Linie weg und aus Kontinuitätsgründen von unten nach. Aufgrund des Temperaturprofils hat die von unten nachströmende Flüssigkeit eine geringere Temperatur und Geschwindigkeit und kühlt so die heiße Linie. Da die nachströmende Flüssigkeit eine geringere Geschwindigkeit als die Umgebung besitzt, wandert die Störung entgegen der Hauptströmung in negativer x-Richtung wobei der Temperaturunterschied weiter abnimmt, bis die heiße Linie verschwindet.

Aufgrund der Trägheit der Strömung transportiert der Aufstrom weiterhin kältere Flüssigkeit an die Oberfläche. Es entsteht eine Störung in Form einer kalten Linie, so daß sich der

Mechanismus umkehrt. Aufgrund thermokapillarer Kräfte wird wärmere Flüssigkeit zur kalten Linie gezogen. Dabei entsteht ein abwärts gerichteter Strom, der für ein Verschwinden der kalten Linie sorgt. Auch hier bleibt der abwärts gerichtete Strom auch nach dem Verschwinden der kalten Linie bestehen und erzeugt so erneut eine heiße Linie. So entsteht eine in y -Richtung laufende thermische Welle.

Für große Prandtlzahlen (wie sie für das in dieser Arbeit verwendete Ethanol, $Pr \sim 17$, gelten), also große Viskosität, kann die beschriebene Instabilität nicht entstehen, da keine Phasenverschiebung zwischen dem Auftreten der Störung und dem Auftreten des auf- oder abwärtsgerichteten Stroms existiert.

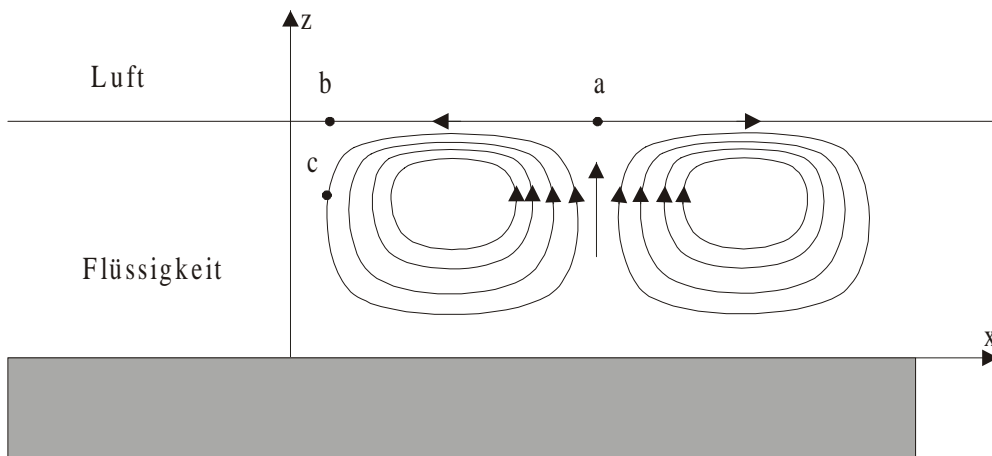


Abb. 2.2 Die dem "return-flow" überlagerten Stromlinien einer hydrothermalen Welle für große Prandtlzahlen. Die Hauptstromrichtung ist entlang der x -Achse in positiver Richtung.

Anstelle einer Störung parallel zur x -Achse wird nun eine heiße Linie parallel zur y -Achse betrachtet (Abb. 2.2, Punkt a). Ähnlich wie beim Mechanismus für kleine Prandtlzahlen kommt es zu einer aufwärts gerichteten Strömung, die die heiße Linie kühlt. Da aber am Punkt b eine relativ niedrigere Temperatur herrscht, kommt es dort zu einer Abwärtsströmung, in die wärmere Flüssigkeit hineinströmt. Dadurch wird der Punkt c unterhalb der Oberfläche stark erwärmt, der wiederum Punkt b durch diffusive Wärmeleitung heizt. Mit zeitlicher Verzögerung ergibt sich so eine neue heiße Linie am Punkt b. Es entsteht eine thermische Welle, die in negativer x -Richtung wandert.

Für endliche Prandtlzahlen treten beide Mechanismen auf, so daß sich die hydrothermale Welle schräg zur Hauptstromrichtung bewegt. Für $Pr \sim 17$ ergibt sich ein Winkel von etwa 20° .

Die kritische Wellenlänge der hydrothermalen Welle entspricht etwa $2,5d$ [Schwabe92, Kuhlmann96, Riley96].

2.5 Oberflächenwellen

Bei Kapillaritätszahlen Ca ungleich Null, ergibt sich aufgrund der Deformierbarkeit der Oberfläche eine weitere zeitabhängige Instabilität, die Oberflächenwelle [Smith83a]. Der Mechanismus ähnelt dem der hydrothermalen Welle, doch ergeben sich aufgrund der höheren Oberflächenenergie größere Wellenlängen. Die Oberflächenwellen können getrennt oder gekoppelt mit hydrothermalen Wellen auftreten [Schneider95].

2.6 Mehrfachrollenstruktur in dünnen Flüssigkeitsschichten

Im Gegensatz zu der linearen Stabilitätsanalyse von SMITH und DAVIS wurde in verschiedenen Experimenten in einer Küvette mit einem Seitenverhältnis $A \gg 1$ und großen Prandtlzahlen [Riley96, Schwabe92, Metzger94, Villers92, Ezersky93] das Auftreten von stationären Mehrfachrollenstrukturen beobachtet. Es handelt sich dabei um ortsfeste und in y -Richtung gleichförmige Konvektionsrollen mit einer Ausbreitungsrichtung entlang der x -Achse (Abb. 2.3). Der Rotationssinn der Konvektionsrollen entspricht dem Rotationssinn des "return-flow". Die Wellenlänge der Konvektionsrolle hängt hauptsächlich von der Schichtdicke d ab, nimmt jedoch mit ΔT zu [Schneider99].

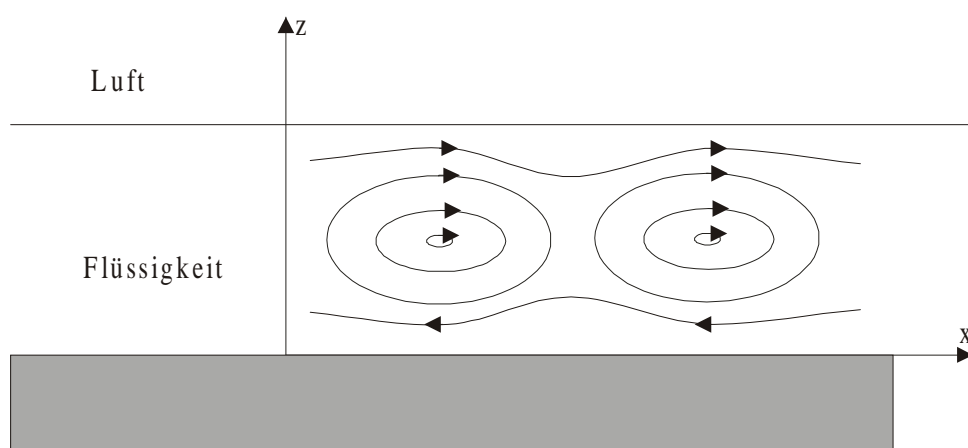


Abb. 2.3 Stromlinien der Mehrfachrollenstruktur.

Die Wirbelstärke der Konvektionsrollen nimmt mit zunehmendem Abstand von der heißen Wand ab [Riley96]. Aus den Arbeiten von RILEY und METZGER geht eine kritische Wellenlänge

der Konvektionsrollen von etwa $\lambda = 1,5$ d ... $2,5$ d hervor.

Die Mehrfachrollenstruktur wurde auch in numerischen Arbeiten [Villers92, Laure90, Ben-Hadid90, Cramer94] gefunden und läßt sich durch Scherkräfte innerhalb des "return-flow" erklären.

2.7 Oszillatorische Mehrfachrollen

Wird der Temperaturgradient an der freien Oberfläche weiter erhöht, treten bei der Mehrfachrollenstruktur Temperaturoszillationen auf [Schwabe92, Villers92, Riley96, Metzger94, Ezersky93, Daviaud93, Ezersky93a]. In Bezug auf das Strömungsfeld erkennt man die Zeitabhängigkeit der Strömung in einer Oszillation der Stromstärke der Konvektionsrollen. Dabei bewegt sich das Wirbelzentrum periodisch in x-Richtung, wobei sich benachbarte Wirbelzentren bei gleicher y-Koordinate gegenphasig verhalten.

Die Natur dieser zeitabhängigen Instabilität ist für große Prandtl-Zahlen annähernd zweidimensional und wird auch in numerischen, zweidimensionalen Arbeiten gefunden [z.B. Peltier93]. Laut PELTIER und BIRINGEN ist die Zeitabhängigkeit mit einem periodisch auftretenden kalten Flecks in der Nähe der heißen Wand verbunden. Dessen Auftreten ist mit einem konvektiven Wärmetransport von der kalten Wand und damit - im Gegensatz zu hydrothermalen Wellen - an eine endliche Geometrie gebunden.

Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß die beschriebene Zeitabhängigkeit des Strömungsfeldes auch durch die Überlagerung der stationären Mehrfachrollen und einer hydrothermalen Welle ähnlicher Wellenlänge entstehen kann. Wegen $\lambda_{\text{htw}} \sim 2,5$ d und $\lambda_{\text{mrs}} \sim 1,5..2,5$ und der fast zweidimensionalen Struktur der hydrothermalen Welle für große Prandtlzahlen ist die Unterscheidung zwischen oszillierenden Konvektionsrollen und der Überlagerung einer hydrothermalen Welle und einer stationären Konvektionsrolle schwierig. KUHLMANN [Kuhlmann96] weist außerdem darauf hin, daß das kritischste Seitenverhältnis für eine oszillatorische Mehrfachrollenstruktur bei $A \sim 2,5$ liegt und damit der kritischen Wellenlänge der hydrothermalen Welle entspricht.

Insgesamt ist es ungeklärt, ob der unter anderem von RILEY [Riley96] gemachte Unterschied zwischen einer Mischform aus stationärer Mehrfachrollenstruktur mit hydrothermalen Wellen und oszillatorischen Mehrfachrollen überhaupt existiert.

In diesem Zusammenhang ist die Beobachtung von GARCIMARTIN *et. al.* [Garcimartin97]

interessant. Sie fanden in einer Küvette bei Prandtlzahlen von 10, 15 und 20 eine Oszillation der Konvektionsrolle an der heißen Wand. Sie beschreiben, wie die oszillierende Rolle an der Oberfläche einen *heißen Punkt* absetzt, der eine laufende Welle entstehen läßt. Die so von der Konvektionsrolle erzeugte thermische Welle breitet sich senkrecht zum Temperaturgradienten von der heißen zur kalten Wand aus. Die Oszillationsfrequenz entspricht dabei der Umlaufperiode der Konvektionsrolle. Als Erklärung für die Oszillation vermuten GARCIMARTIN *et. al.* eine Instabilität der vertikalen thermischen Grenzschicht an der heißen Wand.

Inwieweit die beobachteten oszillatorischen Mehrfachrollen diesem Mechanismus entsprechen, ist unklar. Ebenso ist es nicht eindeutig, ob es sich bei den von SCHWABE *et. al.* [Schwabe92] beobachteten *short wavelength instabilities* tatsächlich um hydrothermale Wellen handelt.

Häufig ist unklar, ob es sich in den zitierten Publikationen um hydrothermale Wellen oder um oszillatorische Mehrfachrollenstrukturen handelt. Aufgrund der großen Ähnlichkeit werden im Zweifelsfall in dieser Arbeit beide Strukturen unter dem Begriff thermische Welle zusammengefaßt.

2.8 Form der freien Oberfläche

Betrachtet wird die Oberfläche einer Küvette mit einer Ausdehnung zwischen beiden Heizern von L und einer unendlichen Ausdehnung in y -Richtung. In diesem Fall kann die Oberfläche zweidimensional betrachtet werden. Der Nullpunkt des Koordinatensystems liege in der Mitte zwischen beiden Heizern und an der tiefsten Stelle der Oberfläche.

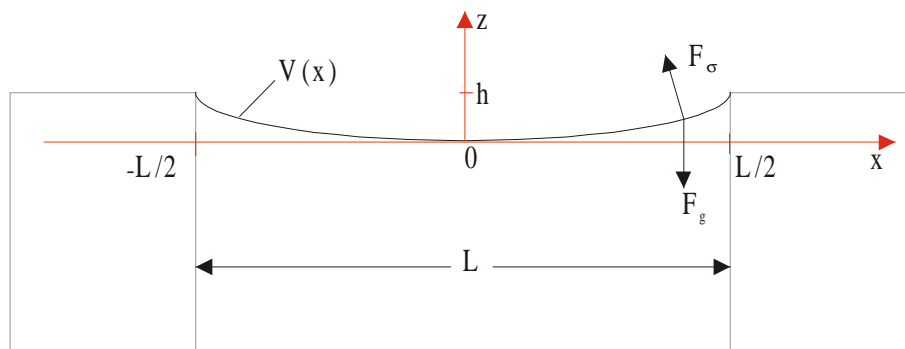


Abb. 2.4 Koordinatensystem der betrachteten Oberfläche

Aufgrund der Einflüsse von Schwerkraft und Oberflächenenergie bildet sich eine Oberfläche wie in Abb. 2.4 gezeigt.

Die Form der freien Oberfläche wird aus dem Gleichgewicht von Oberflächenspannung und Gewichtskraft bestimmt:

$$F_{\sigma} + F_G = \text{const.}$$

Es sei

L die Spaltbreite der Küvette (Küvettenlänge),

h die Unterfüllung der Küvette,

V die Form der Oberfläche und

\vec{n} der Normalenvektor auf der Oberfläche.

Die Oberflächenspannung ergibt sich zu

$$\vec{F}_{\sigma} = \sigma \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \cdot \vec{n} \cdot dx \cdot dy$$

$$F_{\sigma} = \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\left(\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right)^2 + 1}} \cdot dx \cdot dy$$

Die Gewichtskraft lautet:

$$\vec{F}_G = -\rho g V(x) \cdot dx \cdot dy$$

Man erhält so die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} \frac{\sigma}{\sqrt{\left(\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right)^2 + 1}} \cdot dx \cdot dy - \rho g V(x) \cdot dx \cdot dy = \text{const.}$$

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)^2 + 1}} - \frac{\rho g}{\sigma} V(x) = \text{const.} \quad (1)$$

Für kleine Oberflächenkrümmungen, also für geringe Unterfüllungen der Küvette kann der Winkel zwischen F_{\square} und F_G als klein angenommen werden, also $\sqrt{\left(\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right)^2 + 1} \approx 1$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V(x)}{dx^2} - \frac{\rho g}{\sigma} V(x) &= \text{const.} \\ \frac{d^2 V(x)}{dx^2} - \frac{2}{Ca^2} V(x) &= \text{const.} \end{aligned} \quad (2)$$

mit anderen Worten ($P_{\text{schwere}} = \rho g V(x)$, $P_{\text{kapillar}} = -\sigma \frac{d^2 V(x)}{dx^2}$):

$$P_{\text{schwere}} + P_{\text{kapillar}} = \text{const.}$$

Wie in Abb. 2.4 gezeigt, soll die Funktion V symmetrisch um die z -Achse sein. Ferner gelten folgende Randbedingungen:

$$\frac{d^2 V(0)}{dx^2} = 0$$

$$V(0) = 0$$

$$V\left(\frac{L}{2}\right) = V\left(-\frac{L}{2}\right) = h$$

Diese Differentialgleichung kann mit zwei symmetrisch zum 0-Punkt überlagerten Exponentialfunktionen gelöst werden:

$$V(x) = a \cdot (e^{bx} + e^{-bx}) + c = 2a \cdot \cosh(bx) + c.$$

Diese Funktion erfüllt sofort die Symmetriebedingung $V(x)=V(-x)$ und $\frac{d^2 V(0)}{dx^2} = 0$.

Mit

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = 2ab \cdot \cosh bx$$

ergibt sich

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = b^2 V(x) - c$$

Mit (2) folgt

$$b^2 \cdot V(x) - \frac{2}{Ca^2} V(x) - c = \text{const.}$$

Dies kann nur dann für alle x erfüllt sein, wenn

$$b = \frac{\sqrt{2}}{Ca}. \quad (3)$$

Mit $V(0)=0$ ergibt sich

$$V(0) = 2a \cdot \cosh(0) + c$$

$$V(0) = 2a + c$$

$$c = -2a. \quad (4)$$

Aus $V\left(\frac{L}{2}\right) = h$ und (4) folgt

$$V\left(\frac{L}{2}\right) = 2a \cdot \cosh\left(\frac{bL}{2}\right) - 2a = h$$

$$2a \cdot \left(\cosh\left(\frac{bL}{2}\right) - 1 \right) = h$$

$$a = \frac{1}{2} \frac{h}{\cosh\left(\frac{bL}{2}\right) - 1}$$

Damit ergibt sich aus (3) und (4)

$$c = - \frac{h}{\cosh\left(\frac{bL}{2}\right) - 1} \quad (6)$$

Es folgt ((3),(5),(6)):

$$V(x) = \frac{h}{\cosh\left(\frac{L}{\sqrt{2}Ca}\right) - 1} \left(\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{Ca}x\right) - 1 \right) \quad (7)$$

Der Winkel zwischen Thermode und freier Oberfläche φ entspricht:

$$\varphi = \arctan \frac{d}{dx} V\left(\frac{L}{2}\right),$$

wobei

$$\frac{d}{dx} V\left(\frac{L}{2}\right) = \sqrt{2} \frac{h}{Ca}$$

eine lineare Funktion der Unterfüllung h ist.

Es sei

$$U(x) = e^{bx} + e^{-bx},$$

also

$$V(x) = aU(x) + c.$$

Zur Betrachtung des Einflusses des Wurzelterms in der ursprünglichen Differentialgleichung sei nun eine Funktion

$$V_2(x) = a_2 U(x) + c_2$$

betrachtet, die näherungsweise Gleichung (1) genüge.

Setzt man diese in (1) ein, so erhält man

$$a_2 \frac{\frac{d^2 U(x)}{dx^2}}{\sqrt{\left(\frac{dV_2(x)}{dx}\right)^2 + 1}} - \frac{\sqrt{2}}{Ca} V_2(x) = \text{const.}$$

Setzt man nun

$$a_2 = a \cdot \sqrt{\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)^2 + 1}$$

erhält man als Näherung die gleiche Lösung wie für (2), jedoch mit anderem Vorfaktor

$$a_2 = \frac{1}{2} \frac{h}{\cosh\left(\frac{L}{\sqrt{2}Ca}\right) - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)^2 + 1}} \quad (8)$$

Das bedeutet insbesondere, daß die Steigung um den Faktor $\sqrt{\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)^2 + 1}$ größer wird.

Dieser Faktor kann als Störung, die näherungsweise linear von h abhängt betrachtet werden.

Damit kann Gleichung (8) durch

$$a_2 = \frac{1}{2} \frac{h}{\cosh\left(\frac{L}{\sqrt{2}Ca}\right) - 1} \left(1 + \sqrt{\left(\frac{dV(h_0)}{dx}\right)^2 + 1} \right) \frac{h}{h_0}$$

genähert werden.

Der Kontaktwinkel zwischen freier Oberfläche und Thermode beträgt bei typischer Unterfüllung ungefähr 45° , also $V'(l) \sim 1$. Daher wird h_0 so gewählt, daß $V'(l)=1$:

$$h_0 = \frac{Ca}{\sqrt{2}}$$

Damit ergibt sich die Steigung an der Kontaktstelle zwischen freier Oberfläche und Thermode zu

$$\frac{d}{dx} V_2\left(\frac{L}{2}\right) = h \cdot (1 + Ca \cdot h) \cdot \frac{\sqrt{2}}{Ca}.$$

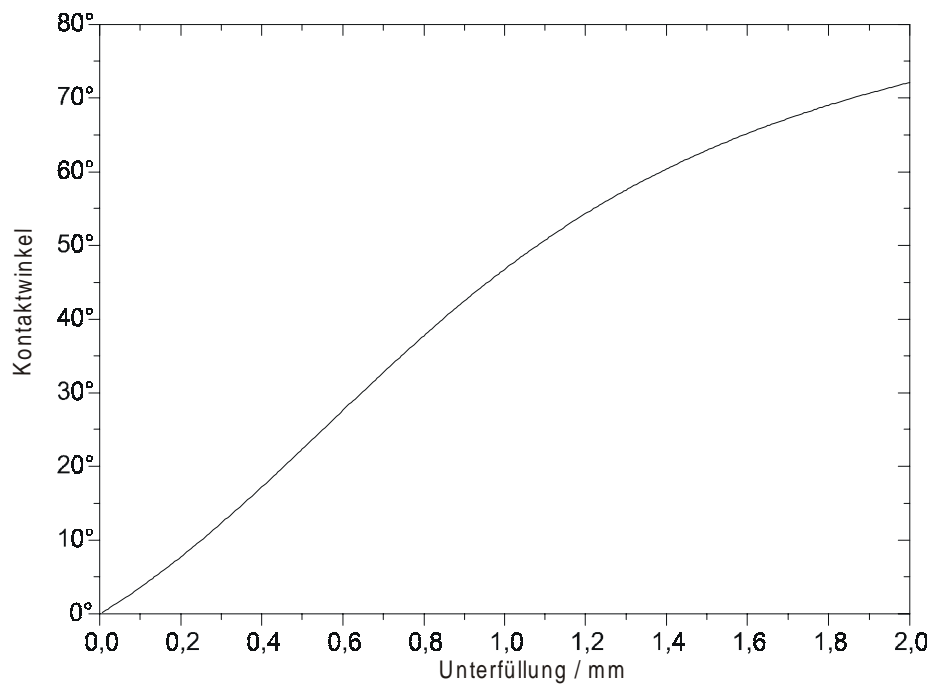


Abb. 2.5 Abhängigkeit des Kontaktwinkels an der Kontaktstelle zwischen freier Oberfläche und Thermode für Ethanol bei einer Temperatur von 20°C .

2.9 Schwerewellen

Bei Schwerewellen handelt es sich um transversale Wellen auf der Oberfläche von Flüssigkeiten, die nur durch den Schweredruck

$$P_{\text{schwere}} = \rho g \Delta z$$

mit

ρ der Dichte der Flüssigkeit und

Δz der Amplitude der Welle

und nicht durch Kapillarkräfte angetrieben wird ($\sigma = 0$).

Ist c die Phasengeschwindigkeit der Schwerewelle und v die Geschwindigkeit eines betrachteten kleinen Flüssigkeitsvolumens, so muß die kinetische Energie des Flüssigkeitsvolumens im Wellental um dessen potentielle Energie größer sein als beim Wellenberg:

$$\frac{1}{2} m \cdot (c + v)^2 = 2mg \cdot \Delta z + \frac{1}{2} m \cdot (c - v)^2$$

Damit ergibt sich

$$v = \frac{g \cdot \Delta z}{c}$$

Mit $\omega = v/h$ ergibt sich die Frequenz der Schwerewelle zu

$$\omega = \frac{g}{c}$$

und damit die Phasengeschwindigkeit und Frequenz zu

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad v = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

2.10 Kapillarwellen

Betrachtet man $\sigma > 0$, vernachlässigt aber den Schweredruck, erhält man die Kapillarwelle. Sie wird durch den Kapillardruck

$$P_{\text{kap.}} = \frac{\sigma}{r} \approx \sigma y''$$

angetrieben wird. Geht man von einer sinusförmigen Welle kleiner Amplitude aus, ergibt sich der Kapillardruck zu

$$P_{\text{kap.}} = \frac{\sigma 4\pi^2}{\lambda^2} \Delta z \text{ [z.B. Gerthsen98].}$$

Äquivalent zur Schwerewelle erhält man Phasengeschwindigkeit und Frequenz

$$c_{\text{kap.}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot \sigma}{\rho \cdot \lambda}},$$

$$v = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\rho \lambda}}.$$

Allgemein tritt ein Mischzustand von Kapillarwelle und Schwerewelle, die kapillare Schwerewelle auf. Der Übergangsbereich liegt bei

$$c_{\text{kap.}} = c_{\text{schwere.}}$$

Dies ist für

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \cdot g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \text{Ca} = 10,8 \text{ mm (für Ethanol bei } 20^\circ \text{C)}$$

und damit für die ungefähre Größenordnung der Geometrie der in dieser Arbeit verwendeten Küvette der Fall.

Wie später in der Arbeit gezeigt liegen die Wellenlängen der beobachteten Wellen vorwiegend zwischen 15 mm und 80 mm, d. h. der Einfluß des Schwerdrucks ist größer als der des Kapillardrucks und die Wellen können weitgehend als Schwerewellen beschrieben werden.

2.11 Oszillationen der freien Oberfläche

In endlichen Geometrien, z. B. bei der in dieser Arbeit verwendeten rechteckigen Küvette, treten die beschriebenen Schwerewellen als stehende Wellen durch Reflexion an den Seitenwänden auf. Betrachtet man die Wellengleichung linear, können die so entstehenden Schwingungen weitgehend wie Membranschwingungen behandelt werden. Die Oberflächenschwingungen unterscheiden sich von einer rechteckig eingespannten Membran durch die Randbedingungen.

Wichtigste Randbedingung ist der Erhalt des Flüssigkeitsvolumens. Das Integral über die Auslenkung der freien Oberfläche muß Null sein. Der Nullpunkt des Koordinatensystems ist die Küvettenmitte. L sei die Ausdehnung der Küvette in x -Richtung und B die Ausdehnung in y -Richtung. Unter der Voraussetzung kleiner Amplituden genügen die folgenden beiden zweidimensionalen Lösungen den Randbedingungen und der Wellengleichung:

$$z = a \cdot \cos\left(\left(x + \frac{L}{2}\right) \frac{n \cdot \pi}{L}\right) \cdot \sin \varpi t, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

und

$$z = a \cdot \cos\left(\left(y + \frac{B}{2}\right) \frac{m \cdot \pi}{B}\right) \cdot \sin \varpi t, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Zusätzlich zu den beiden zweidimensionalen Lösungen existiert eine dreidimensionale Lösung:

$$z = a \cdot \cos\left(\left(x + \frac{L}{2}\right) \frac{k \cdot \pi}{2L}\right) \cdot \cos\left(\left(y + \frac{B}{2}\right) \frac{l \cdot \pi}{2B}\right) \cdot \sin \varpi t, \quad k, l = 1, 2, 3 \dots \text{ [Verma62]}.$$

Damit ergeben sich die Wellenlängen zu

$$\lambda_n = 2 L/n,$$

$$\lambda_m = 2 B/m \text{ und}$$

$$\lambda_{k,l} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{4L}\right)^2 + \left(\frac{l}{4B}\right)^2}}.$$

Abb. 2.6. skizziert die ersten beiden Moden der eindimensionalen Lösung zum Zeitpunkt $t=\omega/4$. Man erkennt, daß das Volumen unter der Kurve konstant ist; die Schwingungsbäuche liegen an den Rändern der Küvette.

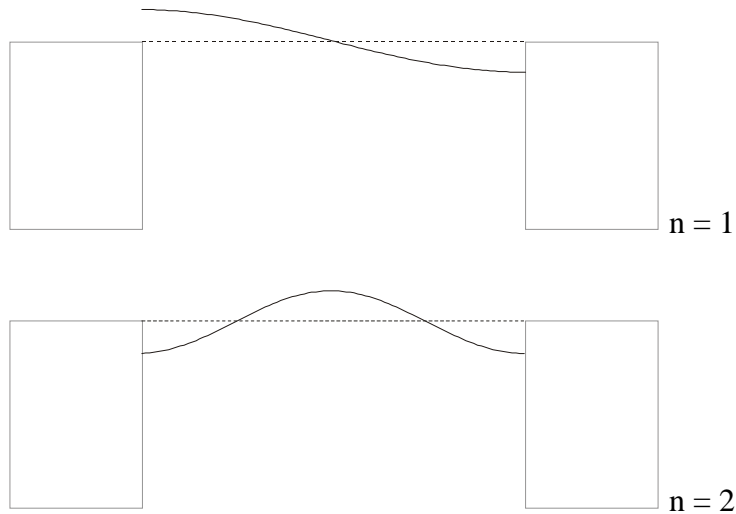


Abb. 2.6 Mode $n=1$ und $n=2$ der eindimensionalen Lösung.

Nach den Überlegungen zur Frequenz einer Schwerewelle ergeben sich die Frequenzen der Lösungen zu

$$v_n = \sqrt{\frac{n \cdot g}{\pi \cdot L}},$$

$$v_m = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\pi \cdot B}} \text{ und}$$

$$v_{k,l} = \sqrt[4]{\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{k}{4L}\right)^2 + \left(\frac{l}{4B}\right)^2}}$$

Allgemein existieren unendlich viele Lösungen mit gleicher Wellenlänge, da der Winkel zwischen x-Achse und Ausbreitungsrichtung der stehenden Welle beliebig gewählt werden kann. Nichtlineare Untersuchungen zeigen jedoch, daß nur wenige Lösungen stabilen stehenden Wellen entsprechen.

BRYANT und STIASSNIE [Bryant95] finden folgende drei Lösungen:

$$y = a \cdot \cos\left(k \cdot \left(x + \frac{L}{2}\right)\right) \cdot \cos \omega t \pm a \cdot \sin\left(k \cdot \left(y + \frac{B}{2}\right)\right) \cdot \cos \omega t$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{k}} \left(1 - 0,30077 \cdot k^2 \cdot a^2\right),$$

$$y = a \cdot \cos\left(k \cdot \left(x + \frac{L}{2}\right)\right) \cdot \cos \omega t \pm a \cdot \cos\left(k \cdot \left(y + \frac{B}{2}\right)\right) \cdot \sin \omega t$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{k}} \left(1 - 0,07423 \cdot k^2 \cdot a^2\right)$$

und

$$\begin{aligned} y = & a \cdot \cos\left(k \cdot \left(x + \frac{L}{2}\right)\right) \cdot \cos \omega t \pm a \cdot \cos\left(k \cdot \left(y + \frac{B}{2}\right)\right) \cdot \cos \omega t \\ & \pm 0,25960 \cdot \left(a \cdot \cos\left(4k \cdot \left(x + \frac{L}{2}\right)\right) \cdot \cos 2\omega t \pm a \cdot \cos\left(4k \cdot \left(y + \frac{L}{2}\right)\right) \cdot \cos 2\omega t \right) \end{aligned} \quad (9)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{k}} \left(1 - 0,29907 \cdot k^2 \cdot a^2\right).$$

Man erkennt, daß diese Lösungen für kleine Amplituden a sich als Linearkombination der oben angegebenen Lösungen bei linearer Betrachtung darstellen lassen. Die Kopplung der Grundschwingung und der dritten Oberschwingung bei Lösung (9) entsteht durch eine parametrische Resonanz. Sie tritt bei der dritten, statt der ersten Oberschwingung auf, da die Frequenz der stehenden Welle von der Wurzel der Modenzahl abhängt. Ganzzahlige Verhältnisse von Oberschwingungen und Grundschwingungen ergeben sich daher nur, wenn die

Modenzahl eine Quadratzahl ist. In einem Experiment sollte man daher eher die dritte und die achte als andere Oberschwingungen beobachten.

Für die stehenden Wellen in einer Küvette mit geringer Unterfüllung, wie sie in dieser Arbeit verwendet wird, muß beachtet werden, daß die Flüssigkeitsoberfläche an den Rändern der Küvette festgelegt ist:

$$z\left(x = \pm \frac{L}{2}\right) = z\left(y = \pm \frac{B}{2}\right) = 0.$$

Da die Schwingungsbäuche der oben beschriebenen stehenden Wellen bei $x = \pm L/2$ und $y = \pm B/2$ liegen, existiert ein Übergangsbereich nahe der Küvettenwände, in der die z-Auslenkung der Welle aufgrund von Kapillarkräften auf Null zurückgeht.

In diesem Bereich muß (bei kleinen Amplituden)

$$P_{\text{kap.}} + P_{\text{schwere}} = 0$$

und damit

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + \frac{2}{Ca^2} u(x) = 0 \quad (\text{vgl. Gl. (2)}) \quad \text{mit} \quad z = u(x) \sin \omega t$$

gelten. Gleichzeitig muß der Bereich der Wellengleichung genügen. Anders als in Kap. 2.7 muß daher eine periodische Funktion zur Lösung angesetzt werden:

$$u(x) = a' \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{Ca} \cdot (x - L)\right).$$

Damit erhält man die charakteristische Wellenlänge des Bereiches als

$$\lambda_{\text{kap.}} = \pi\sqrt{2} \cdot Ca = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}},$$

also genau die Wellenlänge, bei der Kapillarwellen in Schwerewellen übergehen.

Damit die Gesamtfunktion weiterhin der Wellengleichung und den Randbedingungen genügt,

muß der Übergangspunkt zwischen beiden Lösungen stetig differenzierbar sein. Man erhält:

$$z = \begin{cases} a \cdot \cos \left(\left(x + \frac{L'}{2} \right) \frac{n \cdot \pi}{L'} \right) \cdot \sin \omega t & \text{für } |x| \leq \frac{L'}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ a \cdot \sin \left(\left(x - \frac{L'}{2} \right) \frac{2\pi}{\lambda_{\text{kap.}}} \right) \cdot \sin \omega t & \text{für } |x| > \frac{L'}{2} \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} a \cdot \cos \left(\left(y + \frac{B'}{2} \right) \frac{m \cdot \pi}{B'} \right) \cdot \sin \omega t & \text{für } |y| \leq \frac{B'}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \\ a \cdot \sin \left(\left(y - \frac{B'}{2} \right) \frac{2\pi}{\lambda_{\text{kap.}}} \right) \cdot \sin \omega t & \text{für } |y| > \frac{B'}{2} \end{cases}$$

und

$$z = \begin{cases} a \cdot \cos \left(\left(x + \frac{L'}{2} \right) \frac{k \cdot \pi}{2L'} \right) \cdot \cos \left(\left(y + \frac{B'}{2} \right) \frac{l \cdot \pi}{2B'} \right) \cdot \sin \omega t & \text{für } |x| \leq \frac{L'}{2}, |y| \leq \frac{B'}{2}, \quad k, l = 1, 2, 3, \dots \\ a \cdot \sin \left(\left(x + \frac{L'}{2} \right) \frac{2\pi}{\lambda_{\text{kap.}}} \right) \cdot \cos \left(\left(y + \frac{B'}{2} \right) \frac{l \cdot \pi}{2B'} \right) \cdot \sin \omega t & \text{für } |x| > \frac{L'}{2}, |y| \leq \frac{B'}{2}, \quad l = 1, 2, 3, \dots \\ a \cdot \cos \left(\left(x + \frac{L'}{2} \right) \frac{k \cdot \pi}{2L'} \right) \cdot \sin \left(\left(y + \frac{B'}{2} \right) \frac{2\pi}{\lambda_{\text{kap.}}} \right) \cdot \sin \omega t & \text{für } |x| \leq \frac{L'}{2}, |y| > \frac{B'}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ a \cdot \sin \left(\left(x + \frac{L'}{2} \right) \frac{2\pi}{\lambda_{\text{kap.}}} \right) \cdot \sin \left(\left(y + \frac{B'}{2} \right) \frac{2\pi}{\lambda_{\text{kap.}}} \right) \cdot \sin \omega t & \text{für } |x| > \frac{L'}{2}, |y| > \frac{B'}{2} \end{cases}$$

mit

$$L' = L - \frac{\lambda_{\text{kap.}}}{2}$$

$$B' = B - \frac{\lambda_{\text{kap.}}}{2}.$$

Der Übergangsbereich verkürzt also die effektive Ausdehnung der Küvette um $\frac{1}{2} \lambda_{\text{kap.}}$.

Entsprechend ergeben sich die Wellenlängen und Frequenzen zu:

$$\lambda_n = 2 L'/n, \quad (10)$$

$$\lambda_m = 2 B'/m \text{ und} \quad (11)$$

$$\lambda_{k,1} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{4L'}\right)^2 + \left(\frac{1}{4B'}\right)^2}}. \quad (12)$$

Nach den Überlegungen zur Frequenz einer Schwerewelle ergeben sich die Frequenzen der Lösungen zu

$$v_n = \sqrt{\frac{n \cdot g}{\pi \cdot L'}},$$

$$v_m = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\pi \cdot B'}} \text{ und}$$

$$v_{k,1} = \sqrt[4]{\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{k}{4L'}\right)^2 + \left(\frac{1}{4B'}\right)^2}}$$

Für eine exakte Bestimmung von kapillaren Oberflächenwellen in einer rechteckigen Küvette mit festgelegten Rändern muß die Laplacegleichung für das Geschwindigkeitspotential Ψ mit Störung u gelöst werden [Weidman87]:

$$\nabla^2 \Psi = 0$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi - \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u \right) + g \cdot u = 0 \quad \text{für } x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{\partial}{\partial t} u \quad \text{für } z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = 0 \quad \text{für} \quad z = -d$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi = 0 \quad \text{für} \quad x = \pm L/2$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Psi = 0 \quad \text{für} \quad y = \pm B/2.$$

Da sich laut WEIDMAN und NORRIS keine separierten Lösungen finden lassen, ist eine analytische Lösung schwierig. Es existieren verschiedene Näherungslösungen und Überlegungen vor allem zu kapillaren Schwerewellen in langen Kanälen, bei denen die letzte Randbedingung entfällt [Scott78, Benjamin79, Heckerman79, Benjamin80, Shen83, Graham-Eagle83, Benjamin85].

Bezüglich der oben gemachten Näherung ist folgender Punkt aus der Arbeit von WEIDMAN und NORRIS interessant. Sie setzen die Störung (Festlegung der Oberfläche nur in einer Dimension: $u(\pm B/2) = 0$) als

$$u(x,y,t) = a \cdot f(y) \cdot \sin(kx - \omega t)$$

an. Zusammen mit einer Näherung des Geschwindigkeitspotentials

$$\Psi = -i\omega \cdot f(y) \cdot \frac{\cosh(k \cdot (z + d))}{k} \cdot \sinh(k \cdot d) \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

erhalten sie (unter Vernachlässigung des Einflusses des Kontaktwinkels) für $f(y)$ die Lösung

$$f(y) = \frac{\cosh\left(y \cdot \frac{\sqrt{2}}{Ca}\right) - \cosh\left(\frac{B\sqrt{2}}{2 \cdot Ca}\right)}{1 - \cosh\left(\frac{B\sqrt{2}}{2 \cdot Ca}\right)}.$$

Diese Gleichung entspricht $1 - V/h$ mit V aus Gleichung (7). $f(y)$ beschreibt also nichts anderes als die Form der freien Oberfläche bei einer statischen Über- oder Unterfüllung, die der Amplitude a der Oberflächenwelle entspricht.

Diese Lösung kann auch als Näherung für die Form der Oberfläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung einer stehenden Welle in der rechteckigen Küvette verwendet werden.