Blockierende Mengen in endlichen projektiven Räumen

Dissertation
zur
Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“
am Fachbereich Mathematik und
Informatik, Physik, Geographie
der Justus-Liebig-Universität Gießen

von
Martin Bokler

Gießen, 2001

Dekan:	Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher
I. Berichterstatter:	Prof. Dr. Klaus Metsch
II. Berichterstatter:	Prof. Dr. Thomas Meixner
Tag der mündlichen Prüfung:	13.12.2001

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorwort

Blockierende Mengen wurden zuerst in der Graphentheorie betrachtet. Dort wurde untersucht, wie man die Ecken eines Graphen so mit 2 Farben einfärben kann, daß jede Kante mindestens eine Ecke jeder Farbe besitzt.
In der vorliegenden Arbeit werden blockierende Mengen in endlichen projektiven Räumen untersucht. Der Gedanke dabei ist, Punktmengen anhand einfacher kombinatorischer Eigenschaften zu charakterisieren, um geometrische Strukturen zu finden.
Der projektive Raum mit endlich vielen Punkten ist sehr komplex. Daher betrachtet man Teilstrukturen (ein anderes Beispiel für solche Teilstrukturen sind Quadriken), die besser zu verstehen sind. Eine weitere Motivation für die Untersuchung blockierender Mengen ist, daß diese in anderen Bereichen der projektiven Geometrie Anwendungen finden. So kann gezeigt werden, daß die von einer maximalen Teilfaserung nicht überdeckten Punkte eine geradenblockierende Menge bilden.

In dieser Dissertation werden m-blockierende Mengen in n-dimensionalen projektiven Räumen endlicher Ordnung untersucht. Dies sind Punktmengen, die jeden $(n-m)$-dimensionalen Unterraum in mindestens einem Punkt treffen. Für Räume quadratischer Ordnung ungleich 4 werden hier m-blockierende Mengen mit höchstens $q^m + q^{m-1} + \cdots + q + 1 + \sqrt{q}(q^{m-1} + \cdots + q + 1)$ Punkten betrachtet und es wird gezeigt, daß diese einen Kegel mit einem Unterraum als Spitze und einem Baerunterraum als Basis enthalten. Für Räume beliebiger Ordnung ungleich 2 werden die Abschätzungen für die Kardinalität einer m-blockierenden Menge, die keine der bekannten Strukturen enthält, verbessert. Außerdem wird gezeigt, daß man sich in Abhängigkeit von der Anzahl der in der m-blockierenden Menge enthaltenen Punkte bei der Untersuchung dieser Mengen auf Unterräume bestimmter Dimension beschränken kann. Dadurch wird die Untersuchung eventuell vereinfacht. Für projektive Räume, deren Ordnung quadratisch ist, sind diese Abschätzungen scharf. Das heißt es gibt Beispiele m-blockierender Mengen, die diese Abschätzung mit Gleichheit erfüllen. Für Räume nichtquadratischer Ordnung sind jedoch keine Beispiele bekannt, die diese Abschätzungen erfüllen.

In dem Abschnitt 2.1 werden zunächst einige Beispiele m-blockierender Mengen angeführt. Für diese wird begründet, warum sie m-blockierende Mengen sind. Dann werden im Abschnitt 2.2 die benötigten Definitionen und die bisher bekannten Resultate über m-blockierende Mengen, die in Zusammenhang mit den Resultaten dieser Arbeit stehen, aufgelistet. Es werden hier auch schon einige Lemmata bewiesen, die in späteren Kapiteln mehrfach verwendet werden.
In Kapitel 3 werden projektive Räume quadratischer Ordnung ungleich 4 betrachtet. Zentrales Ergebnis ist die Charakterisierung minimaler m-blockierender Mengen mit höchstens $q^m + q^{m-1} + \cdots + q + 1 + \sqrt{q}(q^{m-1} + \cdots + q + 1)$ Punkten. Die Ergebnisse dieses Abschnitts wurden schon veröffentlicht [6, 7]. Darüber hinaus ist es im Rahmen dieser Dissertation möglich, die Ergebnisse dieser Publikationen miteinander zu verknüpfen, so daß der ganze Weg von den bisher bekannten Resultaten bis zu dem neuen Satz dargestellt werden kann, wodurch die verschiedenen Beweistechniken deutlicher werden. Außerdem wird die Aussage auch für Räume der Ordnung 9 nachgewiesen.
In Kapitel 4 werden schließlich projektive Räume beliebiger Ordnung ungleich 2 betrachtet. Neben dem Satz, der die Kardinalität einer minimalen m-blockierenden Menge mit der Dimension des Erzeugnisses dieser Menge verknüpft, kann die Grenze für die Kardinalität m-blockierender Mengen, bis zu der man die Struktur dieser Mengen kennt, um $r_2(q) \cdot q^{m-2} - 1$ nach oben verschoben werden. Für projektive Räume, deren Ordnung eine kubische Zahl ist, ist die Verbesserung sogar noch größer, nämlich $r_2(q) \cdot (q^{m-2} + \cdots + q + 1)$. Außerdem lassen sich die hier verwendeten Methoden auf andere Beispiele übertragen. Das heißt, findet man neue Schranken für die Kardinalität m-blockierender Mengen, die keine der bekannten Strukturen enthalten, so kann man daraus mit den hier entwickelten Techniken Abschätzungen für projektive Räume höherer Dimension ableiten.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. Klaus Metsch für die interessante Aufgabenstellung und die zahlreichen Anregungen und kritischen Fragen bedanken. Darüber hinaus danke ich allen, die in der Zeit der Promotion für mich da waren, insbesondere meiner Familie, Mareike und Martha.

Kapitel 2

Grundlagen

Definition 2.1 *Für $m \leq n$ ist eine Punktmenge B von $\mathcal{P} := PG(n,q)$ eine* ***m-blockierende Menge*** *von $\mathcal{P}$ genau dann, wenn jeder $(n-m)$-dimensionale Unterraum von $\mathcal{P}$ mindestens einen Punkt von B enthält.*

Manchmal nennen wir eine $(n-1)$-blockierende Menge von $PG(n,q)$ eine **geradenblockierende Menge**. Punkte (Geraden, Ebenen, ...), die in B enthalten sind, werden auch als ***B*-Punkte** (***B*-Geraden**, ***B*-Ebenen**, ...) bezeichnet.

2.1 Beispiele blockierender Mengen in Räumen quadratischer Ordnung

In diesem Abschnitt werden einige Beispiele blockierender Mengen angegeben. In den folgenden Kapiteln wollen wir dann nachweisen, daß die hier aufgeführten Strukturen unter bestimmten Voraussetzungen in jeder m-blockierenden Menge, die diese Voraussetzungen erfüllt, enthalten sind.

Das einfachste Beispiel blockierender Mengen sind die Unterräume. Ein m-dimensionaler Unterraum trifft nach der Dimensionsformel jeden $(n-m)$-dimensionalen Unterraum von $PG(n,q)$ in mindestens einem Punkt, ist also eine m-blockierende Menge. Um weitere Beispiele angeben zu können, benötigen wir die Definition von Baerunterräumen:

Definition 2.2 *Eine Untergeometrie B des projektiven Raumes $\mathcal{P}$ heißt* ***Baerunterraum*** *genau dann, wenn jeder Punkt von $\mathcal{P}$ auf einer Geraden von B liegt. Ist $\mathcal{P}$ eine Ebene, so nennen wir B auch* ***Baerunterebene****.*

Man kann zeigen, daß $PG(n,q)$ genau dann einen Baerunterraum besitzt, wenn die Ordnung q quadratisch ist. Der Baerunterraum ist dann isomorph zu $PG(n,\sqrt{q})$. Das folgende Resultat kann man beweisen, indem man zeigt, daß jede Hyperebene von $PG(n,q)$ jeden Baerunterraum in einem Raum der Dimension größer gleich $n-2$ schneidet:

Resultat 2.3 *Sei B ein Baerunterraum von $PG(n,q)$ und U ein Unterraum von $PG(n,q)$ mit* $\dim(U) = n - s$. *Dann gilt* $\dim(B \cap U) \geq n - 2s$.

Aus diesem Resultat folgt also, daß in $PG(2m,q)$ jeder Baerunterraum jeden Unterraum der Dimension $n - m = 2m - m = m$ trifft. Also sind Baerunterräume von $PG(2m,q)$ Beispiele für m-blockierende Mengen. Weitere Beispiele erhalten wir, indem wir die beiden obigen Beispiele zu einem Kegel zusammensetzen:

Definition 2.4 *Ein* ***Kegel*** *C mit einem Unterraum V als* ***Spitze*** *über einer nichtleeren Punktmenge B^* mit $\langle B^* \rangle \cap V = \emptyset$ ist die Vereinigung der Unterräume, die von V und einem Punkt von B^* erzeugt werden:*

$$C := \bigcup_{P \in B^*} \langle V, P \rangle.$$

Die Menge B^* bezeichnen wir als eine ***Basis*** *des Kegels. Ist B^* ein Baerunterraum, so nennen wir C auch* ***Baerkegel****. Gilt* $\dim(V) = v$ *und ist B^* ein r-dimensionaler Baerunterraum, so bezeichnen wir C auch als* $\boldsymbol{(v,r)}$***-Baerkegel****, wobei r größer gleich* 0 *sei.*

Beachte, daß die Basis eines Kegels C nicht eindeutig bestimmt ist. Für jeden Unterraum $\overline{V}$ von $\langle C \rangle$ mit $V \cap \overline{V} = \emptyset$ und $\langle V, \overline{V} \rangle = \langle C \rangle$ ist $C \cap \overline{V}$ eine Basis von C. Hat V die Dimension $v = -1$, so ist ein (v,r)-Baerkegel C ein Baerunterraum, und für $r = 0$ ist C ein $(v+1)$-dimensionaler Unterraum von $\mathcal{P}$. Damit sind die bisher genannten Beispiele also (ausgeartete) Baerkegel. In dem nächsten Lemma werden Eigenschaften von Baerkegeln untersucht. Dies wird im folgenden oft verwendet und dabei nicht immer dieses Lemma zitiert.

Lemma 2.5 *Sei C ein (s,t)-Baerkegel. Dann gilt* $\dim(\langle C \rangle) = s + t + 1$.
Ist t gerade, dann liegen $\theta_{s+1+\frac{t}{2}} + q^{s+1}\theta_{\frac{t}{2}-1}\sqrt{q}$ Punkte in C, ist t ungerade, dann liegen $\theta_{s+1+\frac{t-1}{2}} + q^{s+1}\theta_{\frac{t-1}{2}}\sqrt{q}$ Punkte in C.

Beweis: Die erste Behauptung folgt direkt aus der Dimensionsformel, da die Spitze und die Basis des Kegels disjunkt sind.
Ein Punkt aus der Basis erzeugt zusammen mit der Spitze einen $(s+1)$-dimensionalen Unterraum und je zwei dieser Unterräume schneiden sich in der Spitze. Daher liefert ein Punkt der Basis q^{s+1} Punkte außerhalb der Spitze. Ist die Basis ein Baerunterraum gerader Dimension t, so enthält die Basis $\theta_{\frac{t}{2}} + \theta_{\frac{t}{2}-1} \cdot \sqrt{q}$ Punkte. Damit gilt

$$|C| = q^{s+1} \cdot (\theta_{\frac{t}{2}} + \theta_{\frac{t}{2}-1} \cdot \sqrt{q}) + \theta_s = \theta_{s+1+\frac{t}{2}} + \theta_{\frac{t}{2}-1} \cdot \sqrt{q}.$$

Ist die Dimension t des Baerunterraums ungerade, so enthält dieser $\theta_{\frac{t-1}{2}} + \theta_{\frac{t-1}{2}} \cdot \sqrt{q}$ Punkte. Damit folgt

$$|C| = q^{s+1} \cdot (\theta_{\frac{t-1}{2}} + \theta_{\frac{t-1}{2}} \cdot \sqrt{q}) + \theta_s = \theta_{s+1+\frac{t-1}{2}} + q^{s+1}\theta_{\frac{t-1}{2}}\sqrt{q}. \qquad \square$$

Wir geben jetzt an, welche Unterräume die Baerkegel blockieren:

Lemma 2.6 *Sei C ein $(v, 2s)$-Baerkegel in $\mathcal{P} := PG(n, q)$ mit q quadratisch. Dann ist C eine $(v + s + 1)$-blockierende Menge von $\mathcal{P}$.*

Beweis: Sei U ein Unterraum der Dimension $n-v-s-1$ von $\mathcal{P}$. Trifft U die Spitze V von C, so ist nichts zu zeigen. Wir nehmen also an, daß U und V disjunkt sind. Der Raum $\langle C\rangle$ hat die Dimension $v + 2s + 1$ und daher hat $U \cap \langle C\rangle$ eine Dimension größer gleich s. Sei U' ein $(2s)$-dimensionaler Unterraum disjunkt zu V von $\langle C\rangle$ durch $U \cap \langle C\rangle$. Dann ist $U' \cap C$ ein Baerunterraum von U', der wegen Resultat 2.3 jeden s-dimensionalen Unterraum von U' und damit insbesondere U trifft. $\square$

Beispiel 2.7 *Aus dem Lemma 2.6 folgt, daß $(t, 2(m-t-1))$-Baerkegel für eine Zahl t mit $-1 \leq t \leq m-1$ Beispiele m-blockierender Mengen in Räumen quadratischer Ordnung sind.*

2.1.1 Blockierende Mengen in projektiven Räumen beliebiger Ordnung

Auch in projektiven Räumen nichtquadratischer Ordnung sind Unterräume Beispiele blockierender Mengen.

Beispiel 2.8 *Wie in Lemma 2.6 kann man nachprüfen, daß ein Kegel mit einem $(m-2)$-dimensionalen Unterraum als Spitze und einer geradenblockierenden Menge in einer Ebene als Basis, eine m-blockierende Menge ist.*

Wir suchen also in Ebenen 1-blockierende Mengen, die keine Gerade enthalten.

Beispiel 2.9 *In $PG(2, q)$ mit einer ungeraden Ordnung q, existiert ein projektives Dreieck D, das eine minimale nichttriviale geradenblockierende Menge der Mächtigkeit $q+\frac{q+1}{2}+1$ ist. Dabei besteht D aus den Eckpunkten $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ eines Dreiecks und den Punkten $\begin{pmatrix}1\\-a\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\-a\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-a\\0\\1\end{pmatrix}$ auf den Dreiecksseiten, wobei für a alle Quadratzahlen aus $GF(q)^*$ eingesetzt werden. Da q ungerade ist, gibt es in $GF(q)^*$ genau $\frac{q-1}{2}$ Quadrate und damit folgt $|D| = \frac{3(q+1)}{2}$. Geht eine Gerade g durch keinen der Eckpunkte und trifft die Dreiecksseiten in den Punkten*

$\begin{pmatrix} 1 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -s \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, *dann gilt* $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -r & 1 & 0 \\ 0 & -s & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow srt = 1.$
Also sind entweder alle Zahlen s, r und t Quadrate oder zwei dieser Zahlen sind Nichtquadrate und die dritte ist ein Quadrat. In beiden Fällen gibt es mindestens ein Quadrat und dies ist ein Schnittpunkt von g mit D.

Für projektive Ebenen $PG(2, q)$, deren Ordnung eine Primzahl ist, sind dies sogar Beispiele 1-blockierender Mengen mit der minimalen Anzahl von Punkten, vergleiche Blokhuis [4]. Anders als bei den Baerkegeln ist für einen Kegel mit einem projektiven Dreieck D als Basis und einer $(m-2)$-dimensionalen Spitze nicht klar, welche Struktur eine entsprechende m-blockierende Menge, die einen Unterraum größerer Dimension erzeugt, haben könnte. Wir geben daher noch eine andere Klasse von Beispielen m-blockierender Mengen an.

Beispiel 2.10 *Sei B ein Teilraum isomorph zu $PG(t, q)$ von $\mathcal{P} := PG(t, q^t)$. Dann trifft B jede Hyperebene von $\mathcal{P}$ in mindestens einem Punkt. Also ist B eine 1-blockierende Menge von $\mathcal{P}$.*

Für $t = 2$ erhält man also gerade die Baerunterebene als 1-blockierende Menge in einer Ebene. Aber für $t = 3$ erhalten wir ein neues Beispiel: $PG(3, q)$ trifft jede Ebene von $PG(3, q^3)$.
Wir wollen nun aus Beispielen m-blockierender Mengen in Räumen der Dimension $n \geq 3$ blockierende Mengen in $(n-1)$-dimensionalen Räumen konstruieren. Da dies im folgenden sehr oft angewendet wird, definieren wir eine Bezeichnung für projizierte Punktmengen.

Definition 2.11 *Sei B eine Punktmenge von $PG(n, q)$. Sei P ein Punkt außerhalb von B und π eine Hyperebene nicht durch P. Dann ist*

$$\boldsymbol{B(P, \pi)} := \{\langle P, Q\rangle \cap \pi | Q \in B\}$$

*die **Projektion** von B vom Punkt P auf π.*

Projiziert man die Menge B von einem Punkt P nicht aus B auf eine Hyperebene nicht durch P, so bildet die projizierte Punktmenge nach dem folgenden Lemma 2.12 eine m-blockierende Menge der Hyperebene.

Lemma 2.12 *Sei B eine m-blockierende Menge von $\mathcal{P} := PG(n, q)$. Sei P ein Punkt außerhalb B und π eine Hyperebene nicht durch P. Dann ist $B(P, \pi)$ eine m-blockierende Menge von π.*

Beweis: Sei U ein $(n-1-m)$-dimensionale Unterraum von π. Der Unterraum $\langle U, P\rangle$ hat die Dimension $(n-m)$ und enthält, da B eine m-blockierende Menge ist, einen B-Punkt R. Dann enthält U den Punkt $\langle RP\rangle \cap U$, der nach Definition in $B(P, \pi)$ liegt. Damit ist $B(P, \pi)$ eine m-blockierende Menge von π. $\square$

Somit kann aus einer m-blockierenden Menge in $PG(n, q)$ eine m-blockierende Menge in $PG(n-1, q)$ konstruiert werden.

Nach Definition gilt für einen Baerunterraum B von $\mathcal{P} := PG(2m, q)$, q quadratisch, daß jeder Punkt von $\mathcal{P} \setminus B$ auf genau einer Geraden von B liegt. Sei P ein Punkt aus $\mathcal{P} \setminus B$ und π eine Hyperebene nicht durch P. Dann liegt P auf einer Baergeraden g. Jeder Punkt Q von $B \setminus g$ liegt in einer Baerunterebene von $\langle Q, g\rangle$. Diese Baerunterebene trifft jede Gerade von $\langle Q, g\rangle$ und damit liegt die Gerade $\langle Q, g\rangle \cap \pi$ in $B(P, \pi)$ und $B(P, \pi)$ besteht aus Geraden durch den Punkt $g \cap \pi$. Das heißt jeder Punkt von $B(P, \pi)$ liegt auf einer Geraden aus $B(P, \pi)$ durch $g \cap \pi$. Ein $(2m-2)$-dimensionaler Unterraum von B disjunkt zu g erzeugt in $\mathcal{P}$ eine Cogerade σ disjunkt zu g. Die B-Punkte von σ werden bijektiv auf Punkte von $B(P, \pi) \cap \langle \sigma, P\rangle$ abgebildet und $B(P, \pi) \cap \langle \sigma, P\rangle$ ist isomorph zu einem $(2m-2)$-dimensionalen Baerunterraum. Die Menge $B(P, \pi)$ ist also ein $(0, 2(m-1))$-Baerkegel.
Allgemein ist die Projektion eines $(r, 2s)$-Baerkegels C, wenn man von einem Punkt $P \in \langle C\rangle \setminus C$ aus auf eine Hyperebene nicht durch diesen Punkt projiziert, ein $(r+1, 2(s-1))$-Baerkegel. So kann man die Baerkegel aus Beispiel 2.7 durch sukzessives Projizieren aus einem $(2m)$-dimensionalen Baerunterraum erhalten.

Sei nun B der Teilraum $PG(3, q)$ von $\mathcal{P} := PG(3, q^3)$. Sei P ein Punkt nicht aus B und π eine Hyperebene nicht durch P. Liegt P auf einer Geraden, die B in $q+1$ Punkten trifft, so enthält die Menge $B(P, \pi)$ genau $|B| - q = q^3 + q^2 + 1$ Punkte. Liegt P auf keiner solchen Geraden, dann gibt es nur Tangenten durch P und es gilt $|B(P, \pi)| = |B| = q^3 + q^2 + q + 1$. Die Menge $B(P, \pi)$ ist eine 1-blockierende Menge der Ebene π. Wir verallgemeinern dieses Verfahren:

Beispiel 2.13 *Sei $t \geq 3$ und $B := PG(t, q)$ die 1-blockierende Menge in $PG(t, q^t)$ aus Beispiel 2.10. Sei V ein Punkt von B und $P_1 \notin B$ ein Punkt auf einer Geraden durch V, die B in $q+1$ Punkten trifft. Sei π_1 eine Hyperebene durch V aber nicht durch P_1. Wir projizieren B von P_1 auf π_1. Die Menge $B_1 := B(P_1, \pi_1)$ der projizierten Punkte enthält dann $|B| - q = q^t + q^{t-1} + \cdots + q^2 + 1$ Punkte. Geraden von π_1, die mehr als einen Punkt von B_1 enthalten, treffen B_1 in $q^2 + 1$ Punkten, wenn sie durch V gehen, und sonst in $q+1$ Punkten. Wir setzen dieses Verfahren fort: Solange $i \leq t-3$ ist, sei P_{i+1} ein Punkt von $\pi_i \setminus B_i$, so daß die Gerade $P_{i+1}V$ mehr als einen und somit $q^{i+1}+1$ Punkte von B_i enthält. Wir projizieren die Punkte von B_i von P_{i+1} auf einen $(n-i-1)$-dimensionalen Unterraum π_{i+1} von π_i durch V aber nicht durch P_{i+1}. Sei B_{i+1} die Menge der projizierten Punkte. Der Punkt P_{i+1} ist nicht in B_i enthalten und liegt daher nur auf einer Geraden $P_{i+1}V$, die mehr als einen Punkt von B_i enthält. Daher gilt $|B_{i+1}| = |B_i| - q^{i+1} = q^t + \cdots + q^{i+2} + 1$. Ist g eine Gerade durch V nicht durch P_{i+1}, dann sind $q^{i+2} + q^{i+1} + 1$ Punkte in $\langle g, P_{i+1}\rangle \cap B_i$ enthalten. Bei der Projektion von P_{i+1} aus werden die $q^{i+1}+1$ Punkte*

von $P_{i+1}V \cap B_i$ auf V und die restlichen q^{i+2} Punkte von $(\langle g, P_{i+1}\rangle \setminus P_{i+1}V) \cap B_i$ bijektiv auf Punkte von $\langle g, P_{i+1}\rangle \cap \pi_{i+1}$ abgebildet. Die Geraden von π_{i+1} durch V enthalten also einen oder $q^{i+2}+1$ Punkte von B_{i+1}. Ist g eine Gerade von π_{i+1} nicht durch V, so werden die Punkte von $\langle g, P_{i+1}\rangle \cap B_i$ bijektiv auf Punkte von $g \cap B_{i+1}$ projiziert und Geraden von π_{i+1} nicht durch V enthalten also einen oder $q+1$ Punkte von B_{i+1}.
Für $i = t-2$ erhält man eine Ebene π_i und B_i ist eine 1-blockierende Menge dieser Ebene, die $q^t + q^{t-1} + 1$ Punkte aber keine Gerade enthält. Indem man die Punkte P_i anders wählt, kann man 1-blockierenden Mengen, die mehr Punkte enthalten, konstruieren.

Durch die Projektion können wir aus blockierenden Mengen projektiver Räume blockierende Mengen in Räumen niedrigerer Dimension konstruieren. Wir können aber auch umgekehrt versuchen, aus den Eigenschaften m-blockierender Mengen in $PG(n-1,q)$ Rückschlüsse auf m-blockierende Mengen in $PG(n,q)$ zu ziehen.

2.2 Grundlegende Definitionen und Sätze

Definition 2.14 *Ein 3-dimensionaler Unterraum heißt **Solid**.*
*Wir nennen einen Unterraum der Dimension $n-2$ eine **Cogerade** und einen Unterraum der Dimension $n-3$ eine **Coebene**.*
*Geraden, die einen B-Punkt enthalten, werden als **Tangenten** und Unterräume der Dimension $n-m$, die B in einem Punkt treffen, werden als **Tangentialräume** bezeichnet. Im Fall $n-m=2$ werden die Tangentialräume auch **Tangentialebenen** genannt.*

Die m-blockierenden Mengen kleinster Kardinalität werden in Resultat 2.15 als Unterräume charakterisiert:

Resultat 2.15 (BOSE, BURTON, [9]) *Sei B eine m-blockierende Menge von $\mathcal{P} := PG(n,q)$ mit $m < n$. Dann gilt*

$$|B| \geq q^m + q^{m-1} + \cdots + q + 1 \tag{2.1}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn B die Punktmenge eines m-dimensionalen Unterraums von $\mathcal{P}$ ist.

Der Beweis ist kurz und wird daher aufgeführt:
Beweis: Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n. Für $n = m$ muß B jeden Punkt von $\mathcal{P}$ enthalten und damit ist die Aussage trivial. Sei nun $n > m$ und die Aussage für $n-1$ gezeigt. Sei P ein Punkt nicht aus B und π eine Hyperebene nicht durch P. Nach Lemma 2.12 ist $B(P,\pi)$ eine m-blockierende Menge von π und enthält damit nach Induktionsannahme mindestens $q^m + q^{m-1} + \cdots + q + 1$ Punkte.

Wir nehmen jetzt an, daß in (2.1) Gleichheit gilt. Dann enthält jede Gerade durch P höchstens einen Punkt von B, da sonst $|B| > |B(P,\pi)| \geq q^m + q^{m-1} + \cdots + q + 1$ folgt. Wir können jeden Punkt von $\mathcal{P} \setminus B$ als P wählen und wie oben folgt, daß eine Gerade, die mindestens einen Punkt von $\mathcal{P} \setminus B$ enthält, die Menge B in höchstens einem Punkt trifft. Also liegt eine Gerade, die mehr als einen B-Punkt enthält, ganz in B, die Menge B ist ein Unterraum und hat wegen (2.1) die Dimension m. $\square$

Wir nennen eine m-blockierende Menge **trivial** genau dann, wenn sie einen m-dimensionalen Unterraum enthält. Nachdem somit die bezüglich ihrer Kardinalität kleinsten m-blockierenden Mengen bekannt sind, stellt sich die Frage, welche Struktur größere m-blockierende Mengen haben. Ist B eine m-blockierende Menge, so ist auch die Vereinigung von B mit einer beliebigen Punktmenge aus $\mathcal{P} \setminus B$ eine m-blockierende Menge. Wir suchen aber nach m-blockierenden Mengen, die eine andere Struktur enthalten und wollen daher m-blockierende Mengen ausschließen, die so aus kleineren m-blockierenden Mengen konstruiert werden. Dies ist die Motivation für die nächste Definition. Wir nennen eine m-blockierende Menge B **minimal**, wenn keine echte Teilmenge von B eine m-blockierende Menge ist. Bruen [10] konnte eine Abschätzung für die Kardinalität der kleinsten minimalen, nichttrivialen 1-blockierenden Menge in einer Ebene angeben. Ist die Ordnung der Ebene quadratisch, so ist diese Abschätzung scharf und die kleinste minimale, nichttriviale 1-blockierende Menge einer Ebene ist eine Baerunterebene. In [11] verallgemeinerte er dieses Resultat auf projektive Räume höherer Dimension:

Resultat 2.16 (BRUEN, [10, 11]) *Sei $\mathcal{P}$ ein projektiver Raum der Ordnung q und sei B eine nichttriviale 1-blockierende Menge von $\mathcal{P}$. Dann gilt*

$$|B| \geq q + \sqrt{q} + 1$$

mit Gleichheit, wenn B die Punktmenge einer Baerunterebene in einer Ebene von $\mathcal{P}$ ist.

In Räumen quadratischer Ordnung ist ein Kegel mit einem $(m-2)$-dimensionalen Unterraum als Spitze und einer Baerunterebene als Basis die kleinste nichttriviale minimale m-blockierende Menge (vergleiche Beutelspacher [3]). Dies ist eine Verallgemeinerung von Resultat 2.16, da hier m-blockierende Mengen auch für m ungleich 1 betrachtet werden. Heim konnte ein entsprechendes Resultat für Räume beliebiger Ordnung ungleich 2 nachweisen:
Sei $\boldsymbol{r_2(q)}$ die Zahl, so daß $q + r_2(q) + 1$ die Mächtigkeit der kleinsten nichttrivialen geradenblockierenden Menge in einer Ebene $PG(2,q)$ ist. Die bezüglich der Kardinalität und der Dimension des erzeugten Unterraums zweitkleinsten minimalen m-blockierenden Mengen werden in dem folgenden Resultat angegeben. Das heißt, dies sind nichttriviale m-blockierende Mengen, die am wenigsten Punkte enthalten. Sie erzeugen einen Unterraum, dessen Dimension um eins größer als die Dimension

der trivialen m-blockierenden Mengen nämlich gleich $m+1$ ist. Für $i \geq -1$ sei

$$\boldsymbol{\theta_i} := \frac{q^{i+1}-1}{q-1} = \sum_{j=0}^{i} q^j.$$

Resultat 2.17 (HEIM, [15]) *Sei B eine nichttriviale m-blockierende Menge des projektiven Raumes $PG(n,q)$, wobei n größer als m und q größer 2 ist. Dann gilt*

$$|B| \geq \theta_m + r_2(q) \cdot q^{m-1}$$

mit Gleichheit, wenn ein $(m-2)$-dimensionaler Unterraum U, eine Ebene E mit $U \cap E = \emptyset$ und eine nichttriviale geradenblockierende Menge B^* kleinster Kardinalität von E existiert, so daß B ein Kegel mit Spitze U und Basis B^* ist.

Das folgende Resultat wird als Abschätzung für $r_2(q)$ verwendet.

Resultat 2.18 (BRUEN, OSTROM, [10]) *In $PG(2,p^h)$ existiert eine nichttriviale geradenblockierende Menge der Mächtigkeit $p^h + p^{h-1} + 1$.*

In Beispiel 2.13 hatten wir nichttriviale geradenblockierende Mengen der gleichen Mächtigkeit konstruiert.

Korollar 2.19 *Die Zahl $r_2(q)$ ist höchstens $\frac{q+1}{2}$.*

Beweis: Für ungerades q ist das projektive Dreieck aus Beispiel 2.9 eine geradenblockierende Menge mit $\frac{3(q+1)}{2}$ Punkten. Also ist die Zahl $r_2(q)$ höchstens $(q+1)/2$. Für gerade q, das heißt $q = 2^h$, ist $r_2(q)$ nach Resultat 2.18 oder nach Beispiel 2.13 kleiner gleich $2^{h-1} = q/2$. □

Die folgenden Lemmata werden mehrfach in den Beweisen verwendet und daher hier allgemein aufgelistet.

Die Existenz von Tangentialräumen an eine minimale m-blockierende Menge folgt direkt aus deren Minimalität:

Lemma 2.20 *Sei B eine minimale m-blockierende Menge von $\mathcal{P} := PG(n,q)$. Dann liegt jeder Punkt aus B auf mindestens einem Tangentialraum.*

Beweis: Sei P ein Punkt aus B. Dann ist $B \setminus \{P\}$ genau dann eine m-blockierende Menge, wenn P in keinem Tangentialraum liegt. □

Lemma 2.21 *Sei Σ eine Menge von r-dimensionalen Unterräumen in $PG(n,q)$ mit $n > r$, von denen sich je zwei in einem $(r-1)$-dimensionalen Unterraum schneiden.Dann gehen die Unterräume von Σ entweder durch einen $(r-1)$-dimensionalen Unterraum oder sie sind in einem $(r+1)$-dimensionalen Unterraum enthalten.*

Beweis: Wir können davon ausgehen, daß die im folgenden Beweis benötigten Unterräume von Σ alle existieren, da sonst die Behauptung des Lemmas trivial ist. Angenommen es gibt drei Unterräume U_1, U_2, U_3 von Σ nicht durch einen gemeinsamen $(r-1)$-dimensionalen Unterraum. Wir wollen zeigen, daß dann alle Unterräume von Σ in $\langle U_1, U_2, U_3\rangle$ liegen. Dabei ist die Dimension von $\langle U_1, U_2, U_3\rangle$ gleich $r+1$, da U_3 die Unterräume U_1 und U_2 in verschiedenen $(r-1)$-dimensionalen Unterräumen trifft. Also gilt $U_3 = \langle U_3 \cap U_1, U_3 \cap U_2\rangle \subseteq \langle U_1, U_2\rangle$ und die Dimension von $\langle U_1, U_2\rangle$ ist $r+1$. Sei U ein weiterer Unterraum aus Σ. Dieser trifft jeweils die Unterräume U_i in einem $(r-1)$-dimensionalen Unterraum. Mindestens zwei der Unterräume $U \cap U_i$ sind verschieden, da U_1, U_2, U_3 keinen gemeinsamen $(r-1)$-dimensionalen Unterraum enthalten. Die Schnitträume von U mit den U_i erzeugen U und damit liegt U in $\langle U_1, U_2, U_3\rangle$. $\square$

Lemma 2.22 *Sei Σ eine Menge von $c+1$ verschiedenen Cogeraden enthalten in einer Hyperebene π von $PG(n,q)$. Dann überdecken diese mindestens $\theta_{n-2} + c \cdot q^{n-2} - \binom{c}{2} \cdot q^{n-3}$ Punkte.*

Beweis: Je zwei Cogeraden aus Σ schneiden sich in einem $(n-3)$-dimensionalen Unterraum, da sie in π enthalten und verschieden sind. Eine Cogerade σ aus Σ überdeckt θ_{n-2} Punkte. Alle Cogeraden ungleich σ aus Σ treffen σ in einem Unterraum der Dimension $n-3$ und enthalten q^{n-3} Punkte nicht aus σ. Je zwei Cogeraden σ_1 und σ_2 aus Σ ungleich σ treffen sich in einem $(n-3)$-dimensionalen Unterraum U. Dieser Unterraum U schneidet σ in einem Unterraum der Dimension größer gleich $(n-4)$. Es liegen also höchstens q^{n-3} Punkte in $(\sigma_1 \cap \sigma_2) \setminus \sigma$. Es gibt $\binom{c}{2}$ Möglichkeiten, diese beiden Unterräume auszuwählen. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 2.23 *Seien W und L Unterräume von $PG(d,q)$ mit $L \subseteq W$, $\dim(W) = w$ und $\dim(L) = l$. Dann ist die Anzahl der Unterräume U mit $W \cap U = L$ und $\langle W, U\rangle = PG(d,q)$ gleich $q^{(w-l)(d-w)}$.*

Beweis: Wir zählen zuerst die Möglichkeiten s, die Basis von W zu einer Basis von $PG(d,q)$ zu ergänzen, und teilen diese durch die Anzahl t der Möglichkeiten, eine Basis von L zu einer Basis von U zu ergänzen. Es gibt $\theta_d - \theta_w = q^{w+1}\theta_{d-w-1}$ Punkte in $PG(d,q)$ außerhalb von W. Wenn wir den ersten Punkt P_1 gewählt haben, darf der zweite Punkt P_2 nicht in $\langle W, P_1\rangle$ liegen. Es gibt $\theta_d - \theta_{w+1} = q^{w+2}\theta_{d-w-2}$ solcher Punkte. Der i-te Punkt darf nicht in $\langle W, \cup_{j=1}^{i-1}\{P_j\}\rangle$ enthalten sein, für alle

$i = 2, \dots, d-w$. Insgesamt müssen $d-w$ Punkte ergänzt werden. Daraus folgt $s = q^{w+1}\theta_{d-w-1} \cdot q^{w+2}\theta_{d-w-2} \cdots q^d$.
Genauso wird jetzt t bestimmt: Es gibt $\theta_{d-w+l} - \theta_l = q^{l+1}\theta_{d-w-1}$ Punkte in $U \setminus L$. Für den zweiten Punkt gibt es $\theta_{d-w+l} - \theta_{l+1} = q^{l+2}\theta_{d-w-2}$ Möglichkeiten, ..., und für den letzten, den $(d-w)$-ten Punkt, gibt es noch $q^{d-w+l}\theta_0 = q^{d-w+l}$ Möglichkeiten. Damit ergibt sich $t = q^{l+1}\theta_{d-w-1} \cdot q^{l+2}\theta_{d-w-2} \cdots q^{d-w+l}$ und

$$\frac{s}{t} = \frac{q^{w+1}\theta_{d-w-1} \cdot q^{w+2}\theta_{d-w-2} \cdots q^d}{q^{l+1}\theta_{d-w-1} \cdot q^{l+2}\theta_{d-w-2} \cdots q^{d-w+l}} = q^{(w-l)\cdot(d-w)}.$$

□

Lemma 2.24 *Sei B eine m-blockierende Menge in $\mathcal{P} := PG(n,q)$ und π eine Hyperebene von $\mathcal{P}$. Dann ist $B \cap \pi$ eine $(m-1)$-blockierende Menge von π.*

Beweis: Da B eine m-blockierende Menge von $\mathcal{P}$ ist, trifft B jeden $(n-m)$-dimensionalen Unterraum von $\mathcal{P}$ und damit jeden $(n-1-(m-1))$-dimensionalen Unterraum von $\mathcal{P}$. Insbesondere trifft B jeden $(n-1-(m-1))$-dimensionalen Unterraum von π und damit folgt die Behauptung. □

Im folgenden Lemma wird umgekehrt von blockierenden Mengen in Unterräumen des projektiven Raumes $\mathcal{P}$ auf blockierende Mengen in $\mathcal{P}$ geschlossen.

Lemma 2.25 *Ist B eine m-blockierende Menge eines Unterraums U von $\mathcal{P} := PG(n,q)$ mit $\dim(U) \geq m$. Dann ist B auch eine m-blockierende Menge von $\mathcal{P}$.*

Beweis: Sei $u := \dim(U)$ und S ein $(n-m)$-dimensionaler Unterraum von $\mathcal{P}$. Dann ist die Dimension von $S \cap U$ größer gleich $u - m \geq 0$. Da B eine m-blockierende Menge von U ist, trifft B den Unterraum $S \cap U$ in mindestens einem Punkt. Daher trifft B jeden $(n-m)$-dimensionalen Unterraum von $\mathcal{P}$ und B ist eine m-blockierende Menge von $\mathcal{P}$. □

Das nächste Lemma könnte anstatt für Hyperebenen auch für Unterräume beliebiger Dimension bewiesen werden. Für minimale m-blockierende Mengen B in $\mathcal{P} := PG(n,q)$ folgt aus dem Lemma, daß, wenn $\langle B \rangle = \mathcal{P}$ ist, die Punkte von B in $\mathcal{P}$ in dem Sinne verteilt sind, daß ein echter Unterraum von $\mathcal{P}$ nicht so viele (das heißt nicht mehr als θ_m) Punkte von B enthält.

Lemma 2.26 *Sei B eine m-blockierende Menge von $\mathcal{P} := PG(n,q)$, $q > 2$, mit $|B| \leq \theta_m + \theta_{m-1} r_2(q)$ und π eine Hyperebene von $\mathcal{P}$ mit $|\pi \cap B| \geq \theta_m$. Dann ist $B \cap \pi$ eine m-blockierende Menge von π.*

Beweis: Sei U ein $(n-1-m)$-dimensionaler Unterraum von π. Angenommen U enthält keinen B-Punkt. Durch U gehen q^m verschiedene $(n-m)$-dimensionale

Unterräume von $\mathcal{P}$, die π in U treffen. Da B eine m-blockierende Menge ist, enthält jeder dieser Unterräume einen B-Punkt. Also gibt es in $B \setminus \pi$ mindestens q^m Punkte. Zusammen mit den θ_m Punkten aus $\pi \cap B$ enthält B also mindestens $\theta_m + q^m$ Punkte. Nach Voraussetzung gilt aber $|B| \leq \theta_m + r_2(q) \cdot \theta_{m-1}$. Damit folgt $q^m \leq \theta_{m-1} \cdot r_2(q)$. Dies ist ein Widerspruch, da $m \geq 1$, $q > 2$ und $r_2(q) \leq \frac{q+1}{2}$ nach Korollar 2.19 gilt. $\square$

Bemerkung 2.27 *Aus dem ersten Teil des Beweises von Lemma 2.26 folgt, daß die Aussage von Lemma 2.26 schon für Hyperebenen π mit $|B \cap \pi| > |B| - q^m$ gilt.*

Lemma 2.28 *Sei $m \geq 1$ und $q > 2$. Sei B eine minimale m-blockierende Menge von $\mathcal{P} := PG(n, q)$ mit $\langle B \rangle = \mathcal{P}$ und $|B| \leq \theta_m + \theta_{m-1} r_2(q)$. Sei P ein Punkt außerhalb B und π eine Hyperebene nicht durch P. Nach Lemma 2.12 enthält $B(P, \pi)$ eine m-blockierende Menge.*
Dann gilt für jede m-blockierende Menge $B^* \subseteq B(P, \pi)$ von π, daß $\langle B^* \rangle = \pi$.

Beweis: Nach Resultat 2.15 enthält B^* mindestens θ_m Punkte. Angenommen B^* erzeugt nicht π, daß heißt es gibt eine Cogerade σ, in der B^* enthalten ist. Es folgt $|\sigma \cap B(P, \pi)| \geq |B^*| \geq \theta_m$. Die Hyperebene $\pi' := \langle P, \sigma \rangle$ enthält daher mindestens θ_m Punkte von B. Aus Lemma 2.26 folgt, daß $B \cap \pi'$ eine m-blockierende Menge von π' ist. Nach Lemma 2.25 ist $B \cap \pi'$ eine m-blockierende Menge von $\mathcal{P}$ und, da B minimal ist, ist B gleich $B \cap \pi'$. Somit ist B in π' enthalten. Dies ist ein Widerspruch zu $\langle B \rangle = \mathcal{P}$. $\square$

Bemerkung 2.29 *Angenommen man kennt für $n > m+1$ eine untere Abschätzung x für die Anzahl der Punkte einer minimalen m-blockierenden Menge, die einen $(n-1)$-dimensionalen Unterraum erzeugt. Dann liefert Lemma 2.28 eine untere Abschätzung für die Anzahl der Punkte einer minimalen m-blockierenden Menge B, die einen n-dimensionalen Unterraum erzeugt: Gibt es einen Punkt von B, der auf s Geraden liegt, die zusammen t Punkte von B enthalten, dann gilt $|B| \geq x + t - s$.*

Lemma 2.30 *Sei $n' \in I\!N$ mit $m \leq n' \leq 2m$. Angenommen alle minimalen m-blockierende Mengen in $PG(n', q)$, die den ganzen Raum $PG(n', q)$ erzeugen, enthalten mindestens $\theta_m + \theta_{n'-m-1} r_2(q) q^{2m-n'}$ Punkte. Sei B eine minimale m-blockierende Menge in $PG(n, q)$ mit $n \geq n'$ und*

$$|B| \leq \theta_m + \theta_{n'-m-1} r_2(q) q^{2m-n'}. \tag{2.2}$$

Dann gilt $dim(\langle B \rangle) \leq n'$ mit Gleichheit nur dann, wenn auch in (2.2) Gleichheit gilt.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung mit Induktion über n. Für $n = n'$ entspricht die Behauptung der Voraussetzung. Sei nun n größer als n' und die Behauptung für $n-1$ gezeigt. Sei B eine minimale m-blockierende Menge, die die Bedingung (2.2) erfüllt. Ist B ein Unterraum, so hat $\langle B \rangle$ die Dimension $m \leq n'$. Sei also nun B kein Unterraum.
Dann gibt es einen Punkt P nicht aus B, der auf einer Geraden g liegt, die B in mehr als einem Punkt trifft. Sei π eine Hyperebene nicht durch P. Bei der Projektion der Punkte von B von P aus auf π werden die B-Punkte von g auf den Punkt $g \cap \pi$ abgebildet und daher gilt $|B| > |B(P, \pi)|$. Die Menge $B(P, \pi)$ enthält nach Lemma 2.12 eine minimale m-blockierende Menge B^*. Nach Konstruktion und wegen (2.2) gilt

$$|B^*| \leq |B(P, \pi)| < |B| \leq \theta_m + \theta_{n'-m-1} r_2(q) q^{2m-n'}.$$

Aus der Induktionsannahme folgt, daß die Dimension von $\langle B^* \rangle$ kleiner als n' ist. Also hat $\langle P, B^* \rangle$ höchstens Dimension n' und es gibt eine Hyperebene π^*, die $\langle P, B^* \rangle$ enthält. Da B^* eine m-blockierende Menge von π ist, enthält B^* nach Resultat 2.15 mindestens θ_m Punkte. Daher enthält π^* mindestens θ_m Punkte von B. Nach Lemma 2.26 ist $B \cap \pi^*$ eine m-blockierende Menge von π^*. Da B minimal und $B \cap \pi^*$ nach Lemma 2.25 eine m-blockierende Menge von π^* ist, muß B in π^* enthalten sein. Wir wenden die Induktionsannahme auf π^* an und damit folgt die Behauptung. □

In Bemerkung 2.29 hatten wir die Projektion $B(P, \pi)$ einer m-blockierenden Menge B von einem Punkt P auf eine Hyperebene π betrachtet, um eine untere Abschätzung für die Kardinalität von B zu erhalten. Dieses Verfahren wird in dem nächsten Lemma verbessert, indem gleichzeitig mehrere Projektionen von verschiedenen Punkten aus betrachtet werden. Kennt man eine untere Schranke für die Anzahl der projizierten Punkte in $B(P_i, \pi_i)$, so liefert die Ungleichung (2.3) eine verbesserte Abschätzung für $|B|$.

Lemma 2.31 *Sei B eine m-blockierende Menge in $\mathcal{P} := PG(n, q)$ und U ein $(n-m-1)$-dimensionaler Unterraum von $\mathcal{P}$ disjunkt zu B. Seien $P_1, \ldots, P_{\theta_{n-m-1}}$ die Punkte von U und $\pi_1, \ldots, \pi_{\theta_{n-m-1}}$ Hyperebenen mit $P_i \notin \pi_i$ für alle $i \in 1, \ldots, \theta_{n-m-1}$. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{\theta_{n-m-1}} |B(P_i, \pi_i)| \leq \theta_m \theta_{n-m-1} + (|B| - \theta_m) \cdot (\theta_{n-m-1} - 1). \tag{2.3}$$

Beweis: Enthält ein Unterraum der Dimension $n - m$ durch U genau $x + 1$ Punkte von B, so tragen diese höchstens $\theta_{n-m-1} + x \cdot (\theta_{n-m-1} - 1)$ zur linken Seite von (2.3) bei. Da B eine m-blockierende Menge ist, enthält jeder $(n - m)$-dimensionale Unterraum durch U mindestens einen Punkt von B. Dazu werden θ_m Punkte von B benötigt. Die restlichen $|B| - \theta_m$ Punkte von B tragen noch höchstens $\theta_{n-m-1} - 1$ zur linken Seite von (2.3) bei. □

Kapitel 3

Minimale blockierende Mengen in projektiven Räumen quadratischer Ordnung

In diesem Kapitel werden in Satz 3.1 minimale m-blockierende Mengen der Kardinalität kleiner gleich $\theta_m + \theta_{m-1}\sqrt{q}$ in projektiven Räumen $PG(n,q)$ quadratischer Ordnung q, $q \neq 4$, als Baerkegel charakterisiert:

Satz 3.1 *Sei B eine minimale m-blockierende Menge von $PG(n,q)$, $n \geq 2$, q eine quadratische Zahl ungleich 4 und $n \geq m$. Ist $|B| \leq \theta_m + \theta_{m-1}\sqrt{q}$, dann ist B ein $(t, 2(m-t-1))$-Baerkegel für eine Zahl t mit* $\max\{-1, 2m-n-1\} \leq t \leq m-1$.

Insbesondere sind dies die bezüglich der Anzahl der darin enthaltenen Punkte kleinsten m-blockierenden Mengen, die den ganzen Raum $PG(n,q)$ für $2m \geq n \geq m$ erzeugen.

Dies ist eine Verallgemeinerung des Resultats 2.16, das der Behauptung von Satz 3.1 im Fall $m = 1$ entspricht. Für $n = m+1$ folgt auch aus Resultat 2.17 für eine m-blockierende Menge B mit $|B| \leq \theta_m + q^{m-1}\sqrt{q}$, daß B einen m-dimensionalen Unterraum enthält oder ein $(m-2, 2)$-Baerkegel ist. Satz 3.1 verbessert jedoch in diesem Fall die Abschätzung für die Mindestanzahl Punkte, die eine minimale m-blockierende Menge enthalten muß, die keinen m-dimensionalen Unterraum und keinen $(m-2, 2)$-Baerkegel enthält. Für $m = 2$ wurde die Aussage von Satz 3.1 für $q \geq 16$ in folgendem Resultat gezeigt:

Resultat 3.2 (METSCH, STORME [19]) *Sei B eine minimale 2-blockierende Menge von $PG(n,q)$, $n \geq 3$, q eine quadratische Zahl und $q \geq 16$. Ist $|B|$ kleiner gleich $\theta_2 + \theta_1\sqrt{q}$, dann ist B ein $(1-a, 2a)$-Baerkegel für ein $a \in \{0,1,2\}$, das heißt die Punktmenge einer Ebene, ein Punktkegel über einer Baerunterebene, oder für $n \geq 4$ die Punktmenge eines Baerunterraums $PG(4, \sqrt{q})$.*

Zuerst prüfen wir in Abschnitt 3.0.1 nach, daß die Behauptung von Resultat 3.2 auch im Fall $q = 9$ gilt. In Abschnitt 3.1 beweisen wir dann den Satz 3.1 für den Fall $m \geq 3$.

Huber [17] charakterisierte für eine natürliche Zahl s mit $1 \leq s \leq m$ minimale m-blockierende Mengen mit höchstens $\theta_m + q^{s-1}\theta_{m-s}\sqrt{q}$ Punkten von $PG(n, q)$, q quadratisch, als $(s-2, 2(m-s+1))$-Baerkegel, wobei er die zusätzliche Bedingung an die blockierende Menge stellte, daß diese keinen s-dimensionalen Unterraum enthalten. Hier wird also für $q \geq 9$ gezeigt, daß auf diese Bedingung verzichtet werden kann, und außerdem für $s > 1$ das Intervall für die Kardinalität der m-blockierenden Mengen vergrößert, in dem alle m-blockierende Mengen bekannt sind.

3.0.1 2-blockierende Mengen in $PG(n, 9)$ für $n \geq 3$

Wir wollen zeigen, daß die Aussage von Resultat 3.2 auch für $q = 9$ gilt. Zuerst wird dies in Lemma 3.3 für den Fall $n = 3$ nachgewiesen. Dann ist B also eine minimale geradenblockierende Menge, die höchstens $\theta_2 + \theta_1\sqrt{q} = 121$ Punkte enthält. Der Beweis orientiert sich an den Beweisen zu Resultat 3.2 aus [19] von K. Metsch und L. Storme, wobei dort ein Resultat von S. Ball und A. Blokhuis [1] verwandt wird, nach dem eine geradenblockierende Menge in einer Ebene der Ordnung q mit $q > 9$ eine Gerade, eine Baer Unterebene oder mindestens $q + 2\sqrt{q} + 1$ Punkte enthält. Für $q = 9$ ist diese Aussage nicht richtig, da zum Beispiel das projektive Dreieck in $PG(2, 9)$ aus 15 Punkten besteht (vergleiche Beispiel 2.13). Nach einem Resultat von Bruen und Thas [12] enthält in einer Ebene quadratischer Ordnung q ungleich 4 eine geradenblockierende Menge mit höchstens $q + \sqrt{q} + 2$ Punkten eine Gerade oder eine Baerunterebene. Daher gibt es in $PG(2, 3)$ keine minimale blockierende Menge mit 14 Punkten und wir nutzen diese Aussage in dem Beweis von Lemma 3.3. In den folgenden Lemmata wird dann noch gezeigt, daß in $PG(4, 9)$ eine minimale 2-blockierende Menge mit höchstens 121 Punkten eine Ebene, ein $(0, 2)$-Baerkegel oder ein 4-dimensionaler Baerunterraum ist. Dies sind auch in Räumen $PG(n, 9)$ mit $n > 4$ die einzigen minimalen 2-blockierenden Mengen mit höchstens 121 Punkten, vergleiche Satz 3.5.

Lemma 3.3 *Sei B eine minimale 2-blockierende Menge in $\mathcal{P} := PG(3, 9)$ mit $|B| \leq 121$. Dann ist B eine Ebene oder ein Punktkegel über einer Baer Unterebene.*

Beweis: Wir nehmen an, daß B keine Ebene enthält, und wollen in mehreren Schritten zeigen, daß B ein $(0, 2)$-Baerkegel ist.

1) *Eine geradenblockierende Menge in einer Ebene von $PG(3, 9)$ enthält entweder eine Gerade, eine Baerunterebene oder mindestens 15 Punkte.*
   Dies ist ein Resultat von Bruen und Thas [12].

2) *Jeder Punkt von B liegt auf einer Geraden von B*
   Der Beweis zu diesem Schritt entspricht dem Beweis von Lemma 3.14, wobei

hier andere Resultate zitiert werden und einige Schritte direkt folgen. Sei P ein Punkt aus B. Angenommen, es gibt keine B-Gerade durch P. Wir zeigen, daß jede Ebene durch eine Tangente durch P die Menge B in einer Baerunterebene trifft: Sei t eine Tangente durch P und seien $E_0, E_1, \ldots, E_9$ die Ebenen durch t. Da B in jeder Ebene E_i durch t eine geradenblockierende Menge B_i^* induziert und es keine B-Gerade durch P gibt, P aber als einziger B-Punkt von t in B_i^* enthalten sein muß, enthält nach Schritt 1) jede Ebene E_i durch t mindestens $q + \sqrt{q} = 12$ Punkte von $B \setminus t$. Aus $|B| \leq 10 \cdot 12 + 1$ folgt, daß jede Ebene durch t genau 12 Punkte von $B \setminus t$ enthält und damit nach Schritt 1) die Menge B in einer Baerunterebene trifft.
Da B minimal ist, gibt es nach Lemma 2.20 eine Tangente t durch P. Eine Gerade durch P liegt in einer Ebene E durch t und trifft B in einem oder $\sqrt{q} + 1 = 4$ Punkten, da $E \cap B$ eine Baerunterebene ist. Also gibt es $\frac{|B|-1}{3} = 40$ Geraden durch P, die B in 4 Punkten treffen und die 51 anderen Geraden durch P sind Tangenten. Sei nun h eine Gerade durch P, die B in 4 Punkten trifft. Enthält eine Ebene durch h eine Tangente, so trifft diese Ebene B in einer Baerunterebene und enthält somit 6 Tangenten durch P. Dies ist ein Widerspruch, da 6 kein Teiler von 51 ist.

3) *Sei g eine Gerade aus B. Dann gibt es einen Punkt P von g, der auf keiner weiteren Geraden von B liegt.*
Dies beweisen wir in mehreren Teilen:

   i) *Eine Ebene enthält höchstens 40 Punkte von B.*
   Sei E eine Ebene. Nach Voraussetzung ist E nicht in B enthalten, das heißt es gibt einen Punkt P in $E \setminus B$. Es gibt 81 Geraden durch P, die E nur in P treffen. Jede dieser Geraden wird durch einen B-Punkt blockiert. Also gibt es mindestens 81 Punkte von B außerhalb E und die Behauptung folgt aus $|B| \leq 121$.

   ii) *Eine Ebene enthält höchstens 5 Geraden von B.*
   Angenommen eine Ebene E enthält mindestens 6 Geraden aus B. Dann überdecken diese Geraden mindestens $6 \cdot 10 - \binom{6}{2} = 45$ Punkte von E. Dies ist ein Widerspruch zu Schritt 3i).

   iii) *Es gibt einen Punkt P von g, der auf höchstens 2 Geraden von B liegt.*
   Wir zeigen, daß g weniger als 20 andere B-Geraden trifft. Damit folgt die Behauptung. Angenommen, g trifft mindestens 20 andere Geraden aus B. Seien E_i für $i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ die Ebenen durch g und $1 + e_i$ die Anzahl der B-Geraden in E_i. Dann gilt nach Annahme $\sum_{i=0}^{9} e_i \geq 20$. Zusammen mit g überdecken diese Geraden mindestens

$$10 + \sum_{i=0}^{9} (e_i \cdot 9 - \binom{e_i}{2}) \geq 10 + 9 \cdot 20 - \sum_{i=0}^{9} \frac{e_i(e_i - 1)}{2} \tag{3.1}$$

Punkte. Wegen Schritt 3ii) enthält eine Ebene höchstens 5 Geraden von B und es gilt $e_i \leq 4$ für alle i. Damit folgt $\frac{e_i(e_i-1)}{2} \leq \frac{3}{2}e_i$ und zusammen mit (3.1) folgt

$$|B| \geq 190 - \sum_{i=0}^{9} \frac{3}{2}e_i = 190 - 30 = 160.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $|B| \leq 121$.

iv) *Die Gerade g ist die einzige B-Gerade durch P.*
In Schritt 3iii) haben wir gezeigt, daß P auf höchstens 2 Geraden von B liegt. Liegt P auf nur einer Geraden, so ist nichts zu zeigen. Wir nehmen also an, daß es noch eine B-Geraden g' ungleich g durch P gibt, und wollen dies zum Widerspruch führen.
Angenommen, die Ebene $\pi := \langle g, g' \rangle$ enthält eine Tangente t' durch P. Jede andere Ebene durch t' kann keine Gerade von B durch P enthalten und muß daher nach Schritt 1) mindestens 12 Punkte von $B \setminus t'$ enthalten. Also gilt

$$|B| \geq |\pi \cap B| + 9 \cdot 12 \geq 19 + 108 = 127.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $|B| \leq 121$.
Also enthält die Ebene π keine Tangente durch P und es gilt $|\pi \cap B| \geq 27$. Angenommen jede Gerade von π durch P enthält mindestens 4 Punkte. Dann gilt $|\pi \cap B| \geq 19 + 8 \cdot 3 = 43$, ein Widerspruch zu Schritt 3i). Also gibt es eine Gerade $h \subseteq \pi$ durch P, die B in höchstens 3 Punkten trifft.
Sei t eine Tangente durch P. Es gibt 8 Ebenen durch t ungleich $\langle t, g \rangle$ und $\langle t, g' \rangle$. Keine dieser Ebenen enthält eine B-Gerade durch P und daher enthalten nach Schritt 1) alle diese Ebenen mindestens 12 Punkte von $B \setminus t$. Aus $8 \cdot 13 + 19 = 123 > |B|$ folgt, daß es mindestens eine Ebene π' durch t gibt, die B in einer Baerunterebenen B^* trifft. In π' gibt es 6 Tangenten durch P und 4 Geraden durch P, die B in 4 Punkten treffen. Sei τ die Menge der 6 Ebenen durch h, die π' in einer Tangenten durch P treffen, und σ die Menge der Ebenen durch h ungleich π, die π' in einer Baergeraden von B^* treffen. Die Ebene π kann nicht in τ liegen, da π keine Tangente durch P enthält, die Ebenen aus τ aber alle mindestens eine Tangente durch P enthalten. Die Ebenen aus τ können keine B-Gerade enthalten, da diese t in P treffen müßte, aber g und g' die einzigen Geraden von B durch P sind und diese in π enthalten sind. Die Ebenen aus τ enthalten nach Schritt 1) also eine Baerunterebene aus B und somit mindestens 12 Punkte von B außerhalb h (die Gerade h kann keine Baergerade sein, da sie weniger als 4 Punkte von B enthält) oder sie enthalten eine andere blockierende Menge und somit mindestens 15 Punkte. Eine Ebene von σ enthält nach Schritt 1) mindestens 9 Punkte von $B \setminus h$, da sie eine Gerade von B oder eine Baerunterebene mit mindestens 12 Punkten von $B \setminus h$ oder insgesamt mindestens 15 Punkte von

B enthält. Wir zählen die Punkte von B in den Ebenen durch h:

$$|B| \geq 6 \cdot 12 + 3 \cdot 9 + |\pi \cap B| = 72 + 27 + 27 = 126.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $|B| \leq 121$.

4) *Alle Geraden von B gehen durch einen gemeinsamen Punkt*
Sei l eine Gerade von B. Wir zeigen, daß l jede andere Gerade von B trifft. Dann schneiden sich also je zwei Geraden von B. Wegen Schritt 2) liegt jeder Punkt von B auf einer B-Geraden. Nach Lemma 2.21 sind dann die B-Geraden und damit B entweder in einer Ebene enthalten oder sie gehen alle durch einen Punkt. Nach Voraussetzung ist der erste Fall jedoch nicht möglich.
Nach Schritt 3) gibt es einen Punkt P von l, der auf keiner weiteren B-Gerade liegt. Da B minimal ist, gibt es eine Tangente t durch P. Sei π die Ebene $\langle l, t \rangle$ und $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_9$ die anderen Ebenen durch t. Keine Ebene π_i enthält eine B-Gerade, da diese t in P treffen müßte, l aber die einzige B-Gerade durch P ist. Damit enthält jede Ebene ungleich π durch t nach Schritt 1) mindestens 12 Punkte von $B \setminus t$. Wegen $|B| - 9 \cdot 12 \leq 13$ folgt, daß π höchstens 13 und $\pi \setminus l$ höchstens 3 Punkte von B außerhalb l enthält. Trifft π die Menge B in l, so ist die Behauptung gezeigt, da jede B-Gerade π in einem Punkt trifft und dieser Punkt also in l liegen muß. Daher können wir im folgenden annehmen, daß jede Ebene durch l, die eine Tangente durch P enthält, noch einen Punkt von B außerhalb von l und insgesamt höchstens 13 Punkte von B enthält. Also enthält π mindestens 11 Punkte von B. Es gibt höchstens 2 Ebenen von $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_9$ die mehr als 13 Punkte von B enthalten und höchstens eine kann größer gleich 15 Punkte und damit keine Baer Unterebene enthalten (Schritt 1)). Wir können annehmen, daß $\pi_1 \cap B$ eine Baer Unterebene von π_1 ist. Sei τ die Menge der 6 Ebenen durch l, die π_1 in einer Tangenten durch P treffen und σ die Menge der 4 Ebenen durch l, für die $\pi_1 \cap B$ eine Baergerade durch P ist. Wie oben für π folgt für die Ebenen aus τ, daß diese mindestens 11 und höchstens 13 Punkte von B enthalten. Wir unterscheiden zwei Fälle:
Fall a): *Eine Ebene aus τ enthält 13 Punkte von B:*
Wir können π gleich dieser Ebene setzen und $\pi_1, \ldots, \pi_9$ die anderen Ebenen durch t setzen. Wegen $\frac{|B|-13}{9} = 12$ und da l die einzige B-Gerade durch P ist, trifft nach Schritt 1) jede Ebene π_i die Menge B in einer Baerunterebene B_i^*. Jede Ebene von τ enthält höchstens 13 Punkte und kann daher höchstens eine Baerunterebene B_i^* in einer Baergeraden treffen. Es gibt 6 Ebenen in τ aber 9 Ebenen π_i und daher gibt es mindestens 3 Ebenen von den π_i, für die die Baer Geraden aus B_i^* nicht in den Ebenen aus τ und damit in den Ebenen aus σ liegen. Also enthält jede der Ebenen aus σ mindestens 3 Baergeraden aus B und zusammen mit l mindestens $10 + 3 \cdot 3 = 19$ Punkte. Am Anfang dieses Schritts hatten wir gesehen, daß eine Ebene durch l, die eine Tangente durch P enthält, höchstens 13 Punkte aus B enthalten kann. Also enthalten die Ebenen aus σ keine Tangente.

Die Punkte von $B \setminus \pi$ liegen alle auf Baergeraden durch P und daher treffen alle Ebenen aus σ die Ebenen π_i in einer Baer Geraden von B_i^* und alle B-Punkte von π_i sind in den Ebenen aus σ enthalten. Eine Ebene aus σ enthält also $9 \cdot 3 = 27$ Punkte von $B \setminus l$. Außerhalb der Ebenen von σ gibt es $|B| - 4 \cdot 27 - 10 \leq 3$ Punkte. Angenommen es gibt eine Gerade k von B, die nicht in einer Ebene aus σ enthalten ist. Dann trifft k die 4 Ebenen von σ in einem Punkt und liefert noch 6 Punkte von B, die nicht in einer Ebene von σ liegen. Dies ist ein Widerspruch und damit liegt jede Gerade von B in einer Ebene von σ und trifft daher l.
Fall b): *Alle Ebenen aus τ enthalten höchstens 12 Punkte von B:*
Zählen wir die B-Punkte in den Ebenen durch t, so folgt, daß mindestens sieben der Ebenen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_9$ genau 13 Punkte von B enthalten und damit B in einer Baerunterebene treffen. Wir können annehmen, daß dies die Ebenen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_7$ sind. In diesem Fall kann keine Baergerade von $B \cap \pi_i$ in einer Ebene aus τ liegen, da die Ebenen aus τ höchstens 2 Punkte von B außerhalb l enthalten. Die Baergeraden von $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_7$ geschnitten mit B liegen also in den 4 Ebenen von σ. Das heißt auch, daß die B-Punkte von $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_7$ in den 4 Ebenen von σ liegen. Angenommen es gibt eine Gerade k von B, die l nicht trifft. Diese Gerade ist windschief zu t und trifft daher jede der Ebenen $\pi, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_7$ in einem Punkt. Liegt k nicht in einer Ebene aus σ, so kann k höchstens 4 der Ebenen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_7$ in einem Schnittpunkt mit einer Ebene aus σ treffen. Da aber die Punkte von $\pi_i \cap B$ für $i = 1, \ldots, 7$ in den Ebenen von σ liegen, ist dies ein Widerspruch. Also ist k in einer Ebene aus σ enthalten. Da die Ebenen aus σ durch die Gerade l gehen, können k und l dann keinen leeren Schnitt haben, Widerspruch.

5) *Die Menge B ist ein $(0,2)$-Baerkegel:*
Nach Schritt 2) liegt jeder Punkt von B auf einer Geraden von B und nach Schritt 4) gehen diese Geraden durch einen gemeinsamen Punkt V. Sei $\overline{V}$ eine Ebene disjunkt zu V. Dann folgt $|B| = |B \cap \overline{V}| \cdot 9 + 1 \leq 121$ und damit, daß $|B \cap \overline{V}| = 13$ ist. Nach Resultat 2.17 ist B ein $(0,2)$-Baerkegel.

□

Lemma 3.4 *Sei B eine minimale 2-blockierende Menge in $\mathcal{P} := PG(4,9)$ mit $|B| \leq 121$. Dann ist B eine Ebene oder ein Punktkegel über einer Baer Unterebene oder ein 4-dimensionaler Baerunterraum.*

Beweis: Ist B in einer Hyperebene π enthalten, so können wir Lemma 3.3 auf π anwenden. Dieses liefert, daß $B \cap \pi = B$ entweder eine Ebene oder ein $(0,2)$-Baerkegel ist. Ist B in keiner Hyperebene von $\mathcal{P}$ enthalten, so erzeugt B den ganzen Raum $\mathcal{P}$. Dann folgt aus Resultat 4.9 von U. Heim [15], daß B ein 4-dimensionaler Baerunterraum ist. □

Satz 3.5 *Sei B eine minimale 2-blockierende Menge in $\mathcal{P} := PG(n, 9)$ mit $n \geq 4$ und $|B| \leq 121$. Dann ist B eine Ebene oder ein Punktkegel über einer Baerunterebene oder ein 4-dimensionaler Baerunterraum.*

Beweis: Aus Lemma 3.4 folgt, daß eine minimale 2-blockierende Menge von $PG(4, 9)$, die den ganzen Raum $PG(4, 9)$ erzeugt, mindestens $\theta_2 + \theta_1\sqrt{q} = 121$ Punkte enthält. Aus Lemma 2.30 folgt wegen $|B| \leq \theta_2 + \theta_1\sqrt{q} = 121$ mit $n' = 4$, daß die Dimension von $\langle B \rangle$ höchstens 4 ist. Die Behauptung folgt aus Lemma 3.4 angewandt auf $\langle B \rangle$. □

3.1 Beweis von Satz 3.1

Wir beweisen Satz 3.1 in mehreren Lemmata mit Induktion über m und (für ein festes m) über n.
Für $m = 0$ besteht B aus einem Punkt. Für $m = 1$ entspricht Satz 3.1 dem Resultat 2.16. Für $m = 2$, $n \geq 3$ und $q \geq 16$ zeigt Resultat 3.2 die Behauptung. Für $m = 2$, $n \geq 3$ und $q = 9$ ist die Behauptung in Abschnitt 3.0.1 bewiesen. Für $m = n$ besteht B aus allen Punkten von $\mathcal{P}$ und die Aussage von Satz 3.1 ist trivial. Wir können also annehmen, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$m + 1 \leq n, \quad 4 \leq n, \quad 3 \leq m. \tag{3.2}$$

Weiter nehmen wir an, daß Satz 3.1 für alle m'-blockierenden Mengen in projektiven Räumen $PG(n', q)$ der Dimension $n' < n$ für ein m' kleiner gleich m gilt, und wir wollen zeigen, daß er dann auch für m-blockierende Mengen in $PG(n, q)$ gültig ist. Im folgenden sei also B eine minimale m-blockierende Menge von $\mathcal{P} = PG(n, q)$, wobei die Ordnung q eine quadratische Zahl größer gleich 9 sei. Für die Anzahl der in B enthaltenen Punkte gelte

$$|B| \leq \theta_m + \theta_{m-1}\sqrt{q}. \tag{3.3}$$

Um die Behauptung von Satz 3.1 für den Fall $n \leq 2m$ zu zeigen, nehmen wir in den Abschnitten 3.1.1, 3.1.2 und 3.1.3 an, daß B **keinen $(t, 2(m - t - 1))$-Baerkegel für eine ganze Zahl t mit $2m - n \leq t \leq m - 1$ enthält.** Wir wollen zeigen, daß B dann ein $(2m - n - 1, 2(n - m))$-Baerkegel ist. Zuerst werden dazu einige Lemmata bewiesen, die für $n \leq 2m$ gelten. Dann wird Satz 3.1 für $n < 2m$ erst im Fall $m + 1 = n$ und dann für $m + 1 < n < 2m$ bewiesen. Der Fall $n = 2m$ wird in Lemma 3.27 betrachtet.
In Abschnitt 3.1.4 folgt schließlich mit Lemma 2.30, daß auch für $n > 2m$ die Dimension von $\langle B \rangle$ höchstens $2m$ ist. Damit hat dann B die aus den vorherigen Abschnitten bekannte Struktur, ist also ein Baerkegel.

3.1.1 Einige Lemmata für den Fall $n \leq 2m$

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften von B für den Fall, daß die Dimension des projektiven Raumes $\mathcal{P} = PG(n,q)$ höchstens gleich $2m$ ist, bewiesen. Diese werden dann in den folgenden Abschnitten 3.1.2 und 3.1.3 zum Beweis von Satz 3.1 verwandt. Wir nehmen also $n \leq 2m$ an.

Lemma 3.6 *a) Sei B' eine m-blockierende Menge von $PG(n-1,q)$, die höchstens $\theta_m + \theta_{m-1}\sqrt{q}$ Punkte enthält.*
Dann enthält B' einen $(t, 2\cdot(m-t-1))$-Baerkegel für eine ganze Zahl t mit $2m-n \leq t \leq m-1$.

b) Sei B' eine $(m-1)$-blockierende Menge von $PG(n-1,q)$, die höchstens $\theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ Punkte enthält.
Dann enthält B' einen $(t, 2\cdot(m-t-2))$-Baerkegel für eine ganze Zahl t mit $\max\{-1, 2m-n-2\} \leq t \leq m-2$.

Beweis: Dies ist die Induktionsannahme. □

Lemma 3.7 *Eine Hyperebene enthält höchstens $\theta_{m-1}\cdot(\sqrt{q}+1)$ Punkte von B.*

Beweis: Sei π eine Hyperebene. In π gibt es einen $((n-1)-m)$-dimensionalen Unterraum U, der keinen Punkt von B enthält, da ansonsten $B\cap\pi$ eine m-blockierende Menge von π wäre. Nach Lemma 3.6 a) müßte $\pi\cap B$ einen $(t, 2\cdot(m-t-1))$-Baerkegel für eine ganze Zahl t mit $2m-n \leq t \leq m-1$ enthalten. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Annahme am Anfang von Kapitel 3.1.
Es gibt q^m verschiedene $(n-m)$-dimensionale Unterräume von $\mathcal{P}$, die π in U schneiden. Jeder dieser Unterräume enthält mindestens einen Punkt aus B. Daher liegen mindestens q^m Punkte von B außerhalb π. Dann folgt die Behauptung aus der oberen Grenze (3.3) für $|B|$. □

Die folgenden Lemmata werden nur für $n > m+1$ verwandt. Sie gelten aber auch für $n = m+1$.
Für einen Punkt P nicht aus B und eine Hyperebene π nicht durch P ist die Projektion $B(P,\pi)$ von B vom Punkt P auf π die Menge der Schnittpunkte der Geraden PQ mit π, wobei Q ein Punkt aus B sei, vergleiche Definition 2.11 von Seite 8.

Lemma 3.8 *Sei P ein Punkt nicht aus B und π eine Hyperebene nicht durch P.*

a) Die Menge $B(P,\pi)$ enthält einen $(2m-n, 2(n-m-1))$-Baerkegel.

b) Die Punkte aus einer Menge T von B werden bei der Projektion von P aus auf mindestens $|T| - \theta_{2m-n}\sqrt{q}$ Punkte von $B(P,\pi)$ abgebildet.

Beweis:

a) Nach Lemma 2.12 ist $B(P,\pi)$ eine m-blockierende Menge von π. Aus Lemma 3.6 a) folgt dann wegen $|B(P,\pi)| \leq |B|$ und Bedingung (3.3), daß $B(P,\pi)$ einen $(t, 2(m-t-1))$-Baerkegel für eine Zahl t mit $2m-n \leq t \leq m-1$ enthält. Solch ein Baerkegel C enthält mehr als $\theta_{m-1}(\sqrt{q}+1)$ Punkte. Aus Lemma 3.7 folgt, daß $\langle C, P\rangle$ nicht in einer Hyperebene enthalten sein kann. Daher erzeugt C einen Unterraum der Dimension mindestens $n-1$ also π. Da ein $(t, 2(m-t-1))$-Baerkegel einen Unterraum der Dimension $2m-t-1$ aufspannt, folgt $t = 2m-n$.

b) In Teil a) hatten wir gesehen, daß $B(P,\pi)$ einen $(2m-n, 2(n-m-1))$-Baerkegel C enthält. Der Kegel C besteht aus $\theta_m + q^{2m-n+1}\theta_{n-m-2}\sqrt{q} \geq |B| - \theta_{2m-n}\sqrt{q}$ Punkten. Die letzte Ungleichung folgt aus der Bedingung (3.3) für $|B|$. Daraus folgt

$$|B(P,\pi)| \geq |C| \geq |B| - \theta_{2m-n}\sqrt{q} \quad \Rightarrow \quad \theta_{2m-n}\sqrt{q} \quad \geq |B| - |B(P,\pi)|.$$

Diese Eigenschaft überträgt sich auf jede Untermenge T von B.

□

Lemma 3.9 *a) Die Menge B enthält mindestens $\theta_m + \sqrt{q}\cdot q^{2m-n}\cdot\theta_{n-m-1}$ Punkte.*

b) Sei U ein Unterraum der Codimension $m+1$, der keinen Punkt aus B enthält. Seien P_i für $i = 1, 2, \ldots, \theta_{n-m-1}$ die Punkte von U und $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{\theta_{n-m-1}}$ Hyperebenen mit $P_i \notin \pi_i$. Nach Lemma 3.8 a) enthält die Menge $B(P_i, \pi_i)$ einen $(2m-n, 2(n-m-1))$-Baerkegel C_i. Dann werden höchstens $(\theta_{n-m-1}-1)\cdot(\theta_{2m-n-1}\cdot\sqrt{q})$ Punkte von B nicht auf diese Kegel projiziert, das heißt

$$\sum_{i=1}^{\theta_{n-m-1}} |B(P_i,\pi_i) \setminus C_i| \leq (\theta_{n-m-1}-1)\cdot\theta_{2m-n-1}\cdot\sqrt{q}.$$

c) Sei P ein Punkt und π eine Hyperebene mit $P \notin B$ und $P \notin \pi$. Gilt $n = 2m$, dann ist $B(P,\pi)$ ein $(0, n-2)$-Baerkegel.

Beweis: Wegen Resultat 2.15 und der Bedingung (3.3) gibt es einen Unterraum U der Codimension $m+1$, der keinen Punkt von B enthält.
Wir betrachten die θ_{n-m-1} Projektionen $B(P_i,\pi_i)$ von B von einem Punkt P_i von U aus auf eine Hyperebene π_i nicht durch P_i. Nach Lemma 3.8 a) enthält $B(P_i,\pi_i)$ einen $(2m-n, 2(n-m-1))$-Baerkegel C_i. Daher gilt

$$\sum_{i=1}^{\theta_{n-m-1}} |B(P_i,\pi_i)| \geq \sum_{i=1}^{\theta_{n-m-1}} |C_i| \geq \theta_{n-m-1}\cdot(\theta_m + q^{2m-n+1}\sqrt{q}\cdot\theta_{n-m-2}). \tag{3.4}$$

Wir gehen wie im Beweis von Lemma 2.31 vor. Es gibt θ_m Unterräume der Codimension m durch U. Jeder dieser Unterräume enthält mindestens einen Punkt von B, weil B eine m-blockierende Menge ist. Enthält ein solcher Unterraum $t+1$ Punkte aus B, dann tragen diese Punkte höchstens $t \cdot (\theta_{n-m-1} - 1) + \theta_{n-m-1}$ zu der linken Seite von (3.4) bei. Also gilt

$$\theta_{n-m-1} \cdot \theta_m + (|B| - \theta_m) \cdot (\theta_{n-m-1} - 1) \geq \sum_{i=1}^{\theta_{n-m-1}} |B(P_i, \pi_i)| \tag{3.5}$$

Aus (3.4) und (3.5) ergibt sich

$$|B| \geq \theta_m + q^{2m-n}\sqrt{q} \cdot \theta_{n-m-1}. \tag{3.6}$$

Dies ist Behauptung a).
Um den Teil b) zu beweisen, kann man die obere Grenze (3.3) für die Anzahl der Punkte von B in die Abschätzung (3.5) einsetzen und die untere Schranke für $\sum_{i=1}^{\theta_{n-m-1}} |C_i|$ aus Gleichung (3.4) verwenden.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\theta_{n-m-1}} |B(P_i, \pi_i) \setminus C_i| &\leq \sum_{i=1}^{\theta_{n-m-1}} |B(P_i, \pi_i)| - \sum_{i=1}^{\theta_{n-m-1}} |C_i| \\
&\leq \theta_{n-m-1}\theta_m + \theta_{m-1}\sqrt{q}(\theta_{n-m-1} - 1) - \\
&\quad\ \theta_{n-m-1}(\theta_m + q^{2m-n+1}\sqrt{q}\theta_{n-m-2}) \\
&\leq (\theta_{m-1} - \theta_{n-m-1} \cdot q^{2m-n}) \cdot \sqrt{q} \cdot (\theta_{n-m-1} - 1) \\
&\leq \theta_{2m-n-1} \cdot \sqrt{q} \cdot (\theta_{n-m-1} - 1).
\end{aligned}$$

Sei P ein Punkt nicht aus B und π eine Hyperebene nicht durch P. Aus der oberen Schranke (3.3) für $|B|$ folgt $|B(P,\pi)| \leq \theta_m + \theta_{m-1}\sqrt{q} < \theta_{m+1}$ und wegen Resultat 2.15 gibt es einen $(n-m-2)$-dimensionalen Unterraum U' von π, der keinen Punkt von $B(P,\pi)$ enthält. Sei $U := \langle U', P \rangle$, dann hat U die Codimension $m+1$ und U enthält keinen B-Punkt. Wir wenden den Teil b) auf U an. Für $n = 2m$ gilt Gleichheit in (3.6). Das bedeutet, daß für jeden Punkt $P_i \in U$ die Menge $B(P_i, \pi_i)$ ein $(0, n-2)$-Baerkegel ist. Insbesondere gilt dies für $P \in U$ und π, und damit ist Teil c) bewiesen.

□

3.1.2 Beweis von Satz 3.1 im Fall $n < 2m$

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall, daß die Dimension n des projektiven Raumes kleiner als $2m$ ist. Zuerst wollen wir zeigen, daß jeder Punkt von B auf einem $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum von B liegt. Das Hauptargument für diese Aussage wird in Lemma 3.14 mit einem kombinatorischen Argument gezeigt. In Lemma 3.15 wird dann noch nachgewiesen, daß jeder Punkt von B in einem Unterraum liegt, auf den man dieses Lemma anwenden kann. Der nächste Schritt ist

dann, zu zeigen, daß sich je zwei dieser $2(m-n)$-dimensionalen Unterräume von B in einem $2(m-n-1)$-dimensionalen Unterraum treffen.
Zuerst wird der Fall $n = m+1$ in Lemma 3.19 betrachtet. In [8] wurde dies zuerst gezeigt, indem indirekt bewiesen wurde, daß es einen Punkt von B gibt, der auf genau einem $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum von B liegt. Betrachtet man nun Hyperebenen durch diesen Punkt, so folgt recht leicht, daß B der gesuchte $(n-3,2)$-Baerkegel ist. Der Beweis konnte aber in [6] von Klaus Metsch und mir vereinfacht werden, indem die Aussage auf geradenblockierende Mengen in einer Hyperebene zurückgeführt wird. Es wird also gezeigt, daß es eine Hyperebene π gibt, deren Schnitt mit B einen $(n-4,2)$-Baerkegel C und insgesamt höchstens $\theta_{n-2} + \theta_{n-3}\sqrt{q}$ Punkte enthält. Die $(2m-n)$-dimensionalen Unterräume von B treffen π in C und gehen daher alle durch die Spitze von C. Betrachtet man nun noch eine Hyperebene nicht durch die Spitze von C, so folgt, daß der Schnitt von B mit dieser Hyperebene einen $(n-4,2)$-Baerkegel enthält und damit B ein $(n-3,2)$-Baerkegel ist. Als Induktionsanfang wird dabei das Resultat 3.2 über 2-blockierende Mengen in $PG(3,q)$, q eine Quadratzahl größer gleich 16 beziehungsweise Lemma 3.4 für $q = 9$, verwendet.
Dann wird für $n > m+1$ gezeigt, daß sich je zwei $(2m-n)$-dimensionale Unterräume U_1 und U_2 von B in einem $(2m-n-1)$-dimensionalen Unterraum treffen. Die dabei angewandte Technik ist neu und besteht darin, alle Projektionen von den Punkten eines Unterraumes disjunkt zu B aus auf eine Hyperebene, die U_1 und U_2 enthält, zu betrachten. Aus der oberen Grenze für die Anzahl der projizierten Punkte folgt dann, daß U_1 und U_2 nur einen $(2m-n+1)$-dimensionalen Unterraum erzeugen können, und daraus die Behauptung. Gilt allerdings $4m-3n \geq -1$ so kann es sein, daß U_1 und U_2 den ganzen projektiven Raum $\mathcal{P}$ erzeugen und nicht in einer Hyperebene liegen. Dieser Fall wird in Lemma 3.24 zum Widerspruch geführt. Dann folgt relativ leicht, daß B der gesuchte Baer Kegel ist. In den folgenden Lemmata werden zuerst einige Abschätzungen über Anzahlen von Punkten bewiesen. Lemma 3.10 und 3.11 gelten auch für $n \geq 2m$.

Lemma 3.10 *Sei P ein Punkt aus B. Es gibt einen $(n-m)$-dimensionalen Unterraum F, der B nur in P trifft, und eine Hyperebene π durch F mit $|\pi \cap B| \leq \theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$.*

Beweis: Wegen Lemma 2.20 gibt es einen Tangentialraum F durch P.
Wir zählen inzidente Paare (Q,π) von Punkten Q und Hyperebenen π mit $P \neq Q \in \pi \cap B$ und $F \subseteq \pi$. Durch F gehen θ_{m-1} Hyperebenen und ein Punkt außerhalb von F liegt in θ_{m-2} dieser Hyperebenen.
Angenommen, jede Hyperebene durch F enthält außer P noch mindestens $\theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ weitere Punkte von B. Dann folgt mit der Bedingung (3.3) für $|B|$:

$$\theta_{m-1} \cdot (\theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}) \leq (|B|-1) \cdot \theta_{m-2} \leq (\theta_m + \theta_{m-1}\sqrt{q} - 1) \cdot \theta_{m-2}.$$

Dies liefert $(\theta_{m-1})^2 \leq (\theta_m - 1) \cdot \theta_{m-2} = \theta_{m-1}(\theta_{m-1} - 1)$, einen Widerspruch. $\square$

Lemma 3.11 *Sei U ein r-dimensionaler Unterraum von $PG(n,q)$ und C ein (s,t)-Baerkegel. Ist U nicht in C enthalten, dann liegen in $U \setminus C$ mindestens $q^r - q^{r-1}\sqrt{q}$ Punkte.*

Beweis: Treffen sich U und C, dann ist der Schnitt ein (s', t')-Baerkegel C' mit $s' + t' + 1 \leq r$, $t' \geq 0$ und $s' \leq r - 2$, da U nicht in C enthalten ist. Nach Lemma 2.5 enthält der Kegel C' am meisten Punkte, wenn $s' = r - 2$ und $t' = 1$ sind. Dann gilt $|U \cap C| = |C'| = q^{r-1}\sqrt{q} + \theta_{r-1}$ und daraus folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 3.12 *a) Angenommen π ist eine Hyperebene, die einen $(2m-n-2, 2(n-m))$-Baerkegel C von B und insgesamt höchstens $\theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ Punkte aus B enthält.*
Dann liegt jeder $(2m - n - 1)$-dimensionale Unterraum E von $B \cap \pi$ in C.

b) Angenommen eine Cogerade σ mit $|\sigma \cap B| \leq \theta_{m-2} + \theta_{m-3}\sqrt{q}$ enthält einen $(2m-n-2, 2(n-m-1))$-Baerkegel C aus B.
Dann liegt jeder $(2m - n - 1)$-dimensionale Unterraum E von $B \cap \sigma$ in C.

Beweis: Außer den Punkten von C enthält die Menge $\pi \cap B$ beziehungsweise $\sigma \cap B$ höchstens noch $\theta_{2m-n-2}\sqrt{q}$ Punkte. Da $q \geq 9$ ist, gilt $\theta_{2m-n-2}\sqrt{q} < q^{2m-n-1} - q^{2m-n-2}\sqrt{q}$ und die Behauptung folgt aus Lemma 3.11. $\square$

Lemma 3.13 *Sei σ eine Cogerade, die einen $(2m-n-2, 2(n-m-1))$-Baerkegel aus B enthält, mit $|\sigma \cap B| \leq \theta_{m-2} + \theta_{m-3}\sqrt{q}$. Sei π eine Hyperebene durch σ, die einen $(2m - n - 2, 2(n - m))$-Baerkegel C von B enthält.*
Dann enthält $(\pi \setminus \sigma) \cap B$ mindestens $q^{m-1} + q^{m-2}\sqrt{q}$ Punkte.

Beweis: Wir zeigen, daß σ den Kegel C in höchstens $\theta_{m-2} + q^{2m-n-1}\theta_{n-m-2} \cdot \sqrt{q}$ Punkten trifft.
Da σ eine Hyperebene von π ist, muß für den Schnitt von σ und C eine der folgenden Aussagen zutreffen:

a) Die Spitze von C ist in σ enthalten.

   (i) Die Basis von C trifft σ in einem $(2(n-m)-1)$-dimensionalen Baerunterraum:
   Dieser Fall kann nicht auftreten, da ein $(2m-n-2, 2(n-m)-1)$-Baerkegel aus $\theta_{m-2} + q^{2m-n-1}\theta_{n-m-1}\sqrt{q}$ Punkten besteht. Daher gilt $|C \cap \sigma| \geq |B \cap \sigma| + (q^{m-2} - \theta_{2m-n-2})\sqrt{q}$, ein Widerspruch.

(ii) Die Basis von C trifft σ in einem $(2(n-m)-2)$-dimensionalen Baerunterraum.
In diesem Fall trifft der Kegel C die Cogerade σ in den $\theta_{m-2} + q^{2m-n-1}\theta_{n-m-2} \cdot \sqrt{q}$ Punkten eines $(2m-n-2, 2(n-m-1))$-Baerkegels.

b) Die Spitze von C trifft σ in einem $(2m-n-3)$-dimensionalen Unterraum.
Dann trifft σ den Kegel C in einem $(2m-n-3, 2(n-m))$-Baerkegel. Dieser Kegel enthält

$$|\sigma \cap C| = \theta_{m-2} + q^{2m-n-2} \cdot \theta_{n-m-1} \cdot \sqrt{q}$$

Punkte. Die Menge $B \cap \sigma$ enthält einen $(2m-n-2, 2(n-m)-2)$-Baerkegel und daher einen $(2m-n-1)$-dimensionalen Unterraum U. Dieser Unterraum U gehört nicht zu $C \cap \sigma$ und aus Lemma 3.11 folgt, daß U mindestens $q^{2m-n-1} - \sqrt{q} \cdot q^{2m-n-2}$ Punkte außerhalb C enthält. Daraus folgt

$$\begin{aligned} |\sigma \cap C| + |U \setminus C| &\leq |\sigma \cap B| \\ \theta_{m-2} + q^{2m-n-2} \cdot \theta_{n-m-1} \cdot \sqrt{q} + q^{2m-n-1} - \sqrt{q} \cdot q^{2m-n-2} &\leq |\sigma \cap B| \\ \theta_{m-2} + q^{2m-n-1} \cdot \theta_{n-m-2} \cdot \sqrt{q} + q^{2m-n-1} &\leq |\sigma \cap B|. \end{aligned}$$

Aber dies ist ein Widerspruch zu $|\sigma \cap B| \leq \theta_{m-2} + \theta_{m-3} \cdot \sqrt{q}$.

□

Lemma 3.14 *Sei σ eine Cogerade, die einen $(2m-n-2, 2(n-m-1))$-Baerkegel C aus B enthält, mit*

$$|\sigma \cap B| \leq \theta_{m-2} + \theta_{m-3}\sqrt{q}. \tag{3.7}$$

Sei E ein $(2m-n-1)$-dimensionaler Unterraum von C. Dann gibt es einen $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum von B durch E.

Beweis: Angenommen, es gibt keinen $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum von B durch E. Wir wollen dies in mehreren Schritten zu einem Widerspruch führen.

1) *Angenommen eine Hyperebene π durch σ enthält höchstens $\theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ Punkte von B. Dann enthält $\pi \cap B$ einen $(2m-n-2, 2(n-m))$-Baerkegel:*
Nach Lemma 3.6 b) enthält die Menge $\pi \cap B$ einen $(t, 2(m-2-t))$-Baerkegel für eine ganze Zahl t mit $2m-n-2 \leq t \leq m-2$, da B jeden $(n-1-(m-1))$-dimensionalen Unterraum von π trifft, $\pi \cap B$ also eine $(m-1)$-blockierende Menge von π ist. Die in C enthaltenen Unterräume haben die Dimension kleiner gleich $2m-n-1$. Ein B-Unterraum der Dimension größer gleich $2m-n$, der in σ liegt, kann also nicht in C enthalten sein und liefert nach Lemma 3.11 zu viele

B-Punkte von $\sigma \setminus C$, da in $\sigma \setminus C$ höchstens $\theta_{2m-n-2}\sqrt{q}$ Punkte liegen. Also enthält $B \cap \sigma$ keinen Unterraum mit einer Dimension größer als $2m-n-1$ und damit enthält $B \cap \pi$ keinen Unterraum mit einer größeren Dimension als $2m-n$. Daher kann t höchstens gleich $2m-n-1$ sein.
Angenommen es gilt $t = 2m-n-1$, das heißt $\pi \cap B$ enthält einen $(2m-n-1, 2(n-m-1))$-Baerkegel C'.
Aus Lemma 3.12 b) folgt, daß jeder $(2m-n-1)$-dimensionale Unterraum von $\sigma \cap B$ in C liegt. Daher ist $C' \cap \sigma = C$ und jeder $(2m-n-1)$-dimensionale Unterraum von $\sigma \cap B$ in einem $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum von C' enthalten. Aber dies ist ein Widerspruch, da wir angenommen hatten, daß es keinen $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum von B durch E gibt.
Also ist t gleich $2m-n-2$, womit die Behauptung für diesen Schritt gezeigt ist.

2) *Ist π eine Hyperebene durch σ, dann enthält $\pi \setminus \sigma$ mindestens $q^{m-1} + q^{m-2}\sqrt{q}$ Punkte von B:*
Wir nehmen an, daß $|(\pi \setminus \sigma) \cap B| \leq q^{m-1} + q^{m-2}\sqrt{q}$ ist. Aus (3.7) folgt $|\pi \cap B| \leq \theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$. Schritt 1) zeigt, daß $\pi \cap B$ eine $(2m-n-2, 2(n-m))$-Baerkegel C' enthält. Mit Lemma 3.13 folgt die Behauptung.

3) *Keine Hyperebene durch σ enthält mehr als $\theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ Punkte von B:*
Angenommen, eine Hyperebene π durch σ enthält mehr als $\theta_{m-1}+\theta_{m-2}\sqrt{q}$ Punkte von B.
Aus der Bedingung (3.3) folgt $\frac{|B \setminus \pi|}{q} < \frac{q^m + q^{m-1}\sqrt{q}}{q} = q^{m-1} + q^{m-2}\sqrt{q}$ und daher gibt es mindestens eine Hyperebene durch σ, die weniger als $q^{m-1} + q^{m-2}\sqrt{q}$ Punkte von B außerhalb σ enthält. Dies ist ein Widerspruch zu Schritt 2).

4) *Ist π eine Hyperebene durch σ, dann enthält $\pi \cap B$ einen $(2m-n-2, 2(n-m))$-Baerkegel C' und es gilt $|(B \cap \pi) \setminus C'| \leq \theta_{2m-n-2}\sqrt{q}$:*
Nach Schritt 3) enthält die Menge $\pi \cap B$ höchstens $\theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ Punkte und damit nach Schritt 1) einen $(2m-n-2, 2(n-m))$-Baerkegel C'. Die obere Abschätzung für die Anzahl der B-Punkte in $\pi \setminus C'$ folgt aus der oberen Grenze für die Anzahl der B-Punkte in π und der Mächtigkeit von C'.

5) *Sei F^* der von C aufgespannte $(n-3)$-dimensionale Unterraum. Wir können die Cogeraden durch F^* in zwei disjunkte Klassen, große und kleine Cogeraden einteilen. Dabei ist σ eine kleine Cogerade:*
Jede Cogerade σ^* durch F^* liegt in einer Hyperebene π^* durch σ. Wegen Schritt 4) enthält $\pi^* \cap B$ einen $(2m-n-2, 2(n-m))$-Baerkegel C^*. Wir nennen eine Cogerade σ^* durch F^* *groß*, wenn sie den Kegel C^* in einem $(2m-n-2, 2(n-m)-1)$-Baerkegel trifft. Die Cogerade σ^* heißt *klein*, wenn $\sigma^* \cap C^*$ ein $(2m-n-2, 2(n-m)-2)$-Baerkegel ist. Eine *große* Cogerade enthält mindestens $q^{m-2}\sqrt{q}$ Punkte mehr als ein $(2m-n-2, 2(n-m)-2)$-Baerkegel. Nach Schritt 4) gibt es höchstens $\theta_{2m-n-2}\sqrt{q}$ Punkte in $(\pi^* \cap B) \setminus C^*$. Wegen der Bedingung (3.2) ist diese Anzahl kleiner als $q^{m-2}\sqrt{q}$. Es reicht also, die Anzahl der B-Punkte in

einer Cogeraden durch F^* zu kennen, um zu bestimmen, ob diese Cogerade *groß* oder *klein* ist. Aus (3.7) folgt, daß σ eine *kleine* Cogerade ist.

6) *Enthält eine Hyperebene π'' durch F^* eine kleine Cogerade σ' durch F^*, dann liegen $\sqrt{q}+1$ große und $q-\sqrt{q}$ kleine Cogeraden durch F^* in π'':*
Ist σ' gleich σ, dann enthält $\pi'' \cap B$ nach Schritt 4) einen $(2m-n-2, 2(n-m))$-Baerkegel. Wir können nach Schritt 5) die Cogeraden durch F^* in zwei Klassen einteilen. Von den Cogeraden durch F^* treffen $\sqrt{q}+1$ diesen Kegel in einem $(2m-n-2, 2(n-m)-1)$-Baerkegel und sind also eine *große* Cogerade. Die restlichen $q-\sqrt{q}$ Cogeraden von π'' durch F^* treffen den Kegel in einem $(2m-n-2, 2(n-m-2))$-Baerkegel und sind eine *kleine* Cogerade.
Sei nun σ' ungleich σ. Dann enthält die Hyperebene $\pi := \langle \sigma', \sigma \rangle$ nach Schritt 4) höchstens $s := \theta_{2m-n-2}\sqrt{q}$ Punkte von B außerhalb des in $\pi \cap B$ enthaltenen $(2m-n-2, 2(n-m))$-Baerkegels C'. Dieser Kegel trifft σ' in einem $(2m-n-2, 2(n-m)-2)$-Baerkegel und daher gilt

$$|\sigma' \cap B| \leq \theta_{m-2} + q^{2m-n-1}\sqrt{q}\theta_{n-m-2} + s \leq \theta_{m-2} + \theta_{m-3}\sqrt{q}.$$

Wir können also auf σ' die gleichen Argumente wie auf σ anwenden, da $\sigma' \cap B$ den Kegel C und insgesamt höchstens $\theta_{m-2} + \theta_{m-3}\sqrt{q}$ Punkte enthält. Daher folgt aus Schritt 4), daß π'' einen $(2m-n-2, 2(n-m))$-Baerkegel von B enthält. Von den Cogeraden durch F^* treffen $\sqrt{q}+1$ diesen Kegel in einer *großen* Cogeraden und $q-\sqrt{q}$ in einer *kleinen* Cogeraden.

7) *Der Widerspruch:*
Wir zählen die Anzahl b von *großen* Cogeraden durch F^* auf zwei Arten:
Jede Hyperebene durch σ enthält nach Schritt 6) genau $\sqrt{q}+1$ *große* Cogeraden. Daher gibt es $b = (q+1) \cdot (\sqrt{q}+1)$ *große* Cogeraden.
Jetzt zählen wir die *großen* Cogeraden in den Hyperebenen durch eine *große* Cogerade σ'' durch F^*. Sei c die Anzahl der Hyperebenen durch σ'', in denen mindestens eine *kleine* Cogerade durch F^* liegt, und sei d die Anzahl der Hyperebenen durch σ'', die keine *kleine* Cogerade und damit $q+1$ *große* Cogeraden durch F^* enthalten. Alle Hyperebenen enthalten entweder eine *kleine* Cogerade oder nicht und daher gilt $c + d = q + 1$. Aus Schritt 6) folgt

$$c\sqrt{q} + dq + 1 = b \Rightarrow c = q - \frac{1}{\sqrt{q}-1}.$$

Aber wegen $q \neq 4$ ist dies ein Widerspruch, da c keine ganze Zahl ist. □

Lemma 3.15 *Jeder B-Punkt liegt auf mindestens einem $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum von B.*

Beweis: Sei P ein Punkt von B. Nach Lemma 3.10 gibt es einen $(n-m)$-dimensionalen Tangentialraum F mit $F \cap B = \{P\}$ und eine Hyperebene π durch

F, die höchstens $\theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ Punkte von B enthält. Da $\pi \cap B$ eine $(m-1)$-blockierende Menge von π und $|\pi \cap B| \leq \theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ ist, zeigt Lemma 3.6 b), daß $\pi \cap B$ einen $(t, 2(m-2-t))$-Baerkegel für eine ganze Zahl t mit $2m-n-2 \leq t \leq m-2$ enthält. Als einziger Punkt von B auf F gehört P zu dem Kegel in $\pi \cap B$. Ist t größer als $2m-n-2$, dann haben wir einen $(2m-n)$-dimensionalen B-Unterraum durch P gefunden, da der Kegel die Vereinigung $(t+1)$-dimensionaler Unterräume ist.
Angenommen t ist gleich $2m-n-2$, das heißt $\pi \cap B$ enthält einen $(2m-n-2, 2(n-m))$-Baerkegel C. Aus $|\pi \cap B| \leq \theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ folgt, daß $|(\pi \cap B) \setminus C| \leq \theta_{2m-n-2}\sqrt{q}$ ist. Daher enthält eine Cogerade σ durch P, die C in einem $(2m-n-2, 2(n-m)-2)$-Baerkegel $C' := C \cap \sigma$ trifft, höchstens $\theta_{2m-n-2}\sqrt{q}$ Punkte von $B \setminus C'$. Sei E ein $(2m-n-1)$-dimensionaler Unterraum von C' durch P. Nach Lemma 3.14 gibt es einen $(2m-n)$-dimensionalen B-Unterraum durch E. Dieser enthält dann auch P.

□

3.1.2.1 Der Fall $n = m + 1$

In den folgenden Lemmata nehmen wir $n = m+1$ an. Dann ist B also eine minimale geradenblockierende Menge, die keine Hyperebene enthält. Wir wollen zeigen, daß B ein $(n-3, 2)$-Baerkegel ist.

Lemma 3.16 *Sei π eine Hyperebene von $\mathcal{P}$.*

a) Es gilt $|\pi \cap B| \leq \theta_{n-2} \cdot (1 + \sqrt{q})$.

b) Gilt $|\pi \cap B| \leq \theta_{n-2} + \theta_{n-3}\sqrt{q}$, dann enthält $\pi \cap B$ eine Cogerade oder einen $(n-4, 2)$-Baerkegel.

c) Die Menge $\pi \cap B$ enthält höchstens $\sqrt{q} + 2$ Cogeraden.

Beweis: Die Aussage a) folgt aus Lemma 3.7 und Aussage b) aus Lemma 3.6 Teil b), indem man $n-1$ für m einsetzt. Angenommen $\pi \cap B$ enthält $c+1$ Cogeraden. Diese überdecken nach Lemma 2.22 mindestens

$$c \cdot q^{n-2} + \theta_{n-2} - \binom{c}{2} \cdot q^{n-3} \tag{3.8}$$

Punkte. Für $c = \sqrt{q} + 2$ folgt aus (3.8)

$$\begin{aligned} |\pi \cap B| &\geq (\sqrt{q} + 2) \cdot q^{n-2} + \theta_{n-2} - \binom{\sqrt{q}+2}{2} \cdot q^{n-3} \\ &\geq q^{n-2}\sqrt{q} + \frac{5}{2}q^{n-2} - \frac{3}{2}q^{n-3}\sqrt{q} + \theta_{n-4}. \end{aligned}$$

Diese Anzahl ist wegen $q \neq 4$ größer als $\theta_{n-2} \cdot (1 + \sqrt{q})$ im Widerspruch zu Teil a).

□

Lemma 3.17 *Eine Cogerade von B trifft weniger als $q + 2\sqrt{q}$ andere Cogeraden von B in einer Coebene.*

Beweis: Sei U eine Cogerade von B. Seien $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_q$ die Hyperebenen durch U und c_i die Anzahl der in π_i enthaltenen Cogeraden von B ungleich U. In $\pi_i \setminus U$ sind mindestens $c_i \cdot q^{n-2} - \binom{c_i}{2} \cdot q^{n-3}$ Punkte von B enthalten. Damit folgt

$$\theta_{n-2} + \sum_{i=0}^{q}(c_i q^{n-2} - \binom{c_i}{2} \cdot q^{n-3}) \leq |B| \tag{3.9}$$

Sei $c := \sum_{i=0}^{q} c_i$. Nach Lemma 3.16, Teil c), gilt $c_i \leq \sqrt{q}+1$ für alle $i \in \{0, 1, \ldots, q\}$. Damit folgt

$$\sum_{i=0}^{q}\binom{c_i}{2} = \sum_{i=0}^{q}\frac{c_i(c_i-1)}{2} \leq \sum_{i=0}^{q}\frac{c_i\sqrt{q}}{2} = \frac{c\sqrt{q}}{2}.$$

Setzt man dies in die Ungleichung (3.9) ein, so ergibt sich

$$\theta_{n-2} + cq^{n-3}(q - \frac{\sqrt{q}}{2}) \leq |B|.$$

Aus der oberen Schranke (3.3) für $|B|$ folgt, daß c kleiner als $q + 2\sqrt{q}$ sein muß. □

Lemma 3.18 *Es gibt eine Hyperebene, die einen $(n-4, 2)$-Baerkegel und höchstens $\theta_{n-2} + \theta_{n-3}\sqrt{q}$ Punkte von B enthält.*

Beweis: Angenommen, es gibt keine solche Hyperebene. Aus Lemma 3.16, Teil b) folgt dann, daß jede Hyperebene, die B in höchstens $\theta_{n-2} + \theta_{n-3}\sqrt{q}$ Punkten trifft, eine Cogerade von B enthält. Nach Lemma 3.10 gibt es eine Hyperebene π, die höchstens $\theta_{n-2} + \theta_{n-3}\sqrt{q}$ Punkte von B enthält. Also liegt eine Cogerade σ in $\pi \cap B$. Sei S eine Coebene von σ. Wir wollen zeigen, daß es eine B-Cogerade ungleich σ durch S gibt. Sei $c := |B \cap (\pi \setminus \sigma)|$. Nach Konstruktion gilt $c \leq \theta_{n-3}\sqrt{q}$. In π gibt es q Cogeraden ungleich σ durch S. Sei F eine Cogerade von π durch S, die die minimale Anzahl von B-Punkten enthält. Dann gilt $|F \cap B| \leq \theta_{n-3} + c/q$. In $B \setminus \pi$ gibt es nach (3.3) noch höchstens $q^{n-1} + \theta_{n-2}\sqrt{q} - c$ Punkte. Also gibt es eine Hyperebene π' ungleich π durch F, die höchstens $\lfloor \frac{q^{n-1}+\theta_{n-2}\sqrt{q}-c}{q} \rfloor$ Punkte von B außerhalb F und insgesamt höchstens $\lfloor \frac{q^{n-1}+\theta_{n-2}\sqrt{q}-c}{q} \rfloor + |F \cap B| \leq \theta_{n-2} + \theta_{n-3}\sqrt{q}$ Punkte von B enthält. Also enthält $\pi' \cap B$ eine Cogerade σ'. Diese trifft π in S, da $\pi' \cap \pi = F$ und $|(F \setminus S) \cap B| \leq c/q \leq \theta_{n-3}\sqrt{q}/q < q^{n-3}$ ist.
Also liegt jede Coebene von σ in noch einer anderen Cogeraden von B und, da es θ_{n-2} Coebenen in σ gibt, treffen mindestens θ_{n-2} Cogeraden von B die Hyperebene π in einer Coebenen. Dies ist ein Widerspruch zu Lemma 3.17. □

Lemma 3.19 *Die Menge B ist ein $(n-3,2)$-Baerkegel.*

Beweis: Nach Lemma 3.18 gibt es eine Hyperebene π, die B in höchstens $\theta_{n-2} + \theta_{n-3}\sqrt{q}$ Punkten trifft und einen $(n-4,2)$-Baerkegel C aus B enthält. Sei V die Spitze von C und $\overline{V}$ eine Ebene von π disjunkt zu V. Jeder Punkt von B liegt nach Lemma 3.15 auf einer Cogeraden aus B. Angenommen es gibt eine Cogerade σ aus B, die π nicht in einer Coebenen von C trifft. Nach Lemma 3.11 enthält $\sigma \cap (\pi \setminus C)$ mindestens $q^{n-3} - q^{n-4}\sqrt{q}$ Punkte. Aber dies ist ein Widerspruch zu $|B \cap (\pi \setminus C)| \leq \theta_{n-4}\sqrt{q}$. Also gilt $\pi \cap B = C$, die Cogeraden von B treffen π in einem $(n-3)$-dimensionalen Unterraum von C und gehen alle durch V und $B \cap \overline{V}$ ist eine Baerunterebene.

Wir wollen zeigen, daß es einen $(n-3)$-dimensionalen Raum Z durch V gibt, der in allen B-Cogeraden liegt. Dann kann der Beweis wie folgt abgeschlossen werden: Da jeder B-Punkt von $\overline{V}$ auf einer Cogeraden von B liegt und alle B-Cogeraden durch Z gehen, enthält B dann den $(n-3,2)$-Baerkegel mit der Spitze Z und der Basis $B \cap \overline{V}$. Aus der Minimalität von B folgt dann, daß B gleich diesem Kegel ist und damit Behauptung.

Sei σ' ein $(n-2)$-dimensionaler Unterraum von π, der V nicht enthält. Dann ist $\sigma' \cap B$ ein $(n-5,2)$-Baerkegel C^*, der $\theta_{n-3} + q^{n-4}\sqrt{q}$ Punkte enthält. Sei $\pi' \neq \pi$ eine Hyperebene durch σ', die die von den Hyperebenen ungleich π durch σ' minimale Anzahl von B-Punkten enthält. Wegen der Bedingung (3.3) gilt $|B \setminus \pi| \leq q^{n-1} + (q^{n-2} + \theta_{n-4})\sqrt{q}$. Damit folgt

$$|B \cap (\pi' \setminus \sigma')| \leq \left\lfloor \frac{q^{n-1} + (q^{n-2} + \theta_{n-4})\sqrt{q}}{q} \right\rfloor = q^{n-2} + (q^{n-3} + \theta_{n-5})\sqrt{q}$$

und $|B \cap \pi'| \leq \theta_{n-2} + \theta_{n-3}\sqrt{q}$. Die Hyperebene π' kann keine B-Cogerade enthalten, da alle B-Cogeraden durch V gehen und V nicht in π' enthalten ist. Also enthält $\pi' \cap B$ nach Lemma 3.16, Teil b) einen $(n-4,2)$-Baerkegel C'. Wie für π folgt für π', daß $\pi' \cap B = C'$ und daß alle B-Cogeraden die Spitze V' von C' enthalten. Also enthalten alle B-Cogeraden den Unterraum $Z := \langle V, V' \rangle$. Dies schließt den Beweis ab. $\square$

3.1.2.2 Der Fall $m+1 < n < 2m$

Sei nun die Dimension n des projektiven Raumes größer als $m+1$. Wir wollen zeigen, daß B einen $(2m-n-1, 2(n-m))$-Baerkegel enthält. Nach Lemma 3.15 liegt jeder Punkt von B auf einem $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum von B. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, zu zeigen, daß sich je zwei dieser $(2m-n)$-dimensionalen Unterräume von B in einem $2(m-n-1)$-dimensionalen Unterraum schneiden. Dies wird in Lemma 3.24 nachgewiesen.

Lemma 3.20 *Die Menge B enthält keinen $(2m-n+2)$-dimensionalen Unterraum.*

Beweis: Angenommen, es gibt einen $(2m-n+2)$-dimensionalen Unterraum U in B.
Sei π eine Hyperebene durch U und P ein Punkt außerhalb von $B \cup \pi$. Nach Lemma 3.8 a) enthält die Menge $B(P,\pi)$ einen $(2m-n, 2(n-m-1))$-Baerkegel C. Es gilt $|C| = \theta_m + q^{2m-n+1}\sqrt{q} \cdot \theta_{n-m-2}$. Wegen Lemma 3.11 liegen mindestens $q^{2m-n+2} - q^{2m-n+1}\sqrt{q}$ Punkte von U in $B(P,\pi) \setminus C$. Dies liefert aber wegen $q \neq 4$ einen Widerspruch zu der oberen Grenze (3.3) für $|B|$:

$$|B| \geq |B(P,\pi)| \geq |C| + q^{2m-n+2} - q^{2m-n+1}\sqrt{q}$$
$$\Rightarrow \theta_{2m-n}\sqrt{q} \geq q^{2m-n+2} - q^{2m-n+1}\sqrt{q}.$$

□

Lemma 3.21 *a) Sei U ein $(2m-n+2)$-dimensionaler Unterraum, der einen $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum von B enthält.*
Dann gibt es einen Unterraum F der Codimension $m+1$ disjunkt zu $B \cup U$.

b) Sei π eine Hyperebene. Es gibt einen Unterraum F der Codimension $m+1$ disjunkt zu B, der nicht in π enthalten ist.

Beweis: Aus der Bedingung (3.3) folgt $|B| < \theta_{m+1}$. Nach Resultat 2.15 gibt es also einen Unterraum F' der Codimension $m+1$, in dem kein Punkt von B liegt.

a) Da B jede Ebene von U trifft, hat $F' \cap U$ höchstens die Dimension 1. Ist F' disjunkt zu U, dann ist nichts zu zeigen.
Fall i) *$F' \cap U$ ist ein Punkt:* Sei F'' ein $(n-m-2)$-dimensionaler Unterraum von F', der U nicht trifft. Es gibt $\theta_{m+1} - \theta_{2m-n+2}$ Unterräume der Codimension $m+1$ durch F'' disjunkt zu U. Diese Anzahl ist nach (3.3) größer als $|B|$ und wir können einen dieser Unterräume, der einen leeren Schnitt mit B hat, als F auswählen.
Fall ii) *$F' \cap U$ ist eine Gerade:* Sei F''' ein $(n-m-3)$-dimensionaler Unterraum von F' disjunkt zu U. Da es $\theta_{m+2} - \theta_{2m-n+2} > |B|$ Unterräume der Codimension $m+2$ durch F''' disjunkt zu U gibt, trifft mindestens ein $(n-m-2)$-dimensionaler Unterraum F'' durch F''' nicht $B \cup U$. Wie in Fall i) finden wir einen Unterraum F der Codimension $m+1$ durch F'' disjunkt zu $B \cup U$.

b) Ist F' nicht in π enthalten, dann sind wir fertig.
Angenommen F' ist in π enthalten. Sei F'' ein $(n-m-2)$-dimensionaler Unterraum von F'. Wir betrachten die q^{m+1} verschiedenen Unterräume der Codimension $(m+1)$ durch F'', die nicht in π enthalten sind. Wegen (3.3) gilt $|B| < q^{m+1}$. Daher ist mindestens einer dieser Unterräume disjunkt zu B und wir wählen diesen als F. □

Lemma 3.22 *Seien E_1 und E_2 zwei verschiedene $(2m-n)$-dimensionale Unterräume von B. Dann ist die Dimension von $E_1 \cap E_2$ gleich $4m-3n$ oder gleich $2m-n-1$.*

Beweis: Wir nehmen an, daß die Dimension von $E_1 \cap E_2$ größer als $4m-3n$ ist, und wollen zeigen, daß sie dann gleich $2m-n$ ist.
Angenommen, die Dimension von $E_1 \cap E_2$ ist kleiner als $2m-n-1$. Sei U das Erzeugnis von E_1 und E_2. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) Hier nehmen wir an, daß die Dimension von $E_1 \cap E_2$ gleich $2m-n-2$ und damit $\dim(U) = 2m-n+2$ ist:
Nach Lemma 3.21 a) gibt es einen Unterraum F der Codimension $m+1$ disjunkt zu $B \cup U$. Seien P_i, $i = 1, 2, \ldots, \theta_{n-m-1}$, die Punkte von F und für einen Punkt P_i sei π_i eine Hyperebene nicht durch P_i, die durch U geht. Wegen Lemma 3.8 a) enthält die Menge $B(P_i, \pi_i)$ der projizierten Punkte einen $(2m-n, 2(n-m-1))$-Baerkegel C_i. Gehört einer der Unterräume E_1 oder E_2 nicht zu C_i, dann enthält dieser Unterraum nach Lemma 3.11 mindestens $s := q^{2m-n} - q^{2m-n-1}\sqrt{q}$ Punkte von $B(P_i, \pi_i) \setminus C_i$. Aus Lemma 3.9 b) folgt

$$\sum_{i=1}^{\theta_{n-m-1}} |B(P_i, \pi_i) \setminus C_i| \leq (\theta_{n-m-1} - 1) \cdot \theta_{2m-n-1} \cdot \sqrt{q} =: S.$$

Wegen

$$S < (q^{n-m-2}\sqrt{q} + 3q^{n-m-2}) \cdot s$$

liegen E_1 und E_2 in mindestens $\theta_{n-m-1} - (q^{n-m-2}\sqrt{q} + 3q^{n-m-2})$ Kegeln C_i. Gehören E_1 und E_2 zu C_i, dann kann weder E_1 noch E_2 die Spitze V_i von C_i sein, da sonst die Dimension von $E_1 \cap E_2$ im Widerspruch zu unserer Annahme größer gleich $(2m-n-1)$ wäre. Daher haben $E_1' := E_1 \cap V$ und $E_2' = E_2 \cap V$ die Dimension $2m-n-1$. Da $\dim(E_1 \cap E_2) = 2m-n-2$ gilt, liegt die Spitze $V_i = \langle E_1', E_2' \rangle$ in U. Sei Q_1 ein Punkt von $E_1 \setminus E_1'$ und Q_2 ein Punkt von $E_2 \setminus E_2'$. Die Gerade Q_1Q_2 trifft C_i in einer Baer Untergeraden und zusammen mit V_i erzeugt jeder Punkt von $C_i \cap Q_1Q_2$ einen $(2m-n+1)$-dimensionalen Unterraum von $C_i \cap U$. Daher trifft U den Kegel C_i in $q^{2m-n+1}\sqrt{q} + \theta_{2m-n+1}$ Punkten. Sei $t := |U \cap B|$. Wir zählen die B-Punkte in den $(2m-n+3)$-dimensionalen Unterräumen durch U, die von U und einem Punkt P_i von F erzeugt werden, so daß beide Unterräume E_1 und E_2 zu C_i gehören:

$$(\theta_{n-m-1} - (q^{n-m-2}\sqrt{q} + 3q^{n-m-2})) \cdot (q^{2m-n+1}\sqrt{q} + \theta_{2m-n+1} - t) + t \leq |B|. \tag{3.10}$$

Nach Lemma 3.20 gibt es einen Punkt von U, der nicht in B enthalten ist. Projizieren wir B von diesem Punkt aus auf eine Hyperebene nicht durch diesen Punkt, dann werden die B-Punkte von U auf höchstens θ_{2m-n+1} Punkte abgebildet und aus Lemma 3.8 b) folgt, daß $t \leq \theta_{2m-n+1} + \theta_{2m-n}\sqrt{q}$. Zusammen mit Gleichung (3.10) folgt ein Widerspruch zu der Bedingung (3.3) für $|B|$.

b) Die Dimension von $E_1 \cap E_2$ ist höchstens $2m-n-3$:
Nach Voraussetzung gilt $\dim(E_1 \cap E_2) > 4m-3n$. Die Dimension von $\langle E_1, E_2\rangle$ ist gleich $4m-2n-\dim(E_1\cap E_2) < 4m-2n-(4m-3n) = n$. Daher liegen E_1 und E_2 in einer Hyperebene π. Nach Lemma 3.21 b) gibt es einen Unterraum F der Codimension $m+1$, der nicht in π enthalten ist und B nicht trifft. Sei P ein Punkt von $F \setminus \pi$. Nach Lemma 3.8 a) enthält die Menge $B(P,\pi)$ einen $(2m-n, 2(n-m-1))$-Baerkegel C. Die Unterräume E_1 und E_2 liegen in $B(P,\pi)$. Da C ein $(2m-n, 2(n-m-1))$-Baerkegel ist, treffen sich je zwei $(2m-n)$-dimensionale Unterräume von C in einem Unterraum der Dimension größer gleich $2m-n-2$. Da die Dimension von $E_1 \cap E_2$ höchstens gleich $2m-n-3$ ist, enthält der Kegel C nicht beide Unterräume E_1 und E_2. Nach Lemma 3.11 ist daher $|B(P,\pi)\setminus C| \geq q^{2m-n} - q^{2m-n-1}\sqrt{q}$. Da es q^{n-m-1} Punkte P in $F\setminus\pi$ gibt, folgt

$$q^{n-m-1}\cdot(q^{2m-n} - q^{2m-n-1}\sqrt{q}) \leq (\theta_{n-m-1}-1)\cdot\theta_{2m-n-1}\sqrt{q}.$$

aus Lemma 3.9 b), Widerspruch.

□

Lemma 3.23 *Ein Unterraum, der in B liegt, hat höchstens die Dimension $2m-n$.*

Beweis: Angenommen, es gibt einen $(2m-n+1)$-dimensionalen Unterraum U in B. Wegen Resultat 2.15 und da nach Bedingung (3.2) die Dimension n größer als $m+1$ ist, gibt es einen Punkt P in $B\setminus U$. Nach Lemma 3.15 geht mindestens ein $(2m-n)$-dimensionaler B-Unterraum U' durch P. Aus der Dimensionsformel folgt, daß die Dimension von $U'\cap U$ größer als $4m-3n$ ist. Daher trifft der Unterraum U' nach Lemma 3.22 jeden $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum von U durch $U\cap U'$ in einem $(2m-n-1)$-dimensionalen Unterraum. Also ist $\dim(U'\cap U) = 2m-n-1$. Sei U'' ein $(2m-n)$-dimensionaler Unterraum von U, der $U\cap U'$ in einem $(2m-n-2)$-dimensionalen Unterraum schneidet. Wegen Bedingung (3.2) gilt $2m-n-2 > 4m-3n$. Aus $\dim(U'\cap U'') = 2m-n-2$ folgt mit Lemma 3.22 ein Widerspruch.
□

Lemma 3.24 *Seien E_1 und E_2 zwei $(2m-n)$-dimensionale Unterräume von B. Dann schneiden sich E_1 und E_2 in einem $(2m-n-1)$-dimensionalen Unterraum.*

Beweis: Gilt $4m-3n < -1$, dann folgt die Behauptung aus Lemma 3.22, da $\dim(E_1\cap E_2) = 4m-3n$ nicht möglich ist.
Sei also ab jetzt $4m-3n \geq -1$. Wir wollen zeigen, daß B einen $(2m-n-2, 2(n-m))$-Baerkegel C in einer Hyperebene π' mit $|\pi'\cap B| \leq \theta_{m-1}+\theta_{m-2}\sqrt{q}$ enthält. Haben wir so eine Hyperebene π' gefunden, dann folgt aus Lemma 3.12 a), daß E_1 und E_2 die Hyperebene π' in mindestens einem $(2m-n-1)$-dimensionalen Unterraum von C

schneiden. Daher enthalten E_1 und E_2 die Spitze von C und es gilt $\dim(E_1 \cap E_2) \geq 2m-n-2 > 4m-3n$ wegen der Bedingung (3.2). Aus Lemma 3.22 folgt dann die Behauptung.
Angenommen, B enthält keinen $(2m-n-2, 2(n-m))$-Baerkegel, der in einer Hyperebene mit höchstens $\theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ Punkten von B liegt. Wir führen dies in mehreren Schritten zu einem Widerspruch:

1) *Eine Hyperebene π, die B in höchstens $\theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ Punkten trifft, enthält einen $(2m-n-1, 2(n-m-1))$-Baerkegel von B:*
Die Menge $\pi \cap B$ ist eine $(m-1)$-blockierende Menge von π. Daher enthält sie nach Lemma 3.6 b) einen $(t, 2\cdot(m-t-2))$-Baerkegel für eine ganze Zahl t mit $2m-n-2 \leq t \leq m-2$. Aus Lemma 3.23 folgt, daß kein $(2m-n+1)$-dimensionaler Unterraum in B enthalten ist. Deshalb ist t gleich $2m-n-2$ oder gleich $2m-n-1$. Aber nach unserer Annahme am Anfang des Beweises enthält B keinen $(2m-n-2, 2(n-m))$-Baerkegel in einer Hyperebene mit höchstens $\theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ Punkten von B. Also gilt $t = 2m-n-1$ und damit folgt die Behauptung.

2) *Es gibt eine Hyperebene π, die einen $(2m-n-1, 2(n-m-1))$-Baerkegel C enthält und $\delta := |\pi \cap B| - |C| \leq \theta_{2m-n-1}\sqrt{q}$ erfüllt:*
Nach Lemma 3.10 gibt es eine Hyperebene π, die B in höchstens $\theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ Punkten trifft. Wegen Schritt 1) enthält die Menge $\pi \cap B$ einen $(2m-n-1, 2(n-m-1))$-Baerkegel C. Wir nennen die Punkte von $B \cap \pi$ außerhalb C *extra*-Punkte. Die obere Grenze für die Anzahl δ der *extra*-Punkte kann aus der Obergrenze für die Anzahl der B-Punkte in π und der Mächtigkeit von C (vergleiche Lemma 2.5) berechnet werden.

3) *Sei V die Spitze von C. Es gibt einen $(2(n-m-1))$-dimensionalen Unterraum $\overline{V}$ von $\langle C\rangle$ disjunkt zu V, der keinen extra-Punkt enthält:*
Wir können Lemma 2.24 auf $\langle C\rangle$ anwenden und damit die Anzahl der Unterräume U von $\langle C\rangle$ mit $V \cap U = \emptyset$ und $\langle V, U\rangle = \langle C\rangle$ bestimmen, wobei mit den Bezeichnungen dieses Lemmas $d := n-2$, $W := V$ und der Schnitt $L = W \cap U$ leer sei. Daher gibt es $S := q^{(2m-n)\cdot(2n-2m-1)}$ Unterräume U der Dimension $2(n-m-1)$ disjunkt zu V in $\langle C\rangle$. Sei P ein Punkt außerhalb von V. Aus Lemma 2.24 mit $W := \langle V, P\rangle$ und $L := \{P\}$ folgt, daß jeder *extra*-Punkt in $s := q^{(2m-n)\cdot(2n-2m-2)}$ dieser Unterräume von $\langle C\rangle$ liegt. Da S größer als $\delta \cdot s$ ist, folgt die Behauptung.

4) *Es gibt eine Cogerade σ in π so, daß $\sigma \cap C$ ein $(2m-n-2, 2(n-m-1))$-Baerkegel ist und σ höchstens δ/q extra-Punkte enthält:*
Beachte $\dim(\langle C\rangle) = n-2$. Sei δ_1 die Anzahl der *extra*-Punkte in $\langle C\rangle$ und δ_2 die Anzahl der *extra*-Punkte in $\pi \setminus \langle C\rangle$. Dann gilt $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Wir betrachten die Coebenen durch $\overline{V}$, die V in einem $(2m-n-2)$-dimensionalen Unterraum treffen. Es gibt θ_{2m-n-1} solcher Coebenen und ein *extra*-Punkte von $\langle C\rangle$ liegt in θ_{2m-n-2} dieser Coebenen. Daher enthält mindestens eine Coebene E von diesen

höchstens δ_1/q *extra*-Punkte. Durch E gehen q Cogeraden, die C nur in Punkten von E treffen. Daher enthält mindestens eine dieser Cogeraden höchstens δ_2/q *extra*-Punkte außerhalb E. Diese Cogerade erfüllt die Bedingungen für σ.

5) *Es gibt eine Hyperebene $\pi' \neq \pi$ so, daß $\pi' \cap C$ ein $(2m-n-2, 2(n-m-1))$-Baerkegel ist und $|\pi' \cap B| \leq \theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ ist:*
Wir betrachten die Hyperebenen ungleich π durch die Cogerade σ aus Schritt 4). Außerhalb von π gibt es wegen der oberen Grenze (3.3) für $|B|$ höchstens $c := q^m + q^{m-1}\sqrt{q} + \theta_{2m-n-1}\sqrt{q} - \delta$ Punkte von B. Daher gibt es mindestens eine Hyperebene π' durch σ, die höchstens c/q Punkte von B außerhalb σ enthält und damit $|\pi' \cap B| \leq c/q + |\sigma \cap B|$ erfüllt. Aus Schritt 4) folgt, daß $|\pi' \cap B| \leq \theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ ist. Die Hyperebene π' trifft $\langle C \rangle$ in σ und damit ist $\pi' \cap C = \sigma \cap C$ ein $(2m-n-2, 2(n-m-1))$-Baerkegel.

6) *Die Menge $\pi' \cap B$ enthält einen $(2m-n-1, 2(n-m-1))$-Baerkegel C':*
Dies folgt aus Schritt 1).

7) *Der Kegel C' enthält mindestens einen $(2m-n-1)$-dimensionalen Unterraum von $C \cap \pi'$:*
Angenommen, der Kegel C' enthält keinen $(2m-n-1)$-dimensionalen Unterraum von $C \cap \pi'$. Nach Lemma 3.11 liefert jeder $(2m-n-1)$-dimensionale Unterraum von $C \cap \pi'$ mindestens $q^{2m-n-1} - q^{2m-n-2}\sqrt{q} = q^{2m-n-2}(q - \sqrt{q}) =: s$ Punkte von $(\pi' \cap B) \setminus C'$. Höchstens $\theta_{2m-n-2} =: t$ dieser Punkte sind in der Spitze von $C \cap \pi'$ enthalten. Der Kegel $C \cap \pi'$ enthält $\theta_{n-m-1} + \theta_{n-m-2}\sqrt{q} =: r$ Unterräume der Dimension $2m-n-1$, die sich paarweise in der Spitze treffen. Wegen $|\pi' \cap B| \leq \theta_{m-1} + \theta_{m-2}\sqrt{q}$ folgt mit Lemma 2.5, daß $|(\pi' \cap B) \setminus C'| \leq \theta_{2m-n-1}\sqrt{q}$ und damit

$$(s-t) \cdot r + t \leq |(\pi' \cap B) \setminus C'|$$
$$(q^{2m-n-2}(q-\sqrt{q}) - \theta_{2m-n-2})(\theta_{n-m-1} + \theta_{n-m-2}\sqrt{q}) + \theta_{2m-n-2} \leq \theta_{2m-n-1}\sqrt{q}.$$

Dies liefert mit Bedingung (3.2) einen Widerspruch.

8) *Der Widerspruch*
Nach Schritt 7) gibt es einen $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum U von C so, daß $U \cap \pi'$ in C' enthalten ist. Sei W ein $(2m-n)$-dimensionaler Unterraum von C'. Da die Dimension von $U \cap W$ mindestens $2m-n-2$ und dies wegen Bedingung (3.2) größer als $4m-3n$ ist, folgt aus Lemma 3.22, daß die Dimension von $U \cap W$ mindestens $2m-n-1$ ist. Dabei war W ein beliebiger $(2m-n)$-dimensionaler Unterraum von C'. Das heißt U trifft jeden $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum von C' in einem $(2m-n-1)$-dimensionalen Unterraum und damit enthält U die Spitze V' von C'. Sei nun U^* ungleich U ein anderer $(2m-n)$-dimensionaler Unterraum von C. Dann trifft U^* wegen $V' \subseteq U$ den Raum V' und damit jeden $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum von C' in einem Unterraum

der Dimension größer gleich $2m-n-2$. Wie für U folgt, daß U^* jeden $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum von C' in einem $(2m-n-1)$-dimensionalen Unterraum trifft und damit auch V' enthält. Also gilt $V' \subseteq U \cap U^*$. Dies ist ein Widerspruch, da $U \cap U^* = V$ und nach Konstruktion (Schritt 5)) die Dimension von $V \cap \pi'$ gleich $2m-n-2$ ist.

□

Lemma 3.25 *Die* $(2m-n)$*-dimensionalen Unterräume von* B *gehen durch einen gemeinsamen* $(2m-n-1)$*-dimensionalen Unterraum* V*.*

Beweis: Aus Lemma 3.24 und Lemma 2.21 folgt, daß die $(2m-n)$-dimensionalen Unterräume von B entweder durch einen $(2m-n-1)$-dimensionalen Unterraum gehen oder in einem $(2m-n+1)$-dimensionalen Unterraum enthalten sind. Wegen Bedingung (3.2) gilt $2m-n+1 < m$. Da B eine m-blockierende Menge ist und nach Lemma 3.15 jeder B-Punkt auf mindestens einem $(2m-n)$-Raum liegt, ist der zweite Fall nicht möglich. □

Lemma 3.26 *Die Menge* B *ist ein* $(2m-n-1, 2(n-m))$*-Baerkegel.*

Beweis: Nach Lemma 3.15 liegt jeder B-Punkt in einem $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum von B. Diese Unterräume gehen wegen Lemma 3.25 durch einen $(2m-n-1)$-dimensionalen Unterraum V. Sei $\overline{V}$ ein $(2n-2m)$-dimensionaler Unterraum von $\mathcal{P}$ disjunkt zu V. Dann ist B die Vereinigung der Unterräume $\langle V, P\rangle$ für einen Punkt $P \in \overline{V} \cap B$.
Angenommen, der Unterraum $\overline{V}$ enthält eine B-Gerade g. Alle B-Punkte von g liegen in einem $(2m-n)$-dimensionalen Unterraum durch V. Da die Dimension von V gleich $2m-n-1$ ist, liegt der Unterraum $\langle V, g\rangle$ in B. Aber dies ist ein Widerspruch zu Lemma 3.23, da $\dim(\langle V, g\rangle) = 2m-n+1$.
Angenommen, $B \cap \overline{V}$ enthält mehr als $\theta_{n-m} + \theta_{n-m-1}\sqrt{q}$ Punkte. Jeder Punkt von $B \cap \overline{V}$ liegt in einem $(2m-n)$-dimensionalen B-Unterraum durch V. Wir zählen die B-Punkte in diesen Unterräumen.

$$\begin{aligned} |B| &\geq (\theta_{n-m} + \theta_{n-m-1}\sqrt{q} + 1) \cdot q^{2m-n} + \theta_{2m-n-1} \\ &\geq \theta_m + \theta_{m-1}\sqrt{q} + q^{2m-n} - \theta_{2m-n-1}\sqrt{q}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (3.3).
Daher ist $B \cap \overline{V}$ eine $(n-m)$-blockierende Menge von $\overline{V}$, die keine Gerade enthält und $|B \cap \overline{V}| \leq \theta_{n-m} + \theta_{n-m-1}\sqrt{q}$ erfüllt. Aus der Induktionsannahme zum Beweis von Satz 3.1 folgt, daß $B \cap \overline{V}$ isomorph zu einem $(2(n-m))$-dimensionalen Baerunterraum ist. Also ist B ein Baerkegel mit Spitze V und Basis einem $(2n-2m)$-dimensionalen Baerunterraum. □

Dieses Lemma schließt den Beweis von Satz 3.1 für den Fall $n < 2m$ ab.

3.1.3 Beweis von Satz 3.1 im Fall $n = 2m$

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall $n = 2m$ und wollen zeigen, daß B isomorph zu einem n-dimensionalen Baerunterraum ist. In Lemma 3.30 wird dann noch nachgewiesen, daß B den ganzen Raum $\mathcal{P}$ erzeugt.

Lemma 3.27 *Die Menge B ist isomorph zu einem n-dimensionalen Baerunterraum.*

Beweis: Projizieren wir B von einem Punkt $P \notin B$ auf eine Hyperebene π nicht durch P, dann ist nach Lemma 3.9 c) die Menge $B(P, \pi)$ ein $(0, n-2)$-Baerkegel.

1) *Die Menge B enthält keine Ebene:*
   Angenommen, B enthält eine Ebene E. Sei P ein Punkt außerhalb von $E \cup B$ und π eine Hyperebene durch E aber nicht durch P. Dann ist E in $B(P, \pi)$ enthalten. Aber $B(P, \pi)$ ist ein $(0, n-2)$-Baerkegel, Widerspruch.

2) *Jede Gerade g trifft B in $0, 1, \sqrt{q}+1$ oder $q+1$ Punkten:*
   Wegen Bedingung (3.2) und $n = 2m$ gilt $|B| < \theta_{n-2}$ nach der oberen Grenze (3.3) für $|B|$. Also gibt es eine Ebene F durch g, die B nur in Punkten von g trifft. Sei P ein Punkt von $F \setminus g$ und π eine Hyperebene durch g aber nicht durch P. Dann ist $B(P, \pi)$ ein $(0, n-2)$-Baerkegel und die B-Punkte von F werden auf die Punkte einer Geraden abgebildet. Eine Gerade trifft einen $(0, n-2)$-Baerkegel in 0, 1, $\sqrt{q}+1$ oder $q+1$ Punkten.

3) *Jede Gerade g trifft B in $0, 1$ oder $\sqrt{q}+1$ Punkten:*
   Angenommen, die Gerade g ist in B enthalten. Sei E eine Ebene durch g, die mindestens einen Punkt Q von B außerhalb g enthält. Nach Schritt 1) enthält B keine Ebene und daher gibt es einen Punkt P auf E, der nicht in B liegt. Nach Schritt 2) enthält jede Gerade von E durch Q mindestens $\sqrt{q}+1$ Punkte von B. Daher gilt $|E \cap B| \geq (q+1) \cdot \sqrt{q} + 1$. Projizieren wir die Punkte von B von P aus auf eine Hyperebene nicht durch P, dann werden die B-Punkte von E auf höchstens $q+1$ Punkte einer Geraden abgebildet. Daher enthält die Ebene E nach Lemma 3.8 b) höchstens $q + \sqrt{q} + 1$ Punkte von B, aber dies ist ein Widerspruch zu $|E \cap B| \geq (q+1) \cdot \sqrt{q} + 1$.

4) *Zwei Geraden, die $\sqrt{q}+1$ Punkte von B enthalten, treffen sich in einem Punkt von B:*
   Seien g und h zwei Geraden mit $|g \cap B| = \sqrt{q}+1 = |h \cap B|$ und sei P der Schnittpunkt von g und h.
   Angenommen, P liegt nicht in B. Wir projizieren die Punkte von B von P aus auf eine Hyperebene π nicht durch P. Die B-Punkte von g und h werden auf zwei Punkte abgebildet. Mit $T := (g \cup h) \cap B$ liefert das einen Widerspruch zu Lemma 3.8 b).

5) *Die Inzidenz-Struktur mit Punktmenge* B *und den Geraden, die* B *in* $\sqrt{q}+1$ *Punkten treffen, ist isomorph zu* $PG(n,\sqrt{q})$*:*
Nach Schritt 2) und Schritt 3) liegen je zwei Punkte von B auf einer eindeutigen Geraden, die B in $\sqrt{q}+1 \geq 3$ Punkten trifft. Auch das Axiom von Pasch (oder Veblen und Young) ist erfüllt: Seien l_1, l_2, l_3 und l_4 vier Geraden, von denen keine drei durch einen Punkt gehen und sich je zwei treffen außer eventuell l_3 und l_4, dann treffen sich l_3 und l_4 in $PG(2n,q)$ und der Schnittpunkt liegt nach Schritt 4) in B.

□

Bemerkung 3.28 *Nachdem gezeigt ist, daß* B *keine Gerade enthält (Schritt 3)) kann man auch ein Resultat von Beutelspacher [2] zitieren, das eine untere Grenze von* $\theta_m+\theta_{m-1}\sqrt{q}$ *für die Kardinalität einer* m*-blockierenden Menge* B *in* $PG(2m,q)$*, die keine Gerade enthält, liefert und in dem Fall der Gleichheit aussagt, daß* B *ein* $(2m)$*-dimensionaler Baerunterraum ist.*

In dem nächsten Lemma wird gezeigt, daß B den ganzen Raum $PG(n,q)$ erzeugt. Die entscheidende Eigenschaft ist dabei, daß eine Gerade von $\mathcal{P}$ höchstens eine Gerade von B enthält. Diese Eigenschaft überträgt sich, da die Ordnung von B gleich $\sqrt{q}$ ist, auch auf Unterräume größerer Dimension.
Wir geben hier zuerst ein Beispiel einer d-dimensionalen Untergeometrie an, die in einer Hyperebene von $PG(d,q)$ enthalten ist, um zu zeigen, welche Strukturen in Lemma 3.30 ausgeschlossen werden.

Beispiel 3.29 *Sei* q *eine Primzahlpotenz. Wir betrachten den projektiven Raum* $PG(3,q)$ *als Untergeometrie von* $PG(3,q^4)$*. Indem man die Punkte von* $PG(3,q^4)$ *auf den Ebenen von* $PG(3,q)$ *zählt, sieht man, daß es einen Punkt* P *von* $PG(3,q^4)$ *gibt, der auf keiner Ebenen von* $PG(3,q)$ *liegt. Sei* E *eine Ebene von* $PG(3,q^4)$ *nicht durch* P*. Wir projizieren die Punkte und Geraden von* $PG(3,q)$ *von* P *aus auf* E*: Für ein Punkt* $Q\in PG(3,q)$ *und eine Gerade* g *von* $PG(3,q)$ *sei diese Abbildung* ϕ *wie folgt definiert:*

$$\phi : \begin{cases} Q & \rightarrow & \langle Q,P\rangle \cap E \\ g & \rightarrow & \langle g,P\rangle \cap E. \end{cases}$$

Die Abbildung ϕ *erhält die Inzidenz und ist bijektiv, da* P *in keiner Ebene von* $PG(3,q)$ *liegt. Damit haben wir* $PG(3,q)$ *in einer Ebene von* $PG(3,q^4)$ *eingebettet. Diese Konstruktion ist auch für projektive Räume der Dimension* $d\geq 3$ *möglich.*

Lemma 3.30 *Sei* D *für* $k \geq 2$ *eine Punktmenge von* $PG(k,q)$ *isomorph zu* $PG(k,\sqrt{q})$*, wobei eine Gerade von* $PG(k,q)$ *höchstens eine Gerade der von* D *induzierten Inzidenzstruktur enthält. Dann erzeugt* D *den ganzen Raum* $PG(k,q)$*.*

Beweis: Wir zeigen die Behauptung mit Induktion über k. Sei zuerst $k = 2$. Nach Voraussetzung enthält eine Gerade von $PG(2,q)$ höchstens eine Gerade von D. Also ist D nicht in einer Geraden von $PG(2,q)$ enthalten und erzeugt damit $PG(2,q)$. Sei nun $k \geq 3$ und die Behauptung für $k-1$ gezeigt, das heißt, ein $(k-1)$-dimensionaler Unterraum von $PG(k,\sqrt{q})$ erzeugt auch in $PG(k,q)$ einen Unterraum der Dimension $k-1$ und zwei $(k-2)$-dimensionale Unterräume von $PG(k,\sqrt{q})$ liegen auch in $PG(k,q)$ in zwei verschiedenen $(k-2)$-dimensionalen Unterräumen. Angenommen, $PG(k,\sqrt{q})$ ist in einem $(k-1)$-dimensionalen Unterraum von $PG(k,q)$ enthalten. Ein Punkt von $PG(k,\sqrt{q})$ liegt auf $\frac{(\sqrt{q}^k-1)(\sqrt{q}^{k-1}-1)}{(\sqrt{q}^2-1)(\sqrt{q}-1)} =: s$ verschiedenen $(k-2)$-dimensionalen Unterräumen von $PG(k,\sqrt{q})$. In $PG(k-1,q)$ gibt es aber nur $\theta_{k-2} =: t$ Unterräume der Dimension $k-2$ durch einen Punkt. Da nach Induktionsannahme zwei verschiedene $(k-2)$-dimensionale Unterräume von $PG(k,\sqrt{q})$ auch in $PG(k,q)$ zwei verschiedene $(k-2)$-dimensionale Unterräume erzeugen und $s = \frac{q^{k-1}\sqrt{q}-\sqrt{q}^k-\sqrt{q}^{k-1}+1}{(q-1)(\sqrt{q}-1)} > \frac{q^{k-1}-1}{q-1} = t$ ist, liefert dies einen Widerspruch. □

3.1.4 Beweis von Satz 3.1 im Fall $n \geq 2m$

In $PG(2m,q)$ enthält eine minimale m-blockierende Menge, die den ganzen Raum $PG(2m,q)$ erzeugt, nach Lemma 3.27 mindestens $\theta_m + \theta_{m-1}\sqrt{q}$ Punkte. Aus Lemma 2.30 mit $n' = 2m$ folgt, daß für eine minimale m-blockierende Menge B, die die Bedingung (3.3) erfüllt, die Dimension von $\langle B\rangle$ höchstens $2m$ ist. Wir können also Lemma 3.27 auf $\langle B\rangle$ anwenden und dieses zeigt, daß B die aus den vorherigen Abschnitten bekannte Struktur hat, also ein Baerkegel ist. Dies schließt den Beweis zu Satz 3.1 ab.

Kapitel 4

Untere Schranken für die Mächtigkeit minimaler blockierender Mengen in projektiven Räumen

Eine m-blockierende Menge B eines n'-dimensionalen Unterraums U von $\mathcal{P} := PG(n,q)$ trifft jeden $(n'-m)$-dimensionalen Unterraum von U. Ein $(n-m)$-dimensionaler Unterraum von $\mathcal{P}$ trifft U in einem Unterraum der Dimension größer gleich $n'-m$ und enthält damit auch einen Punkt aus B. Also ist B auch eine m-blockierende Menge von $\mathcal{P}$. Bei der Untersuchung von B kann man sich auf den Unterraum U beschränken. Dies ist für n' kleiner als n eine Vereinfachung.
Sei im folgenden B eine minimale m-blockierende Menge von $\mathcal{P} := PG(n,q)$. Wir wollen einen Zusammenhang zwischen der Kardinalität von B und der Dimension von $\langle B \rangle$ herstellen. Für projektive Räume quadratischer Ordnung sind in Satz 3.1 für $m \leq n' \leq 2m$ die minimalen m-blockierenden Mengen mit der kleinsten Kardinalität angeben, die einen n'-dimensionalen Raum erzeugen. Dieses Resultat wird hier auf projektive Räume beliebiger Ordnung ungleich 2 übertragen:
In Satz 4.1 wird eine neue untere Schranke für die Kardinalität minimaler m-blockierender Mengen, die einen n'-dimensionalen Unterraum für $m \leq n' \leq 2m$ erzeugen, nachgewiesen. Für $n' = m$, $n' = m+1$ und für projektive Räume quadratischer Ordnung ist diese Grenze scharf. Ist die Ordnung keine Quadratzahl und $n' > m+1$, so ist keine blockierende Menge bekannt, die diese Grenze erfüllt.
Dabei ist $r_2(q)$ die Zahl, so daß $q + r_2(q) + 1$ die Mächtigkeit der kleinsten nichttrivialen geradenblockierenden Menge in einer Ebene $PG(2,q)$ ist (vergl. Seite 11).

Satz 4.1 *Sei B eine minimale m-blockierende Menge von $\mathcal{P} := PG(n,q)$, $q > 2$, $n \leq 2m$ mit $\mathcal{P} = \langle B \rangle$. Dann gilt:*

$$|B| \geq \theta_m + \theta_{n-m-1} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n} = \theta_m + r_2(q) \cdot \left(\sum_{i=2m-n}^{m-1} q^i \right). \tag{4.1}$$

Gilt in (4.1) Gleichheit, so folgt

i) Für $n = m$ ist B ein m-dimensionaler Unterraum.

ii) Für $n = m + 1$ ist B ein Kegel mit einer $(m-2)$-dimensionalen Spitze über einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge der Kardinalität $q + r_2(q) + 1$ in einer Ebene disjunkt zur Spitze.

iii) Ist n größer als $m+1$ und q keine Primzahl, dann ist q eine Quadratzahl und B ist ein Baerkegel mit einem $(2m-n-1)$-dimensionalen Unterraum als Spitze und einem $(2(n-m))$-dimensionalen Baerunterraum als Basis.

Bemerkung 4.2 *Die Behauptungen i) beziehungsweise ii) folgen aus Resultat 2.15 beziehungsweise Resultat 2.17. Das Neue an der Aussage von Satz 4.1 besteht darin, daß in Abhängigkeit von der Dimension n des von B erzeugten Raumes auch für $n > m + 1$ eine Untergrenze (4.1) für die Anzahl der in B enthaltenen Punkte angegeben wird. Ist $n \geq m + 2$, die Ordnung q keine Primzahl und gilt in (4.1) Gleichheit, so kann schließlich in Fall iii) die Struktur von B bestimmt werden, was im wesentlichen aus Resultat 4.9 und für $q \neq 4$ aus Satz 3.1 folgt. Für $q = 4$ wird die Aussage in Lemma 4.16 bewiesen.*

Ist Satz 4.1 bewiesen, so folgt aus Lemma 2.30, daß eine minimale m-blockierende Menge B mit höchstens $\theta_m + \theta_{n'-m-1} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n'}$ Punkten auch in projektiven Räumen der Dimension $n \geq n'$ einen Unterraum der Dimension kleiner gleich n' erzeugt. Dies wird in der nächsten Folgerung deutlich.
Außerdem wird die Aussage von Satz 4.1 anders formuliert, indem eine Obergrenze für die Anzahl der B-Punkte gefordert wird und dann Satz 4.1 eine Obergrenze für die Dimension von $\langle B \rangle$ liefert:

Folgerung 4.3 *Sei B eine minimale m-blockierende Menge von $\mathcal{P} := PG(n,q)$, $q > 2$. Angenommen für ein $n' \in I\!N$ mit $m \leq n' \leq 2m$ gilt die Ungleichung*

$$|B| \leq \theta_m + \theta_{n'-m-1} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n'} = \theta_m + r_2(q) \cdot \left(\sum_{i=2m-n'}^{m-1} q^i \right).$$

Dann ist die Dimension von $\langle B \rangle$ höchstens n'. Ist die Dimension von $\langle B \rangle$ gleich n', dann gilt:

i) $|B| = \theta_m + \theta_{n'-m-1} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n'}$.

ii) Für $n' = m$ ist B ein m-dimensionaler Unterraum.

iii) Für $n' = m+1$ ist B ein Kegel mit einer $(m-2)$-dimensionalen Spitze über einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge der Kardinalität $q + r_2(q) + 1$ in einer Ebene disjunkt zur Spitze.

iv) Ist n' größer als $m+1$ und q keine Primzahl, dann ist q eine Quadratzahl und B ist ein Baerkegel mit einem $(2m-n'-1)$-dimensionalen Unterraum als Spitze und einem $(2(n'-m))$-dimensionalen Baerunterraum als Basis.

Das nächste Korollar folgt direkt aus Satz 4.1. Nach Resultat 2.16 ist $r_2(q)$ mindestens $\sqrt{q}$. Wir verwenden dies in der Bedingung (4.1) von Satz 4.1. Im Falle der Gleichheit gilt $r_2(q) = \sqrt{q}$ und die Ordnung q von $\mathcal{P}$ ist quadratisch. Dann können wir den zweiten Teil von Satz 4.1 anwenden:

Korollar 4.4 *Sei B eine minimale m-blockierende Menge von $\mathcal{P} := PG(n,q)$, $q \neq 2$. Es gelte $n' := \dim\langle B\rangle \leq 2m$. Dann ist*

$$|B| \geq \theta_m + \theta_{n'-m-1} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n'} \geq \theta_m + \theta_{n'-m-1} \cdot \sqrt{q} \cdot q^{2m-n'}. \tag{4.2}$$

Gilt in (4.2) Gleichheit, so ist q eine Quadratzahl und die Menge B ist ein Baerkegel mit einem $(2m-n'-1)$-dimensionalen Unterraum als Spitze und einem $(2(n'-m))$-dimensionalen Baerunterraum als Basis.

Im Satz 4.5 konzentrieren wir uns auf minimale m-blockierende Mengen der Mächtigkeit kleiner als $\theta_m + r_2(q) \cdot (q^{m-1} + q^{m-2})$. Nach Satz 4.1 erzeugt solch eine blockierende Menge einen Unterraum dessen Dimension höchstens $m+1$ ist. Darüber hinaus zeigen wir, daß B dann ein m-dimensionaler Unterraum oder ein Kegel mit einer $(m-2)$-dimensionalen Spitze über einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge in einer Ebene disjunkt zur Spitze als Basis ist. Damit wird also die Abschätzung von Resultat 2.17 insofern verbessert, als man durch Satz 4.5 weiß, daß die bezüglich ihrer Punktzahl nächstgrößere minimale m-blockierende Menge mindestens $\theta_m + r_2(q) \cdot (q^{m-1} + q^{m-2})$ Punkte enthält. Für quadratische Ordnung q des projektiven Raumes ist diese Abschätzung nach Satz 3.1 scharf.

Satz 4.5 *Sei B eine minimale m-blockierende Menge in $PG(n,q)$, $m \geq 1$, $q = p^h$, $p > 2$ eine Primzahl, mit*

$$|B| < \theta_m + r_2(q) \cdot (q^{m-1} + q^{m-2})$$

und

$$|B| < \frac{3}{2}(q^m + 1). \tag{4.3}$$

Dann ist B ein m-dimensionaler Unterraum oder ein Kegel mit einer $(m-2)$-dimensionalen Spitze V und einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge B^* der Mächtigkeit $q + r_2(q) + 1$ in einer Ebene disjunkt zur Spitze als Basis.

Für projektive Räume kubischer Ordnung q, wobei q keine Quadratzahl ist, können wir die Abschätzung von Satz 4.5 im Satz 4.6 noch weiter verbessern, da in diesem Fall die Struktur der nichttrivialen geradenblockierenden Menge der Kardinalität $q + r_2(q) + 1 = q + q^{2/3} + 1$ nach Resultat 4.23 bekannt ist.

Satz 4.6 *Sei B eine minimale m-blockierende Menge des projektiven Raums $\mathcal{P} := PG(n, q)$, $m \geq 1$, $q = p^{3h}$, $p \geq 7$ eine Primzahl, q keine Quadratzahl. Angenommen es gilt*

$$|B| \leq \theta_m + q^{2/3}\theta_{m-1}. \tag{4.4}$$

Dann ist B ein m-dimensionaler Unterraum oder ein Kegel mit einer $(m-2)$-dimensionalen Spitze über einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge der Kardinalität $q + q^{2/3} + 1$ in einer Ebene disjunkt zur Spitze.

4.1 Grundlagen

Wir führen in diesem Abschnitt erst die für den Beweis von Satz 4.1 und die folgenden Sätze benötigten Resultate an und beweisen dann Resultat 4.9, da in der Originalarbeit [15] die Ordnung der Untergeometrie nicht bestimmt wurde und daher nicht so deutlich war, daß die Dimension des von B induzierten Unterraums höchstens 4 ist.
Das Resultat 4.7 geht in diesem Abschnitt extrem ein und wird daher im Anhang, Kapitel 4.5, bewiesen, auch damit die Beweise zu dem Satz 4.1 vollständig enthalten sind.

Resultat 4.7 (SZOENYI, [23]) *Sei B eine minimale geradenblockierende Menge mit $|B| < \frac{3(q+1)}{2}$ in der desarguesschen projektiven Ebene $PG(2, q)$ der Ordnung $q = p^h$ mit einer Primzahl p. Dann trifft jede Gerade B in $1 \mod p$ Punkten.*

Lemma 4.8 *Sei B eine nichttriviale geradenblockierende Menge der Mächtigkeit $q + r_2(q) + 1$ in einer desarguesschen projektiven Ebene der Ordnung $q = p^h$, p eine Primzahl, $h > 1$, $q > 2$. Dann enthält jede Gerade $1 \mod p$ Punkte von B.*

Beweis: Da die Mächtigkeit von B gleich $q + r_2(q) + 1$ und B nichttrivial ist, ist die blockierende Menge B nach der Definition von $r_2(q)$ minimal. Aus Resultat 2.18 folgt, daß es eine nichttriviale geradenblockierende Menge der Mächtigkeit $p^h + p^{h-1} + 1$ gibt. Daher ist $r_2(q)$ kleiner gleich p^{h-1} und damit $|B|$ kleiner gleich $p^h + p^{h-1} + 1 < 3(q + 1)/2$. Daher folgt die Behauptung aus Resultat 4.7. $\square$

Resultat 4.9 (HEIM, [15]) *Sei B eine minimale 2-blockierende Menge von $\mathcal{P} := PG(4,q)$, die den ganzen 4-dimensionalen Raum erzeugt, wobei q größer als 2 ist. Dann gilt*

$$|B| \geq \theta_2 + \theta_1 r_2(q)$$

mit Gleichheit, wenn B ein 4-dimensionaler Baerunterraum von $\mathcal{P}$ ist.

Beweis: Sei B also eine minimale 2-blockierende Menge von $PG(4,q)$, die den ganzen 4-dimensionalen Raum erzeugt und die folgende Abschätzung erfüllt:

$$|B| \leq \theta_2 + r_2(q)\theta_1. \tag{4.5}$$

Wir zeigen, daß in (4.5) Gleichheit gelten muß, die Ordnung q quadratisch und B ein Baerunterraum ist.
Sei $\mathbf{\Sigma}$ die Menge der Geraden, die mindestens 2 Punkte von B enthalten und nicht in B liegen. In den folgenden Schritten zeigen wir, daß die Punktmenge B mit Σ als Geradenmenge und der von $\mathcal{P}$ induzierten Inzidenz eine Untergeometrie der Ordnung $r_2(q)$ ist. Dies liefert dann die Behauptung des Satzes:
Da nach der Definition von Σ die Geraden von $(B, \Sigma, \in)$ in den Geraden von $\mathcal{P}$ enthalten sind, muß die Dimension von $(B, \Sigma, \in)$ mindestens 4 sein, damit die Menge B den ganzen Raum $\mathcal{P}$ erzeugt. Daher gilt $\sum_{i=0}^{4} r_2(q)^i \leq |B|$. Wegen (4.5) ist $|B| \leq \theta_2 + \theta_1 r_2(q)$. Damit folgt $r_2(q) \leq \sqrt{q}$. Nach Resultat 2.16 ist $r_2(q)$ mindestens und damit gleich $\sqrt{q}$. Also ist die Zahl q ist quadratisch, die Dimension von $(B, \Sigma, \in)$ gleich 4 und $(B, \Sigma, \in)$ ist ein Baerunterraum.

1) *Die Menge B enthält keine Ebene:*
   Angenommen B enthält eine Ebene E. Da B minimal ist und E jede Ebene von $\mathcal{P}$ trifft, ist dann B gleich E. Dies ist aber ein Widerspruch zu $\langle B \rangle = \mathcal{P}$.

2) *Sei P ein Punkt nicht aus B und π ein Solid nicht durch P, dann enthält die projizierte Punktmenge $B(P,\pi)$ eine 2-blockierende Menge von π.*
   Jede 2-blockierende Menge $B^* \subseteq B(P,\pi)$ von π erzeugt π, das heißt es gilt $\langle B^* \rangle = \pi$:
   Dies folgt aus Lemma 2.12 und Lemma 2.28.

3) *Für jeden Punkt P nicht aus B und jeden Solid π nicht durch P ist $B(P,\pi)$ ein Punktkegel C über einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge der Mächtigkeit $q+r_2(q)+1$ in einer Ebene. Es gilt $|B| = \theta_2+\theta_1 r_2(q)$. Sei T eine Punktmenge aus B, dann gilt $|\{PQ \cap \pi | Q \in T\}| \geq |T| - r_2(q)$:*
   Wegen (4.5) gibt es eine Gerade g durch P, die B nicht trifft. Seien $P_0, \ldots, P_q$ die Punkte von g und $\pi_0, \ldots, \pi_q$ Solids, mit $P_i \notin \pi_i$ für alle i. Nach Schritt 2) und Resultat 2.17 enthält jede Menge $B(P_i, \pi_i)$ mindestens $\theta_2 + qr_2(q)$ Punkte, da die 2-blockierende Menge in $B(P_i,\pi_i)$ den ganzen Solid π_i erzeugt. Für die Anzahl der projizierten Punkte gilt also

$$(q+1) \cdot (\theta_2 + qr_2(q)) \leq \sum_{i=0}^{q} |B(P_i, \pi_i)|. \tag{4.6}$$

Dabei tragen $t+1$ Punkte in einer Ebene durch g höchstens $qt+q+1$ zur rechten Seite von (4.6) bei. Jede Ebene durch g enthält mindestens einen Punkt aus B, da B eine 2-blockierende Menge ist. Dazu werden θ_2 Punkte von B benötigt und es gibt nach (4.5) höchstens noch $\theta_1 r_2(q)$ andere Punkte in B, von denen jeder höchstens q zur rechten Seite von (4.6) beiträgt. Daraus folgt

$$\sum_{i=0}^{q} |B(P_i, \pi_i)| \leq \theta_2(q+1) + (|B| - \theta_2)q \leq \theta_2 \cdot (q+1) + \theta_1 r_2(q) \cdot q. \qquad (4.7)$$

Daher gilt in (4.6) und in (4.7) Gleichheit und damit auch in (4.5) und jede Menge $B(P_i, \pi_i)$ enthält genau $\theta_2 + qr_2(q)$ Punkte, die nach Resultat 2.17 ein Punktkegel über einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge der Mächtigkeit $q+r_2(q)+1$ in einer Ebene sind. Dieser Kegel enthält $\theta_2 + r_2(q) \cdot q = |B| - r_2(q)$ Punkte. Das heißt, die projizierte Menge $B(P, \pi)$ enthält höchstens $r_2(q)$ Punkte weniger als B. Diese Eigenschaft überträgt sich auf jede Untermenge T von B.

4) *Ein s-dimensionaler Unterraum, nicht enthalten in B, trifft B in höchstens $\theta_{s-1}+r_2(q)$ Punkten:*
Sei U ein s-dimensionaler Unterraum, der nicht in B enthalten ist. Es existiert ein Punkt $Q \in U \setminus B$. Sei π ein Solid nicht durch Q. Wir betrachten die Menge $B(Q, \pi)$. Die B-Punkte von U werden auf höchstens θ_{s-1} Punkte von $U \cap \pi$ projiziert, da die Dimension von U gleich s ist. Nach Schritt 3) gilt also mit $T := U \cap B$, daß $|T| \leq \theta_{s-1} + r_2(q)$ ist.

5) *Die Menge B enthält höchstens eine Gerade:*
Wir nehmen an, daß B zwei Geraden g und h enthält. Treffen sich g und h, so enthält die Ebene $\langle g, h \rangle$ mindestens $2q+1$ Punkte aus B. Wegen Schritt 1) ist $\langle g, h \rangle$ nicht in B enthalten und wegen Schritt 4) gibt es höchstens $q + r_2(q) + 1$ Punkte von B in $\langle g, h \rangle$. Dies ist ein Widerspruch zu Korollar 2.19, da $r_2(q)$ kleiner als q ist. Also sind g und h disjunkt. Wegen (4.5) gibt es einen Punkt Q außerhalb $\langle g, h \rangle \cup B$. Nach Schritt 3) ist $B(Q, \langle g, h \rangle)$ ein Punktkegel C. Je zwei Geraden aus C schneiden sich und g und h sind in C enthalten. Also schneiden sich g und h, ein Widerspruch.

6) *Sei P ein B-Punkt, der auf keiner B-Geraden liegt und F eine Tangentialebene durch P. Dann trifft jeder Solid durch F die Menge B in einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge der Mächtigkeit $q + r_2(q) + 1$, die in einer Ebene enthalten ist:*
Sei s ein Solid durch F. Dann blockiert $s \cap B$ jede Ebene von s, enthält also eine 1-blockierende Menge B^* von s. In B^* ist keine Gerade enthalten, da diese F in mindestens einem Punkt treffen müßte. Der Punkt P ist aber der einzige B-Punkt auf F und nach Voraussetzung geht keine B-Gerade durch P. Nach Resultat 2.17 enthält B^* mindestens $q+r_2(q)+1$ Punkte. Dies gilt für alle Solids durch F. Nach Schritt 3) ist $|B| = (q+1) \cdot (q + r_2(q)) + 1$ und damit enthält jeder

Solid genau $q + r_2(q) + 1$ Punkte aus B, die nach Resultat 2.17 in einer Ebene enthalten sind.

7) *Jede Gerade aus* Σ *enthält* $r_2(q) + 1$ *Punkte aus* B*:*
Sei g eine Gerade aus Σ. Sei $s := |g \cap B|$. Nach Definition von Σ ist g nicht in B enthalten und aus Schritt 4) folgt $s \leq r_2(q) + 1$. Wegen Schritt 5) können wir annehmen, daß es einen B-Punkt P von g gibt, der auf keiner B-Geraden liegt. Da B minimal ist, gibt es eine Tangentialebene F durch P. Nach Schritt 6) liegen die B-Punkte von $\langle F, g\rangle$ in einer Ebene E. Die Ebene E geht durch g, da g die Menge B in mindestens zwei Punkte trifft. Wir suchen eine andere Ebene E^+ durch g, die B in $q+r_2(q)+1$ Punkten trifft. Wegen Schritt 5) und Resultat 2.15 gibt es einen Punkt P^+ von B nicht auf E, der in keiner B-Geraden enthalten ist.
Zuerst zeigen wir, daß es eine Tangentialebene F^+ durch P^+ gibt, die g in einem Punkt Q trifft. Da B minimal ist, gibt es eine Tangentialebene F^* durch P^+. Da jede Gerade von E die Menge B trifft und da $F^* \cap B = \{P^+\}$ mit $P^+ \notin E$ ist, enthält $E \cap F^*$ keine Gerade. Somit ist $F^* \cap E$ ein Punkt. Liegt der Punkt $F^* \cap E$ auf g, so können wir $F^+ := F^*$ und $\{Q\} := F^* \cap E$ setzen. Also angenommen, F^* und g sind disjunkt. Sei Q ein Punkt von $g \setminus B$. Nach Schritt 6) bilden die Punkte von $B \cap \langle F^*, Q\rangle$ eine minimale geradenblockierende Menge in einer Ebene E^*.
Geht E^* durch P^+Q, so können wir eine andere Ebene aus $\langle F^*, Q\rangle$ durch P^+Q als F^+ wählen. Dabei folgt aus Schritt 3) mit $T := (E \cap B) \cup \{P^+\}$ und einer Projektion von B von Q aus auf einen Solid π nicht durch Q, daß die Gerade P^+Q die Menge B nur in P^+ trifft, da $|E \cap B| = q + r_2(q) + 1 = |\langle E, Q\rangle \cap \pi| + r_2(q)$ ist (Beachte: Wegen $Q \in E$ gilt $\langle E, Q\rangle = E$).
Geht E^* nicht durch P^+Q, dann liegt Q nicht in E^* und es gibt, da $B \cap E^*$ minimal ist, eine Gerade t von E^* durch P^+ mit $t \cap B = \{P^+\}$. Die Ebene $F^+ := \langle t, Q\rangle$ trifft B im Punkt P^+, da die B-Punkte von $\langle F^*, Q\rangle$ in der Ebene E^* enthalten sind und daher $F^+ \cap B \subseteq F^+ \cap E \cap B = t \cap B = \{P^+\}$ ist. Wie für die Ebene F^* folgt für F^+, daß F^+ die Ebene E nur in einem Punkt, nämlich Q, schneidet.
Nach Schritt 6) ist $\langle F^+, g\rangle \cap B$ in einer Ebene E^+ enthalten. Dabei ist E^+ nach Konstruktion ungleich E, da P^+ in E^+ aber nicht in E enthalten ist und die Gerade g liegt in E^+, da g mindestens zwei Punkte von B enthält. Sei π ein Solid nicht durch Q. Die Ebenen E und E^+ durch g enthalten jeweils $q+r_2(q)+1$ Punkte aus B. Bei der Projektion von B von Q auf π werden diese Punkte auf $2q+1$ Punkte von $(E \cup E^+) \cap \pi$ projiziert. Mit $T := (E \cup E^+) \cap B$ liefert Schritt 3), daß $2(q + r_2(q) + 1) - s - (2q + 1) \leq r_2(q)$. Daraus folgt $r_2(q) + 1 \leq s$ und damit die Behauptung.

8) *Die Menge* B *enthält keine Gerade:*
Angenommen B enthält eine Gerade g. Sei P ein Punkt aus $B \setminus g$. Jede Gerade

von $\langle g, P\rangle$ durch P liegt nach Schritt 5) und nach Definition in Σ. Aus Schritt 7) folgt, daß $|\langle g, P\rangle \cap B| = (q+1)\cdot r_2(q)+1$. Wegen Schritt 1) ist $\langle g, P\rangle$ nicht in B enthalten und damit ist dies ein Widerspruch zu Schritt 4).

9) *Zwei Geraden aus Σ, die sich in $\mathcal{P}$ treffen, schneiden sich in einem Punkt aus B:*
Seien g und h zwei Geraden aus Σ, die sich in einem Punkt Q schneiden. Angenommen $Q \notin B$. Sei π ein Solid nicht durch Q, so enthält nach Schritt 7) die Menge $B(Q,\pi)$ höchstens $|B| - 2r_2(q)$ Punkte. Dies ist ein Widerspruch zu Schritt 3).

10) *Die Punktmenge B mit Σ als Geradenmenge und der von $\mathcal{P}$ induzierten Inzidenz ist ein Unterraum der Ordnung $r_2(q)$:*
Nach der Definition von Σ liegen zwei Punkte von B auf einer eindeutigen Geraden von Σ. Jede Gerade von $(B,\Sigma,\in)$ enthält $r_2(q)+1 \geq 3$ Punkte. Das Axiom von Veblen und Young ist auch erfüllt: Seien l_1, l_2, l_3 und l_4 vier Geraden aus Σ, von denen keine drei durch einen Punkt gehen und sich je zwei außer eventuell l_3 und l_4 schneiden. Dann treffen sich die Geraden l_3 und l_4 in $\mathcal{P}$ und nach Schritt 9) liegt der Schnittpunkt von l_3 und l_4 in B. Damit ist $(B,\Sigma,\in)$ eine Untergeometrie der Ordnung $r_2(q)$.

□

4.2 Beweis von Satz 4.1

Wir beweisen die Aussage Satz 4.1 in mehreren Lemmata. In Lemma 4.11 wird gezeigt, daß für eine minimale m-blockierende Menge B in $\mathcal{P} := PG(n,q)$, $q \neq 2$, mit $\langle B\rangle = \mathcal{P}$ für $|B|$ die untere Grenze (4.1) von Satz 4.1 gilt.
Die Behauptungen i) beziehungsweise ii) von Satz 4.1 folgen aus Resultat 2.15 beziehungsweise Resultat 2.17. Dann wird im Fall, daß in (4.1) Gleichheit gilt, die Aussage iii) von Satz 4.1 für $n = m+2$ in Lemma 4.14, für $n > m+2$ und $q \neq 4$ in Lemma 4.15 und für $n > m+2$ und $q = 4$ in Lemma 4.16 gezeigt.

Definition 4.10 *Wir nennen eine minimale m^*-blockierende Menge B^* in einem projektiven Raum $\mathcal{P}^*$* ***echt****, wenn B^* den ganzen Raum $\mathcal{P}^*$ erzeugt.*

Mit den Voraussetzungen von Satz 4.1 ist B also eine echte m-blockierende Menge von $\mathcal{P}$.

Lemma 4.11 *Sei B eine echte m-blockierende Menge von $\mathcal{P} = PG(n,q)$ mit $n \leq 2m$, $q \neq 2$. Dann gilt*

$$|B| \geq \theta_m + \theta_{n-m-1}\cdot r_2(q)\cdot q^{2m-n}.$$

Beweis: Sei B eine echte m-blockierende Menge von $\mathcal{P} = PG(n,q)$ mit

$$|B| \leq \theta_m + \theta_{n-m-1} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n}. \tag{4.8}$$

Wir wollen zeigen, daß in (4.8) Gleichheit gilt. Wegen $n \leq 2m$ muß m mindestens 1 sein. Der Beweis ist mit Induktion über n. Für $n = m$ liegen alle Punkte von $\mathcal{P}$ in B und für $n = m+1$ folgt die Aussage aus Resultat 2.17. Für $m = 2$ und $n = 4$ folgt die Aussage aus Resultat 4.9. Wir können also

$$m \geq 3 \quad \text{und} \quad n \geq m+2$$

annehmen. Weiter sei die Behauptung für $n-1$ gezeigt, daß heißt eine echte m-blockierende Menge von $PG(n-1,q)$ enthält mindestens $\theta_m + \theta_{n-m-2} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n+1}$ Punkte. Da $|B|$ nach (4.8) kleiner als θ_{m+1} ist, folgt aus Resultat 2.15, daß es einen $(n-m-1)$-dimensionalen Unterraum U gibt, der B nicht trifft. Seien $P_1, P_2, \ldots, P_{\theta_{n-m-1}}$ die Punkte von U und $H_1, H_2, \ldots, H_{\theta_{n-m-1}}$ Hyperebenen, wobei $P_i \notin H_i$ für $i = 1, 2, \ldots, \theta_{n-m-1}$ gilt. Nach Lemma 2.28 enthält jede Menge $B(P_i, H_i)$ eine echte m-blockierende Menge von H_i, die nach Induktionsannahme mindestens $t := \theta_m + \theta_{n-m-2} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n+1}$ Punkte enthält. Damit können wir die Anzahl der Punkte in den Mengen $B(P_i, H_i)$ nach unten abschätzen:

$$\theta_{n-m-1} \cdot t = \theta_{n-m-1} \cdot (\theta_m + \theta_{n-m-2} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n+1}) \leq \sum_{i=1}^{\theta_{n-m-1}} |B(P_i, H_i)|. \tag{4.9}$$

Wir gehen wie im Beweis von Lemma 2.31 vor. Da B eine m-blockierende Menge ist, enthält jeder $(n-m)$-dimensionale Unterraum U_i durch U mindestens einen B-Punkt. Setze $|B \cap U_i| = 1 + x_i$. Die Punkte von $U_i \cap B$ tragen höchstens $\theta_{n-m-1} + x_i \cdot (\theta_{n-m-1} - 1)$ zur rechten Seite der Ungleichung (4.9) bei. Es gibt θ_m verschiedene $(n-m)$-dimensionale Unterräume U_i durch U. Daher gilt

$$|B| = \sum_{i=1}^{\theta_m} |B \cap U_i| = \sum_{i=1}^{\theta_m} (1 + x_i) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\theta_m} x_i = |B| - \theta_m.$$

Aus der oberen Grenze (4.8) für die Anzahl der in B enthaltenen Punkte folgt eine obere Abschätzung für die Anzahl der projizierten Punkte:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\theta_{n-m-1}} |B(P_i, H_i)| &\leq \theta_m \cdot \theta_{n-m-1} + (\sum_{i=1}^{\theta_m} x_i) \cdot (\theta_{n-m-1} - 1) \\ &\leq \theta_m \cdot \theta_{n-m-1} + (\theta_{n-m-1} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n}) \cdot (\theta_{n-m-1} - 1). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Die rechte Seite von (4.10) ist gleich der linken Seite von (4.9) und daher liegt jeder Punkt von $B(P_i, H_i)$ für jedes i in der echten m-blockierenden Menge von H_i enthalten in $B(P_i, H_i)$ und es gilt $|B(P_i, H_i)| = \theta_m + \theta_{n-m-2} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n+1}$. Insbesondere zeigt dies, daß in (4.8) Gleichheit gilt. □

Im folgenden wollen wir den zweiten Teil von Satz 4.1 beweisen. Das heißt wir nehmen an, daß für die betrachtete m-blockierende Menge B in (4.1) Gleichheit gilt, also,

$$|B| = \theta_m + \theta_{n-m-1} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n}.$$

Lemma 4.12 *Sei B eine echte m-blockierende Menge von $\mathcal{P} = PG(n,q)$ mit $n \leq 2m$, $q \neq 2$ und*

$$|B| = \theta_m + \theta_{n-m-1} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n}. \tag{4.11}$$

Sei U ein s-dimensionaler Unterraum, der nicht in B enthalten ist. Dann enthält U höchstens $\theta_{s-1} + r_2(q)q^{2m-n}$ Punkte von B.

Beweis: Da U nicht in B enthalten ist, gibt es einen Punkt Q in $U \setminus B$. Sei H eine Hyperebene, die Q nicht enthält. Wir betrachten die Menge $B(Q,H)$. Da die Dimension von U gleich s ist, werden die B-Punkte von U auf höchstens θ_{s-1} Punkte von $U \cap H$ projiziert. Nach Lemma 2.28 enthält die Menge $B(Q,H)$ eine echte m-blockierende Menge von H. Nach Lemma 4.11 enthält $B(Q,H)$ mindestens $\theta_m + \theta_{n-m-2} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n+1}$ Punkte. Aus der Bedingung (4.11) ergibt sich, daß $|B(Q,H)| \geq |B| - r_2(q)q^{2m-n}$. Das bedeutet, daß die Menge aller projizierter Punkte von B höchstens $r_2(q)q^{2m-n}$ Punkte weniger als B enthält. Diese Eigenschaft gilt auch für jede Teilmenge von B und damit insbesondere für $U \cap B$ und es folgt, daß U höchstens $|U \cap H| + r_2(q)q^{2m-n} = \theta_{s-1} + r_2(q)q^{2m-n}$ Punkte von B enthält. □

Lemma 4.13 *Sei B eine echte m-blockierende Menge von $\mathcal{P} = PG(n,q)$ mit $n \leq 2m$, $q \neq 2$ und*

$$|B| = \theta_m + \theta_{n-m-1} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n}. \tag{4.12}$$

Sei P ein Punkt nicht aus B und H eine Hyperebene nicht durch P. Dann ist $B(P,H)$ eine echte m-blockierende Menge von H mit $|B(P,H)| = \theta_m + \theta_{n-m-2} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n+1}$.

Beweis: Da $|B|$ nach (4.12) kleiner als θ_{m+1} ist, gibt es nach dem Resultat 2.15 einen $(n-m-1)$-dimensionalen Unterraum U, der B nicht trifft. Wie im Beweis zu Lemma 4.11 projizieren wir von jedem Punkt P_i von U aus die Punkte von B auf eine Hyperebene H_i nicht durch P_i. Dann folgt, daß $B(P_i,H_i)$ eine echte m-blockierende Menge von H_i mit $\theta_m + \theta_{n-m-2} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n+1}$ Punkten ist. Dies gilt insbesondere für $B(P,H)$. □

Das folgende Lemma zeigt im Fall $n = m+2$ die Aussage von Satz 4.1. Aus $n = m+2$ und $n \leq 2m$ folgt $2 \leq m$.

Lemma 4.14 *Sei B eine echte m-blockierende Menge von $\mathcal{P} = PG(m+2, q)$ mit $m \geq 2$, q keiner Primzahl und*

$$|B| = \theta_m + \theta_1 \cdot r_2(q) \cdot q^{m-2}. \tag{4.13}$$

Dann ist q eine Quadratzahl und B ist ein Baerkegel mit einem $(m-3)$-dimensionalen Unterraum als Spitze und einem 4-dimensionalen Baerunterraum als Basis.

Beweis: Wir zeigen die Aussage mit Induktion über m. Für $m = 2$ folgt die Aussage aus Resultat 4.9. Wir können also annehmen, daß $m \geq 3$ und die Aussage für $m-1$ bewiesen ist.

1) *Jeder Punkt aus B liegt auf mindestens einem $(m-2)$-dimensionalen Unterraum von B:*
   Sei P ein Punkt aus B. Da B minimal ist, existiert eine Tangentialebene F durch P. Wir zählen inzidente Paare von B-Punkten ungleich P und Hyperebenen durch F. Es gibt θ_{m-1} Hyperebenen durch F und ein B-Punkt außerhalb F liegt in θ_{m-2} dieser Hyperebenen. Nach Lemma 2.24 ist für jede Hyperebene H die Menge $B \cap H$ eine $(m-1)$-blockierende Menge von H.
   Angenommen, jede Hyperebene durch F enthält eine echte $(m-1)$-blockierende Menge und somit nach Lemma 4.11 mindestens $\theta_{m-1} + \theta_1 \cdot r_2(q) \cdot q^{m-3} =: s$ Punkte von B. Dann führt dies mit der Bedingung (4.8) zu folgendem Widerspruch:

$$(|B|-1) \cdot \theta_{m-2} \geq (s-1) \cdot \theta_{m-1}$$
$$(\theta_m - 1 + r_2(q) \cdot (q^{m-1} + q^{m-2}))\theta_{m-2} \geq (\theta_{m-1} - 1 + \theta_1 r_2(q) \cdot q^{m-3})\theta_{m-1}.$$

   Also gibt es eine Hyperebene H durch F so, daß $B \cap H$ eine minimale aber nicht echte $(m-1)$-blockierende Menge B^* von H enthält. Nach Definition von „nicht-echt“ ist B^* in einem m-dimensionalen Unterraum σ von H enthalten. Also ist $B \cap \sigma$ eine $(m-1)$-blockierende Menge von σ. Da $\dim(\sigma) = m$, ist $B \cap \sigma$ eine geradenblockierende Menge von σ. Wegen $F, \sigma \subseteq \pi$ und $F \cap B = \{P\}$ trifft F den Unterraum σ in einer Geraden und diese Gerade geht durch P. Der Punkt P gehört also zu der $(m-1)$-blockierenden Menge, die in $B \cap \sigma$ enthalten ist. Nach Lemma 4.12 enthält die Menge $B \cap \sigma$ höchstens $\theta_{m-1} + r_2(q)q^{m-2}$ Punkte. Aus Resultat 2.17 folgt, daß $B \cap \sigma$ einen $(m-1)$-dimensionalen Unterraum oder einen Kegel mit einer $(m-3)$-dimensionalen Spitze über einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge der Mächtigkeit $q + r_2(q) + 1$ in einer Ebene disjunkt zur Spitze enthält. In beiden Fällen liegt jeder Punkt der $(m-1)$-blockierenden Menge enthalten in $\sigma \cap B$ in einem $(m-2)$-dimensionalen Unterraum von $\sigma \cap B$. Insbesondere gilt dies für P.

2) *Sei P ein Punkt nicht aus B und H eine Hyperebene nicht durch P. Dann ist $B(P, H)$ ein Kegel mit einer $(m-2)$-dimensionalen Spitze V über einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge der Mächtigkeit $q + r_2(q) + 1$ in einer Ebene von H disjunkt zu V:*

Aus Lemma 4.13 folgt, daß $B(P,H)$ eine echte m-blockierende Menge von H mit $|B(P,H)| = \theta_m + q^{m-1}r_2(q)$ ist. Aus Resultat 2.17 folgt die Behauptung.

3) *Seien g und h zwei $(m-2)$-dimensionale Unterräume von B. Dann ist die Dimension von $g \cap h$ mindestens $m-4$:*
Sei H eine Hyperebene durch g und P ein Punkt außerhalb $H \cup B$. Nach Schritt 2) ist $B(P,H)$ ein Kegel C mit einer $(m-2)$-dimensionalen Spitze V über einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge in einer Ebene von H disjunkt zu V. Die Unterräume g und $h \cap H$ sind in C enthalten. Die Dimension von $g \cap V$ ist mindestens $m-3$ und die Dimension von $(h \cap H) \cap V$ ist mindestens $m-4$, da $\dim(h \cap H) \geq m-3$. Daraus folgt

$$\dim(g \cap h) \geq \dim((g \cap V) \cap (h \cap V)) \geq (m-3) + (m-4) - (m-2) = m-5.$$

Also ist die Dimension von $\langle g, h \rangle$ höchstens $m+1$ und wir können annehmen, daß h in H enthalten ist. Dieselbe Argumentation noch einmal angewandt liefert $\dim(g \cap h) \geq m-4$.

4) *Seien g und h zwei $(m-2)$-dimensionale Unterräume von B. Dann ist die Dimension von $g \cap h$ gleich $m-3$:*
Nach Schritt 3) ist die Dimension von $g \cap h$ mindestens $m-4$.
Angenommen $g \cap h$ hat die Dimension $m-4$. Wir betrachten den m-dimensionalen Unterraum $\langle g, h \rangle$. Aus Bedingung (4.8) folgt, daß es einen Punkt R außerhalb $\langle g, h \rangle \cup B$ gibt. Es existiert eine Gerade U durch R, die $\langle g, h \rangle \cup B$ nicht trifft, da es q^{m+1} Geraden durch R disjunkt zu $\langle g, h \rangle$ gibt und wegen Bedingung (4.8). Seien $P_1, P_2, \ldots, P_{q+1}$ die Punkte von U und $H_1, H_2, \ldots, H_{q+1}$ die Hyperebenen durch $\langle g, h \rangle$ aber mit $P_i \notin H_i$ für alle i. Wie im Beweis von Lemma 4.11 betrachten wir die Kegel $B(P_i, H_i)$. Die Spitze V_i von $B(P_i, H_i)$ hat die Dimension $m-2$. Da sich g und h in einem $(m-4)$-dimensionalen Unterraum treffen, ist die Spitze V_i verschieden von g und h. Daher haben $g \cap V_i$ und $h \cap V_i$ die Dimension $m-3$, und es folgt, daß V_i im Erzeugnis von g und h enthalten ist. Die Basis des Kegels $B(P_i, H_i)$ ist eine nichttriviale geradenblockierende Menge der Mächtigkeit $q + r_2(q) + 1$ in einer Ebene E_i von H_i disjunkt zu V_i. Es sind $S_i := g \cap E_i$ und $T_i := h \cap E_i$ zwei Punkte dieser geradenblockierenden Menge. Die Gerade S_iT_i enthält mindestens zwei B-Punkte und, da q keine Primzahl ist, folgt aus Lemma 4.8, daß S_iT_i mindestens noch einen B-Punkt Q_i ungleich S_i und T_i enthält. Also enthält $\langle g, h \rangle \cap B(P_i, H_i)$ mindestens 3 Unterräume der Dimension $m-1$, nämlich $\langle S_i, V_i \rangle$, $\langle T_i, V_i \rangle$ und $\langle Q_i, V_i \rangle$. Damit gilt $|B(P_i, H_i) \cap \langle g, h \rangle| \geq 2q^{m-1} + \theta_{m-1}$. Aus Lemma 4.12 folgt

$$s := |B \cap \langle g, h \rangle| \leq \theta_{m-1} + r_2(q) \cdot q^{m-2}. \tag{4.14}$$

Wir zählen die B-Punkte in den $(m+1)$-dimensionalen Unterräumen $\langle g, h, P_i \rangle$ und verwenden dabei $|B \cap \langle g, h, P_i \rangle| \geq |B(P_i, H_i) \cap \langle g, h \rangle|$, die obere Grenze $\frac{q+1}{2}$ für $r_2(q)$ von Korollar 2.19, die Bedingung (4.8) und (4.14).

$$\begin{aligned} (q+1)\cdot(2q^{m-1}+\theta_{m-1})-qs &\leq |B| \\ (q+1)\cdot 2q^{m-1}+\theta_{m-1}-r_2(q)q^{m-1} &\leq \theta_1\cdot r_2(q)\cdot q^{m-2}+\theta_m \\ q^m+2q^{m-1} &\leq r_2(q)\cdot q^{m-2}\cdot(2q+1) \\ q^2+2q &\leq q^2+\frac{3}{2}q+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch.

5) *Die $(m-2)$-dimensionalen Unterräume von B schneiden sich in einem $(m-3)$-dimensionalen Unterraum V:*
Nach Schritt 4) schneiden sich je zwei $(m-2)$-dimensionale Unterräume von B in einem $(m-3)$-dimensionalen Unterraum. Nach Lemma 2.21 sind alle $(m-2)$-dimensionalen Unterräume aus B in einem $(m-1)$-dimensionalen Unterraum H enthalten oder sie schneiden sich in einem $(m-3)$-dimensionalen Unterraum V. Der erste Fall kann nicht auftreten, da aus Schritt 1) folgt, daß jeder B-Punkt auf einem $(m-2)$-dimensionalen Unterraum von B liegt und damit B in H enthalten sein müßte. Dies ist jedoch wegen $\langle B\rangle = \mathcal{P}$ nicht möglich.

6) *Sei $\overline{V}$ ein 4-dimensionaler Unterraum von $\mathcal{P}$ disjunkt zu V. Die Menge $B\cap\overline{V}$ ist eine echte 2-blockierende Menge von $\overline{V}$:*
Nach Schritt 1) und 5) besteht B aus $(m-2)$-dimensionalen Unterräumen durch V. Da B eine m-blockierende Menge von $PG(m+2,q)$ ist, trifft B jede Ebene von $\mathcal{P}$. Insbesondere trifft $B\cap\overline{V}$ jede Ebene von $\overline{V}$ und ist damit eine 2-blockierende Menge von $\overline{V}$.
Angenommen $B\cap\overline{V}$ ist nicht minimal. Dann gibt es eine minimale 2-blockierende Menge $B^*\subset B$ von $\overline{V}$. Die Menge $B' := \{\langle V,P\rangle | P\in B^*\}$ ist nach Schritt 1) und 5) und wegen $B^*\neq B\cap\overline{V}$ in B echt enthalten. Außerdem ist B' eine m-blockierende Menge von $\mathcal{P}$ und mit der Minimalität von B folgt aus $B'\subseteq B$, daß B gleich B' ist, ein Widerspruch.
Angenommen $B\cap\overline{V}$ ist nicht echt. Dann ist $B\cap\overline{V}$ in einem Solid S von $\overline{V}$ enthalten. Die Menge $B\cap S$ ist eine 2-blockierende Menge von S. Also ist $B' := \{\langle V,P\rangle | P\in S\cap B\}\subseteq B$ eine m-blockierende Menge von $\langle V,S\rangle$ und damit auch von $\mathcal{P}$. Wie oben folgt aus der Minimalität von B, daß B gleich B' ist. Dies ist ein Widerspruch zu $\langle B\rangle=\mathcal{P}$.

7) *Die Zahl q ist quadratisch und B ist ein Kegel mit Spitze V über einem 4-dimensionalen Baerunterraum in $\overline{V}$:*
Nach Schritt 1) und 5) ist die Menge $\{\langle V,P\rangle | P\in\overline{V}\cap B\}$ in B enthalten. Angenommen $B\cap\overline{V}$ enthält mehr als $\theta_2+\theta_1 r_2(q)$ Punkte. Dann gilt

$$|B| > (\theta_2+\theta_1 r_2(q))\cdot q^{m-2}+\theta_{m-3} = \theta_m+\theta_1 r_2(q)\cdot q^{m-2}.$$

Dies ist ein Widerspruch zu der Bedingung (4.8). Also liegen in $B\cap\overline{V}$ höchstens $\theta_2+\theta_1 r_2(q)$ Punkte. Die Menge $B\cap\overline{V}$ ist nach Schritt 6) eine echte 2-blockierende

Menge von $\overline{V}$. Aus Resultat 4.9 folgt, daß q quadratisch und $B \cap \overline{V}$ isomorph zu einem 4-dimensionalen Baerunterraum ist. Also enthält B einen Baerkegel C mit Spitze V und Basis einem 4-dimensionalen Baerunterraum. Da C eine m-blockierende Menge von $\mathcal{P}$ ist, folgt aus der Minimalität von B, daß B gleich C ist.

$\square$

Lemma 4.15 *Sei B eine echte m-blockierende Menge von $\mathcal{P} = PG(n,q)$, q keine Primzahl, mit $m+2 \leq n \leq 2m$, $q \neq 2$ und*

$$|B| = \theta_m + \theta_{n-m-1} \cdot r_2(q) \cdot q^{2m-n}. \tag{4.15}$$

Dann ist q quadratisch und für $q \neq 4$ ist B ein Baerkegel mit einem $(2m-n-1)$-dimensionalen Unterraum als Spitze und einem $(2(n-m))$-dimensionalen Baerunterraum als Basis.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung mit Induktion über n. Für $n = m+2$ folgt die Aussage aus Lemma 4.14. Sei nun $n > m+2$ und die Behauptung für $n-1$ bewiesen. Es gibt einen Punkt $P \notin B$ und eine Hyperebene H nicht durch P. Nach Lemma 4.13 ist $B(P,H)$ eine echte m-blockierende Menge der Mächtigkeit $\theta_m + \theta_{n-m-2} r_2(q) \cdot q^{2m-n+1}$ in $PG(n-1,q)$. Da $n-1$ größer als $m+1$ ist, folgt aus der Induktionsannahme angewandt auf $B(P,H)$, daß q quadratisch ist. Nach Resultat 2.16 ist also $r_2(q) = \sqrt{q}$. Für $q \neq 4$ können wir den Satz 3.1 auf B anwenden und dieser liefert die Behauptung. $\square$

Das letzte Lemma schließt den Beweis zu Satz 4.1 für $q \neq 4$ ab. Für $q = 4$ zeigen wir die Behauptung aus Fall iii) von Satz 4.1 in dem folgenden Lemma:

Lemma 4.16 *Sei B eine echte m-blockierende Menge von $\mathcal{P} = PG(n,q)$, $q = 4$, mit $m+2 \leq n \leq 2m$ und*

$$|B| = \theta_m + \theta_{n-m-1} \cdot \sqrt{q} \cdot q^{2m-n}. \tag{4.16}$$

Dann ist B ein Baerkegel mit einem $(2m-n-1)$-dimensionalen Unterraum als Spitze und einem $(2(n-m))$-dimensionalen Baerunterraum als Basis.

Beweis: Wir verwenden im Beweis weiterhin die Variable q, da man die Aussage auch allgemein für quadratische q so zeigen könnte, anstatt in Lemma 4.15 den Satz 3.1 zu zitieren.
Aus $m+2 \leq 2m$ folgt $2 \leq m$ und für $m = 2$ folgt die Aussage aus Resultat 4.9. Wir können also $m \geq 3$ annehmen. Der Beweis ist mit Induktion über n. Wegen Lemma 4.14 können wir auch annehmen, daß $n \geq m+3$ und die Aussage für $n-1$ gezeigt ist, das heißt eine echte m-blockierende Menge mit $\theta_m + \theta_{n-m-2}\sqrt{q}q^{2m-n+1}$

Punkten in einem $(n-1)$-dimensionalen Raum ist ein $(2m-n, 2(n-m-1))$-Baerkegel. Die Aussage wird in mehreren Schritten gezeigt:

1) *Eine Gerade, die B trifft, enthält 1, $\sqrt{q}+1$ oder $q+1$ Punkte von B:*
Sei g eine Gerade, die mindestens einen B-Punkt enthält. Es gibt θ_{n-2} Ebenen durch g. Wegen $n-2 \geq m+1$ und Bedingung (4.16) enthält mindestens eine dieser Ebenen durch g keinen B-Punkt außerhalb g. Sei $P \notin g$ ein Punkt einer solchen Ebene und H eine Hyperebene durch g aber nicht durch P. Nach Lemma 4.13 ist $B(P, H)$ eine echte m-blockierende Menge von H mit $|B(P, H)| = \theta_m + \theta_{n-m-2}\sqrt{q}q^{2m-n+1}$ und nach Induktionsannahme ist dies ein $(2m-n, 2(n-m-1))$-Baerkegel C. Nach Konstruktion gilt $g \cap B = g \cap B(P, H) = g \cap C$, da die Ebene $\langle g, P \rangle$ keinen B-Punkt außerhalb g enthält. Aus der Struktur von C folgt, daß eine Gerade, die C trifft, 1, $\sqrt{q}+1$ oder $q+1$ Punkte von C enthält. Damit folgt die Behauptung für g.

2) *Eine Ebene E, die eine B-Gerade g und mindestens einen B-Punkt außerhalb von g enthält, enthält mindestens $q\sqrt{q}$ Punkte von B außerhalb g:*
Es gibt θ_{n-3} Solids durch E. Ein Solid durch E, der einen B-Punkt außerhalb E enthält, trifft B nach Schritt 1) in mindestens $(q+2) \cdot (\sqrt{q}-1) + 1 =: s$ Punkten außerhalb von E.
Angenommen jeder Solid durch E enthält mindestens einen B-Punkt außerhalb E. Dann folgt

$$\begin{aligned} |B| &\geq \theta_{n-3} \cdot s + |E \cap B| \\ &\geq \theta_{n-3} \cdot (q\sqrt{q} + 2\sqrt{q} - q - 1) + q + 2. \end{aligned}$$

Dies ist wegen $n-3 \geq m$ ein Widerspruch zu (4.16).
Also gibt es einen Solid S durch E mit $S \cap B \subseteq E$. Wie in Schritt 1) betrachten wir die Menge $B(P, H)$, wobei P ein Punkt von $S \setminus E$ und H eine Hyperebene durch E aber nicht durch P sei. Wegen Lemma 4.13 und der Induktionsannahme ist $B(P, H)$ ein $(2m-n, 2(n-m-1))$-Baerkegel C. Eine Ebene, die eine Gerade von C und einen Punkt von C außerhalb dieser Geraden enthält, enthält entweder $\sqrt{q}+1$ Geraden von C oder liegt ganz in C. Sie enthält also mindestens $(\sqrt{q}+1)q+1$ Punkte von C. Es folgt $|E \cap C| \geq (\sqrt{q}+1)q+1$. Nach Konstruktion gilt $E \cap B = E \cap B(P, H) = E \cap C$ und damit die Behauptung von diesem Schritt.

3) *Für $m+3 \leq n < 2m$ ist B ein $(2m-n-1, 2(n-m)$-Baerkegel:*
Wir zeigen die Behauptung in mehreren Schritten:

   i) *Jeder B-Punkt P liegt auf mindestens einem $(2m-n)$-Raum von B:*
   Nach Voraussetzung liegt P in B, das heißt es gibt einen 0-dimensionalen Unterraum E_0 von B durch P. Wir zeigen mit Induktion über i für $0 \leq i \leq 2m-n$, daß es einen i-dimensionalen Unterraum $E_i \subseteq B$ durch P gibt. Sei also $i \geq 1$ und die Behauptung für $i-1$ bewiesen, das heißt, es gibt einen

$(i-1)$-dimensionalen Unterraum E_{i-1} von B durch P. Zuerst zeigen wir, daß es einen $(n-m+i-1)$-dimensionalen Unterraum $F_{n-m+i-1}$ durch E_{i-1} mit $F_{n-m+i-1} \cap B = E_{i-1}$ gibt:
Wir zeigen zuerst mit Induktion über j für $i-1 \leq j \leq n-m+i-2$, daß es mindestens einen Unterraum F_j durch E_{i-1} mit $F_j \cap B = E_{i-1}$ gibt. Für $j = i-1$ ist die Aussage mit $F_{i-1} := E_{i-1}$ erfüllt. Sei nun $j > i-1$ und die Aussage für $j-1$ gezeigt, daß heißt, wir haben F_{j-1} mit $F_{j-1} \cap B = E_{i-1}$ gefunden. Es gibt θ_{n-j} Unterräume der Dimension j durch F_{j-1}. Enthält einer dieser Räume einen Punkt von B außerhalb E_{i-1}, so folgt mit Schritt 1), daß dieser Raum mindestens $\theta_{i-1}(\sqrt{q}-1)+1 =: s$ Punkte von $B \setminus E_{i-1}$ enthält. Angenommen jeder j-dimensionale Unterraum durch F_{j-1} enthält einen Punkt von $B \setminus E_{i-1}$, dann folgt

$$\begin{aligned} |B| &\geq \theta_{n-j} \cdot s + \theta_{i-1} \\ &\geq \theta_{n-j} \cdot (\theta_{i-1}(\sqrt{q}-1)+1) + \theta_{i-1}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Wegen $j < n-m+i-1$ liefert (4.17) einen Widerspruch zu (4.16), da dann schon $\theta_{n-j} \cdot \theta_{i-1} \geq \theta_{m+1}$ größer als $|B|$ ist.
Wir suchen jetzt also einen $(n-m+i-1)$-dimensionalen Raum $F_{n-m+i-1}$ mit $F_{n-m+i-1} \cap B = E_{i-1}$ durch $F_{n-m+i-2}$. Für $i = 1$ können wir wie oben vorgehen und (4.17) liefert

$$|B| \geq \theta_m \cdot \sqrt{q} + 1.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (4.16). Sei also $i \geq 2$.
In diesem Fall müssen wir die Abschätzung von (4.17) verbessern: Wir zählen die Punkte von $B \setminus E_{i-1}$ in einem $(n-m+i-1)$-dimensionalen Unterraum S durch $F_{n-m+i-2}$, der einen B-Punkt Q nicht aus E_{i-1} enthält. Es gibt $\theta_{i-1}\theta_{i-2}/\theta_1$ Geraden in E_{i-1} und nach Schritt 2) enthält jede Ebene durch Q und eine solche Gerade mindestens $q\sqrt{q}$ Punkte von $B \setminus E_{i-1}$. Ein B-Punkt von $S \setminus E_{i-1}$ ungleich Q liegt in θ_{i-2} dieser Ebenen, wenn er in $\langle E_{i-1}, Q \rangle$ enthalten ist, und sonst in keiner dieser Ebenen. Ein B-Punkt ungleich Q von $S \setminus E_{i-1}$ liegt also in höchstens θ_{i-2} dieser Ebenen und es folgt

$$\begin{aligned} (|(S \setminus E_{i-1}) \cap B| - 1) \cdot \theta_{i-2} &\geq \frac{\theta_{i-1}\theta_{i-2}}{\theta_1} \cdot (q\sqrt{q}-1) \\ \Rightarrow |(S \setminus E_{i-1}) \cap B| &\geq \frac{\theta_{i-1}}{\theta_1}(q\sqrt{q}-1) + 1. \end{aligned}$$

Angenommen, jeder $(n-m+i-1)$-dimensionale Unterraum durch $F_{n-m+i-2}$ enthält einen B-Punkt außerhalb E_{i-1}. Es gibt θ_{m-i+1} dieser Unterräume durch $F_{n-m+i-2}$ und damit folgt:

$$\begin{aligned} |B| &\geq \theta_{m-i+1} \cdot (\frac{\theta_{i-1}}{\theta_1}(q\sqrt{q}-1)+1) + \theta_{i-1} \\ \Rightarrow |B| &\geq \theta_{m-i+1} \cdot (q^{i-2}(q\sqrt{q}-1)+1) + \theta_{i-1}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, daß $\frac{\theta_{i-1}}{\theta_1} = \frac{q^i-1}{q^2-1} \geq q^{i-2}$ wegen $i \geq 2$ gilt. Aus (4.18) folgt mit (4.16)

$$\begin{aligned}
\theta_m + \theta_{n-m-1}\sqrt{q}q^{2m-n} &\geq \theta_{m-i+1} \cdot (q^{i-1}\sqrt{q} - q^{i-2} + 1) + \theta_{i-1} \\
\Rightarrow (q^{m+1} - 1) + q^{2m-n}\sqrt{q}(q^{n-m} - 1) &\geq (q^{m-i+2} - 1)(q^{i-1}\sqrt{q} - q^{i-2} + 1) \\
&\quad +(q^i - 1) \\
\Rightarrow q^{m+1} + q^m\sqrt{q} - q^{2m-n}\sqrt{q} - 1 &\geq q^{m+1}\sqrt{q} - q^m + q^{m+2-i} \\
&\quad +q^i - q^{i-1}\sqrt{q} + q^{i-2} - 2 \\
\Rightarrow q^{m+1} + q^m\sqrt{q} &\geq q^{m+1}\sqrt{q} - q^m \\
\Rightarrow q + \sqrt{q} &\geq q\sqrt{q} - 1.
\end{aligned}$$

Dies ist aber wegen $q = 4$ ein Widerspruch.
Wir haben jetzt also einen Unterraum $F_{n-m+i-1}$ mit $F_{n-m+i-1} \cap B = E_{i-1}$ gefunden und betrachten einen $(n-m+i)$-dimensionalen Unterraum U durch $F_{n-m+i-1}$. Durch wiederholte Anwendung von Lemma 2.24 sieht man, daß die Menge $B \cap U$ eine i-blockierende Menge von U ist. Nach Resultat 2.17 enthält $U \cap B$ entweder mindestens $\theta_i + \sqrt{q}q^{i-1}$ Punkte und damit $q^i + \sqrt{q}q^{i-1}$ Punkte von B außerhalb $F_{n-m+i-1}$ oder $U \cap B$ enthält einen i-dimensionalen Unterraum E_i. Im zweiten Fall ist E_i der gesuchte i-dimensionale Unterraum durch P, da $E_i \cap U$ gleich E_{i-1} sein muß. Wir nehmen also an, daß jeder $(n-m+i)$-dimensionale Unterraum durch $F_{n-m+i-1}$ mindestens $q^i + \sqrt{q}q^{i-1}$ Punkte von $B \setminus F_{n-m+i-1}$ enthält. Es gibt θ_{m-i} dieser Räume und damit folgt

$$|B| \geq \theta_{m-i} \cdot (q^i + \sqrt{q}q^{i-1}) + \theta_{i-1} = \theta_m + \theta_{m-i}\sqrt{q}q^{i-1}.$$

Aus $2m - n \geq i$ folgt $m - i > n - m - 1$ und damit ist die letzte Ungleichung ein Widerspruch zu (4.16).

ii) *Je zwei $(2m-n)$-dimensionale Räume E_1 und E_2 von B schneiden sich in einem $(2m-n-1)$-dimensionalen Raum:*
Angenommen $\langle E_1, E_2\rangle$ ist der ganze Raum. Dann gilt $\dim(E_1 \cap E_2) = 4m - 3n$ und in E_2 liegt ein $(2n-2m-1)$-dimensionaler Raum U disjunkt zu E_1. Für einen Punkt $Q \in U$ liegen nach Schritt 1) auf jeder Geraden, die einen Punkt von E_1 enthält, mindestens $\sqrt{q}+1$ Punkte von B und damit enthält $\langle E_1, Q\rangle$ mindestens $\theta_{2m-n} \cdot (\sqrt{q} - 1) + 1$ Punkte von $B \setminus E_1$. Also gilt

$$|B| \geq (\theta_{2m-n}(\sqrt{q} - 1) + 1)\theta_{2n-2m-1} + \theta_{2m-n} \geq \theta_{n-1}.$$

Dies ist wegen $n - 1 \geq m + 2$ ein Widerspruch zu (4.16).
Also ist $\langle E_1, E_2\rangle$ in einer Hyperebene H enthalten. Wegen (4.16) gibt es einen Punkt P außerhalb H, der nicht in B enthalten ist. Wir projizieren die Punkte von B von P aus auf H. Nach Lemma 4.13 und der Induktionsannahme ist $B(P, H)$ ein $(2m-n, 2(n-m-1))$-Baerkegel C. Die Unterräume E_1 und E_2 sind in C enthalten. Jeder Unterraum E_i trifft die Spitze von

C in einem Unterraum der Dimension größer gleich $2m - n - 1$. Daher gilt $\dim(E_1 \cap E_2) \geq 2m - n - 2$.
Angenommen es gilt $\dim(E_1 \cap E_2) = 2m - n - 2$. Sei g eine Gerade enthalten in E_2 disjunkt zu E_1. Wie oben enthält für jeden Punkt $Q \in g$ der Raum $\langle E_1, Q\rangle$ mindestens $\theta_{2m-n} \cdot (\sqrt{q} - 1) + 1$ Punkte und es folgt

$$|\langle E_1, E_2\rangle \cap B| \geq (\theta_{2m-n}(\sqrt{q} - 1) + 1)\theta_1 + \theta_{2m-n}. \tag{4.19}$$

Nach Lemma 4.12 enthält $\langle E_1, E_2\rangle$ höchstens $\theta_{2m-n+1} + q^{2m-n}\sqrt{q}$ Punkte von B. Aus (4.19) folgt damit

$$\begin{aligned} &\theta_{2m-n+1} + q^{2m-n}\sqrt{q} \geq (\theta_{2m-n}(\sqrt{q} - 1) + 1)\theta_1 + \theta_{2m-n} \\ \Rightarrow\ &q^{2m-n+1} + q^{2m-n}\sqrt{q} \geq (\sqrt{q} - 1) \cdot (q^{2m-n+1} + 2q^{2m-n} + \cdots + 1) + \theta_1. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch.

iii) *Ein Unterraum, der in B liegt, hat höchstens die Dimension $2m - n$:*
Angenommen B enthält einen $(2m - n + 1)$-dimensionalen Unterraum U. Da $2m - n + 1$ kleiner als m und B eine m-blockierende Menge ist, gibt es einen B-Punkt P außerhalb U. Nach Schritt 3i) gibt es einen $(2m - n)$-dimensionalen Unterraum $U' \subseteq B$ durch P. Dieser trifft nach Schritt 3ii) jeden $(2m - n)$-dimensionalen Unterraum von U in einem $(2m - n - 1)$-dimensionalen Unterraum. Aber dies ist nicht möglich (vergleiche Beweis zu Lemma 3.23).

iv) *Die $(2m - n)$-dimensionalen Unterräume von B gehen durch einen gemeinsamen $(2m - n - 1)$-dimensionalen Unterraum V:*
Aus Schritt 3ii) und Lemma 2.21 folgt, daß die $(2m - n)$-dimensionalen Unterräume von B entweder durch einen $(2m - n - 1)$-dimensionalen Unterraum gehen oder in einem $(2m - n + 1)$-dimensionalen Unterraum U enthalten sind. Da nach Schritt 3i) jeder B-Punkt auf mindestens einem $(2m - n)$-Raum liegt, müßte B im zweiten Fall in U enthalten sein. Dies ist wegen $m + 3 \leq n \quad \Rightarrow \quad 2m - n + 1 \leq m - 2$ nicht möglich, da B eine m-blockierende Menge ist.

v) *Die Menge B ist ein $(2m - n - 1, 2(n - m))$-Baerkegel:*
Nach Schritt 3i) liegt jeder B-Punkt in einem $(2m - n)$-dimensionalen Unterraum von B. Diese Unterräume gehen wegen Schritt 3iv) durch einen $(2m-n-1)$-dimensionalen Unterraum V. Sei $\overline{V}$ ein $(2n-2m)$-dimensionaler Unterraum von $\mathcal{P}$ disjunkt zu V. Dann ist B die Vereinigung der Unterräume $\langle V, P\rangle$ für einen Punkt $P \in \overline{V} \cap B$.
Nach Voraussetzung ist B echt. Aus der Struktur von B folgt, daß $B \cap \overline{V}$ eine echte $(n-m)$-blockierende Menge von $\overline{V}$ mit $|B \cap \overline{V}| = \theta_{n-m} + \theta_{n-m-1}\sqrt{q}$ ist. Aus der Induktionsannahme folgt, daß $B \cap \overline{V}$ isomorph zu einem $(2(n-m))$-dimensionalen Baerunterraum ist. Also ist B ein Baerkegel mit Spitze V und Basis einem $(2n - 2m)$-dimensionalen Baerunterraum.

4) *Für $n = 2m$ ist B ein $(2m)$-dimensionaler Baerunterraum:*
   Sei Σ die Menge der Geraden, die $\sqrt{q}+1$ Punkte von B enthalten.

   i) *Die Menge B enthält keine Ebene:*
   Angenommen, eine Ebene E ist in B enthalten. Es gibt einen Punkt $P \notin B \cup E$ und eine Hyperebene H durch E aber nicht durch P. Die Menge $B(P, H)$ ist nach Lemma 4.13 und der Induktionsannahme ein $(0, n-2)$-Baerkegel C. Nach Konstruktion gilt $E \subseteq E \cap B \subseteq B(P, H) = C$. Der Kegel C enthält aber keine Ebene, Widerspruch.

   ii) *Eine Gerade g, die B in mindestens zwei Punkten trifft, enthält genau $\sqrt{q}+1$ Punkte von B, liegt also in Σ:*
   Aus Schritt 1) folgt, daß g entweder $\sqrt{q}+1$ Punkte aus B enthält oder ganz in B liegt.
   Angenommen $g \subseteq B$. Es gibt eine Ebene E durch g, die noch einen Punkt von $B \setminus g$ enthält. Wegen Schritt 4i) ist E nicht in B enthalten und aus Schritt 2) folgt, daß E mindestens $q\sqrt{q}+q+1$ Punkte von B enthält. Dies ist aber ein Widerspruch zu Lemma 4.12 angewandt auf E.

   iii) *Zwei Geraden aus Σ treffen sich in einem Punkt von B:*
   Seien g und h zwei Geraden aus Σ. Sei P der Schnittpunkt von g und h. Angenommen, P liegt nicht in B. Wir projizieren die Punkte von B von P aus auf eine Hyperebene H nicht durch P. Die B-Punkte von g und h werden auf zwei Punkte abgebildet. Also gilt $|B(P, H)| \leq |B| - 2\sqrt{q}$. Dies ist aber ein Widerspruch, da nach Lemma 4.13 und der Induktionsannahme $B(P, H)$ ein $(0, n-2)$-Baerkegel ist, der $|B| - \sqrt{q}$ Punkte enthält.

   iv) *Die Punktmenge B mit Σ als Geradenmenge und der von $\mathcal{P}$ induzierten Inzidenz ist ein Baerunterraum:*
   Nach Schritt 4ii) liegen je zwei Punkte von B auf einer eindeutigen Geraden von Σ. Auch das Axiom von Pasch (oder Veblen und Young) ist erfüllt: Seien l_1, l_2, l_3 und l_4 vier Geraden, von denen keine drei durch einen Punkt gehen und sich je zwei treffen außer eventuell l_3 und l_4, dann treffen sich l_3 und l_4 in $PG(n, q)$ und der Schnittpunkt liegt nach Schritt 4iii) in B.

□

Bemerkung 4.17 *Kennt man eine Abschätzung t für die Kardinalität einer m-blockierenden Menge, die einen n-dimensionalen Raum mit $m+1 < n < 2m$ erzeugt, so könnte man mit der im Beweis von Satz 4.1 verwendeten Technik die Abschätzung aus Satz 4.1 verbessern, indem man diese Abschätzung t in Gleichung (4.9) für t einsetzt.*

4.3 Beweis von Satz 4.5

Für $m = 1$ entspricht Satz 4.5 dem Resultat 2.17. Wir können also $m \geq 2$ annehmen. Das nächste Resultat spielt in den Beweisen dieses und des nächsten Abschnitts eine entscheidende Rolle. Mit seiner Hilfe wird eine Verbindung von der globalen Bedingung, daß B jeden $(n-m)$-dimensionalen Unterraum trifft, zu einzelnen Unterräumen, insbesondere Geraden, hergestellt.

Resultat 4.18 (SZOENYI, WEINER [24]) *Sei B eine minimale m-blockierende Menge von $PG(n,q)$, $q = p^h$, $p > 2$ eine Primzahl. Angenommen $|B| < \frac{3}{2}(q^m + 1)$. Dann schneidet jeder Unterraum, der einen Punkt von B enthält, die Menge B in $1 \mod p$ Punkten.*

Mit Resultat 4.18 werden wir Satz 4.5 in mehreren Lemmata beweisen. Wir nehmen an, daß B eine m-blockierende Menge von $PG(n,q)$ ist, die die Bedingungen (4.3) erfüllt, das heißt mit

$$|B| < \theta_m + r_2(q) \cdot (q^{m-1} + q^{m-2}) \qquad \text{und} \qquad |B| < \frac{3}{2}(q^m + 1).$$

Wir wollen zeigen, daß B ein m-dimensionaler Unterraum oder ein Kegel mit einer $(m-2)$-dimensionalen Spitze V und einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge B^* der Mächtigkeit $q + r_2(q) + 1$ in einer Ebene als Basis ist.

Lemma 4.19 *Die Dimension von $\langle B \rangle$ ist höchstens $m + 1$.*

Beweis: Dies folgt mit Bedingung (4.3) direkt aus Satz 4.1. □

Ist die Dimension von $\langle B \rangle$ höchstens m, dann folgt aus Resultat 2.15, daß B ein m-dimensionaler Unterraum ist, was die Aussage von Satz 4.5 beweist.
Wir nehmen also an, daß B keinen m-dimensionalen Unterraum enthält. Aus Lemma 4.19 folgt, daß die Dimension von $\langle B \rangle$ gleich $m + 1$ sein muß. Um Satz 4.5 zu beweisen, genügt es, den Unterraum $\langle B \rangle$ zu betrachten. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts sei also $\mathcal{P} = \langle B \rangle$, die Dimension n von $\mathcal{P}$ sei $m + 1$ und B sei eine geradenblockierende Menge von $\mathcal{P}$.

Lemma 4.20 *Jeder B-Punkt P liegt in einem $(m-1)$-dimensionalen Unterraum, der in B enthalten ist.*

Beweis: Wir zeigen für $0 \leq i \leq m - 1$ mit Induktion über i, daß P in einem i-dimensionalen Unterraum E_i von B liegt. Der Fall $i = 0$ ist trivial. Sei nun $0 < i \leq m - 1$ und die Aussage für $i - 1$ bewiesen. Zuerst zeigen wir, daß es einen i-dimensionalen Unterraum F_i durch E_{i-1} mit $F_i \cap B = E_{i-1}$ gibt.
Angenommen jeder i-dimensionale Unterraum durch E_{i-1} enthält mindestens einen

B-Punkt Q außerhalb E_{i-1}. Seien $P_1, P_2, \ldots, P_{\theta_{i-1}}$, die Punkte von E_{i-1}. Dann enthält nach Resultat 4.18 jede Gerade QP_j mindestens $p+1$ Punkte von B. Daher enthält jeder i-dimensionale Unterraum durch E_{i-1} mindestens $(p-1)\theta_{i-1}+1$ Punkte von B außerhalb E_{i-1}. Es gibt θ_{n-i} Unterräume der Dimension i durch E_{i-1}. Daraus folgt

$$|B| \geq \theta_{n-i} \cdot ((p-1)\theta_{i-1} + 1) + \theta_{i-1}.$$

Da n gleich $m+1$ und p größer als 2 ist, widerspricht dies der Bedingung (4.3).
Sei nun σ ein $(i+1)$-dimensionaler Unterraum durch F_i. Da B jede Gerade von $\mathcal{P}$ blockiert, ist $B \cap \sigma$ eine i-blockierende Menge von σ.
Angenommen, in keinem $(i+1)$-dimensionaler Unterraum durch F_i liegt ein i-dimensionaler Unterraum von B. Dann enthält nach Resultat 2.17 jeder $(i+1)$-dimensionale Unterraum durch F_i mindestens $\theta_i + r_2(q) \cdot q^{i-1}$ Punkte von B und damit mindestens $q^i + r_2(q) \cdot q^{i-1}$ Punkte von B außerhalb E_{i-1}. Es gibt θ_{m-i} dieser Unterräume der Dimension $i+1$ durch F_i, also

$$\begin{aligned} |B| &\geq \theta_{m-i} \cdot (q^i + q^{i-1} r_2(q)) + \theta_{i-1} \\ &\geq \theta_m + \theta_{m-i} r_2(q) q^{i-1}. \end{aligned}$$

Da i höchstens $m-1$ ist, steht dies im Widerspruch zur Bedingung (4.3).
Also gibt es einen i-dimensionalen Unterraum E_i von B in einem $(i+1)$-dimensionalen Unterraum durch F_i. Dann ist $E_i \cap F_i$ in B enthalten und daher gleich E_{i-1}. Damit liegt P auch in E_i. □

Lemma 4.21 *Je zwei $(m-1)$-dimensionale Unterräume E_1 und E_2 von B schneiden sich in einem $(m-2)$-dimensionalen Unterraum.*

Beweis: Angenommen, die Dimension von $E_1 \cap E_2$ ist höchstens $m-3$. Dann gibt es eine Gerade g von E_1 disjunkt zu E_2. Seien $P_0, \ldots, P_q$ die Punkte von g. Nach Resultat 4.18 trifft die Gerade QP_i für jeden Punkt Q von E_2 die Menge B in mindestens p Punkten außerhalb E_2. Daher enthält $\langle P_i, E_2 \rangle$ mindestens $\theta_{m-1} \cdot (p-1) + 1$ Punkte von B außerhalb E_2. Es folgt

$$|B| \geq (q+1) \cdot (\theta_{m-1} \cdot (p-1) + 1) + \theta_{m-1},$$

im Widerspruch zur Bedingung (4.3). □

Lemma 4.22 *Die Menge B ist ein Kegel mit einer $(m-2)$-dimensionalen Spitze V über einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge der Mächtigkeit $q + r_2(q) + 1$ in einer Ebene disjunkt zu V als Basis.*

Beweis: Nach Lemma 4.20 liegt jeder B-Punkt in einem $(m-1)$-dimensionalen Unterraum von B und nach Lemma 4.21 schneiden sich je zwei $(m-1)$-dimensionale Unterräume von B in einem $(m-2)$-dimensionalen Unterraum. Nach Lemma 2.21 liegen entweder die $(m-1)$-dimensionalen Unterräume von B und damit wegen Lemma 4.20 jeder B-Punkt in einem m-dimensionalen Unterraum U oder alle $(m-1)$-dimensionalen Unterräume von B gehen durch einen $(m-2)$-dimensionalen Unterraum V. Der erste Fall ist nicht möglich, da B eine minimale m-blockierende Menge ist und daher gleich U sein müßte. Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme, daß B kein m-dimensionaler Unterraum ist. Sei $\overline{V}$ eine Ebene disjunkt zu V.
Angenommen $\overline{V} \cap B$ enthält eine Gerade g. Dann liegt nach Lemma 4.20 und da alle $(m-1)$-dimensionalen B-Räume durch V gehen, auch $\langle g, V \rangle$ in B. Dies ist aber ein Widerspruch, da wir angenommen hatten, daß B keinen m-dimensionalen Unterraum enthält.
Also trifft $\overline{V} \cap B$ jede Gerade von $\overline{V}$ und enthält selbst keine Gerade. Angenommen $|\overline{V} \cap B| \geq q + r_2(q) + 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |B| &\geq (q + r_2(q) + 2) \cdot q^{m-1} + \theta_{m-2} \\ &\geq \theta_m + q^{m-1} r_2(q) + q^{m-1}. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung (4.3) folgt

$$q^{m-2} r_2(q) > q^{m-1} \quad \Rightarrow \quad r_2(q) > q,$$

ein Widerspruch zu Korollar 2.19.
Damit folgt $|\overline{V} \cap B| \leq q + r_2(q) + 1$ und aus dem Resultat 2.17 ergibt sich, daß $\overline{V} \cap B$ eine nichttriviale geradenblockierende Menge der Mächtigkeit $q + r_2(q) + 1$ von der Ebene $\overline{V}$. □

4.4 Beweis von Satz 4.6

Wir beweisen Satz 4.6 mit Induktion über m und (für ein festes m) über n. Sei B eine minimale m-blockierende Menge von $\mathcal{P} = PG(n, q)$ mit $q = p^{3h}$, wobei p eine Primzahl größer gleich 7 und q keine Quadratzahl ist. Wir nehmen an, daß $|B|$ die Bedingung (4.4) erfüllt, also

$$|B| \leq \theta_m + q^{2/3} \theta_{m-1}.$$

Wir wollen zeigen, daß B dann ein m-dimensionaler Unterraum oder ein Kegel mit einer $(m-2)$-dimensionalen Spitze über einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge der Mächtigkeit $q + q^{2/3} + 1$ in einer Ebene als Basis ist. Für $n = m$ und für $m = 0$ ist die Behauptung trivial. Für $m = 1$ und $n = 2$ entspricht sie dem Resultat 4.23. Für $m = 1$ und $n \geq 3$ folgt sie aus Resultat 2.17, da $r_2(q)$ nach Resultat 4.23 gleich $q^{2/3}$ ist. Wir können also annehmen, daß

$$m \geq 2 \quad \text{und} \quad n \geq m + 1.$$

Zuerst betrachten wir die Fälle $n = m + 1$ in Abschnitt 4.4.2 und $n = m + 2$ in Abschnitt 4.4.3. Für $n > m + 2$ projizieren wir in Abschnitt 4.4.4 die Punkte von B von einem Punkt $P \notin B$ auf eine Hyperebene π nicht durch P. Mit Lemma 2.12 und der Induktionsannahme finden wir eine Hyperebene π^*, die mindestens θ_m Punkte von B enthält. Nach Lemma 2.26 ist $B \cap \pi^*$ eine m-blockierende Menge von π^*. Wegen der Minimalität von B und Lemma 2.25 ist B gleich $B \cap \pi^*$ und damit folgt dann die Behauptung aus der Induktionsannahme angewandt auf π^*.

4.4.1 Grundlagen

Resultat 4.23 (POLVERINO [20]; POLVERINO, STORME [21]) *In $PG(2, q)$, $q = p^{3h}$, $h \geq 1$ mit einer Primzahl $p \geq 7$ sind die kleinsten nichttrivialen minimalen geradenblockierenden Mengen:*

(a) Eine Baerunterebene $PG(2, \sqrt{q})$ der Mächtigkeit $q + \sqrt{q} + 1$, wenn q quadratisch ist.

(b) Eine minimale blockierende Menge der Mächtigkeit $q + q^{2/3} + 1$.

(c) Eine minimale blockierende Menge der Mächtigkeit $q + q^{2/3} + q^{1/3} + 1$.

Da wir angenommen hatten, daß q nicht quadratisch ist, ist das Beispiel (b) aus Resultat 4.23 die kleinste nichttriviale geradenblockierende Menge in einer Ebene von $\mathcal{P}$. Außerdem gilt $r_2(q) = q^{2/3}$.

Bemerkung 4.24 (STORME, WEINER [22]) Eine spezielle Eigenschaft der minimalen blockierenden Menge der Mächtigkeit $q + q^{2/3} + 1$ ist, daß sie einen eindeutigen Punkt enthält, der auf genau $q^{1/3} + 1$ Geraden liegt, die jeweils $q^{2/3} + 1$ Punkte der blockierenden Menge enthalten. Wir nennen diesen Punkt **Vertex** der minimalen blockierenden Mengen. Die anderen Geraden nicht durch den Vertex treffen diese blockierende Menge in einem oder in $q^{1/3} + 1$ Punkten.

Da im folgenden oft Kegel auftreten, deren Spitze ein k-dimensionaler Unterraum und deren Basis eine nichttriviale geradenblockierende Menge der Mächtigkeit $q + q^{2/3} + 1$ in einer Ebene ist, definieren wir zu Vereinfachung eine Bezeichnung für diese Kegel:

Definition 4.25 *Wir nennen einen Kegel mit einer k-dimensionalen Spitze über einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge der Mächtigkeit $q + q^{2/3} + 1$ in einer Ebene disjunkt zur Spitze einen **k-KEGEL**.*

Ein k-*KEGEL* enthält $\theta_{k+2} + q^{2/3} \cdot q^{k+1}$ Punkte.

Lemma 4.26 *a) Sei $n \geq m+2$ und B' eine m-blockierende Menge von $PG(n-1,q)$, die höchstens $\theta_m + q^{2/3}\theta_{m-1}$ Punkte enthält.*
Dann enthält B' einen m-dimensionalen Unterraum oder einen $(m-2)$-KEGEL.

b) Sei B' eine $(m-1)$-blockierende Menge von $PG(n-1,q)$, die höchstens $\theta_{m-1} + q^{2/3}\theta_{m-2}$ Punkte enthält.
Dann enthält B' einen $(m-1)$-dimensionalen Unterraum oder einen $(m-3)$-KEGEL.

Beweis: Dies ist die Induktionsannahme. □

Die nächsten Lemmata werden wir nur in den Fällen $n = m+1$ und $n = m+2$ verwenden, aber sie werden hier für alle $n > m$ bewiesen. Mit diesen Lemmata reduziert sich der Beweis von Satz 4.6 darauf, zu zeigen, daß jeder B-Punkt in einem $(m-1)$-dimensionalen Unterraum von B liegt.
Im folgenden können wir Resultat 4.18 verwenden, da nach Bedingung (4.4) die Mächtigkeit von B höchstens $\theta_m + \theta_{m-1} \cdot q^{2/3}$ und dies kleiner $\frac{3}{2} \cdot (q^m + 1)$ ist.

Lemma 4.27 *Je zwei $(m-1)$-dimensionale Unterräume E_1 und E_2 von B schneiden sich in einem $(m-2)$-dimensionalen Unterraum.*

Beweis: Angenommen die Dimension von $E_1 \cap E_2$ ist höchstens $m-3$. Wie im Beweis von Lemma 4.21 erhalten wir eine untere Abschätzung für die Anzahl der in B enthaltenen Punkte:

$$|B| \geq (q+1) \cdot (\theta_{m-1} \cdot (p-1) + 1) + \theta_{m-1},$$

Dies ist ein Widerspruch zu der oberen Grenze (4.4) für die Mächtigkeit von B. □

Lemma 4.28 *Angenommen, jeder B-Punkt liegt auf einem $(m-1)$-dimensionalen Unterraum von B. Dann ist B ein m-dimensionaler Unterraum oder ein $(m-2)$-KEGEL.*

Beweis: Nach Lemma 4.27 schneiden sich je zwei $(m-1)$-dimensionale Unterräume von B in einem $(m-2)$-dimensionalen Unterraum. Wir gehen wie im Beweis von Lemma 4.22 vor und verwenden die obere Grenze (4.4) anstatt (4.3) für die Anzahl der B-Punkte. □

Lemma 4.29 *Sei P ein B-Punkt. Es gibt einen $(m-2)$-dimensionalen Unterraum U von B durch P.*

Beweis: Da B minimal ist, gibt es einen $(n-m)$-dimensionalen Tangentialraum F durch P. Wir betrachten eine Hyperebene π durch F. Die Menge $B \cap \pi$ ist

nach Lemma 2.24 eine $(m-1)$-blockierende Menge von π. Daher enthält die Menge $B \cap \pi$ nach Lemma 4.26 b) einen $(m-1)$-dimensionalen Unterraum, einen $(m-3)$-*KEGEL* oder sie enthält mehr als $\theta_{m-1} + q^{2/3}\theta_{m-2}$ Punkte. Der Punkt P gehört zu der $(m-1)$-blockierenden Menge, die in $B \cap \pi$ enthalten ist, da P der einzige B-Punkt auf $F \subseteq \pi$ ist. Im ersten Fall haben wir einen $(m-1)$-dimensionalen Unterraum von B durch P gefunden und im zweiten Fall, wenn $B \cap \pi$ einen $(m-3)$-*KEGEL* enthält, dann gibt es mindestens einen $(m-2)$-dimensionalen Unterraum von B durch P.
Angenommen alle Hyperebenen durch F enthalten mehr als $\theta_{m-1} + q^{2/3}\theta_{m-2} + 1$ Punkte von B, also abgesehen von dem Punkt $P = B \cap F$ noch mindestens $\theta_{m-1} + q^{2/3}\theta_{m-2}$ Punkte von B außerhalb F. Wir zählen inzidente Paare von B-Punkten außerhalb F und Hyperebenen durch F. Ein Punkt außerhalb F liegt in θ_{m-2} Hyperebenen durch F und es gibt insgesamt θ_{m-1} Hyperebenen durch F. Daraus und mit der Bedingung (4.4) folgt

$$\begin{aligned} & (|B|-1) \cdot \theta_{m-2} \geq \theta_{m-1} \cdot (\theta_{m-1} + q^{2/3}\theta_{m-2}) \\ \Rightarrow \quad & (q \cdot \theta_{m-1} + \theta_{m-1} q^{2/3}) \cdot \theta_{m-2} \geq \theta_{m-1} \cdot \theta_{m-1} + \theta_{m-1} q^{2/3}\theta_{m-2}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch und es muß eine Hyperebene durch F geben, die höchstens $\theta_m + \theta_{m-1}q^{2/3}$ Punkte von B und damit einen $(m-2)$-dimensionalen Unterraum von B durch P enthält. □

4.4.2 Beweis von Satz 4.6 im Fall $n = m + 1$

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall $n = m + 1$, das heißt B trifft jede Gerade von $\mathcal{P}$. Wir nehmen an, daß B kein m-dimensionaler Unterraum ist und wollen zeigen, daß B dann ein $(m-2)$-*KEGEL* ist.

Lemma 4.30 *Jeder B-Punkt liegt auf einer Cogeraden, die in B enthalten ist.*

Beweis: Sei P ein B-Punkt. Angenommen P ist in keiner Cogeraden von B enthalten. Wir führen diese Annahme in mehreren Schritten zum Widerspruch.

1) *Es gibt einen $(m-2)$-dimensionalen Unterraum U von B durch P:*
Dies steht in Lemma 4.29.

2) *Es gibt einen $(m-1)$-dimensionalen Unterraum σ, der B nur in U trifft:*
Angenommen, jeder $(m-1)$-dimensionale Unterraum durch U enthält einen B-Punkt Q außerhalb von U. Dann folgt aus Resultat 4.18, daß jede Gerade QR mit $R \in U$ mindestens p Punkte von B außerhalb U enthält. Daher gibt es in jedem $(m-1)$-dimensionalen Unterraum durch U mindestens $(p-1)\theta_{m-2} + 1$ Punkte von B außerhalb von U. Da es θ_2 verschiedene $(m-1)$-dimensionale

Unterräume durch U gibt, folgt

$$|B| \geq \theta_2 \cdot ((p-1)\theta_{m-2} + 1) + \theta_{m-2}.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (4.4).

3) *Jede Hyperebene durch σ enthält einen $(m-3)$-KEGEL aus B:*
Sei π eine Hyperebene durch σ. Da $B \cap \pi$ nach Lemma 2.24 eine $(m-1)$-blockierende Menge von π ist, enthält $B \cap \pi$ nach Lemma 4.26 b) einen $(m-3)$-*KEGEL*, einen $(m-1)$-dimensionalen Unterraum V oder mehr als $\theta_{m-1} + q^{2/3}\theta_{m-2}$ Punkte. Im ersten Fall ist die Behauptung für diesen Beweisschritt gezeigt. Der zweite Fall kann nicht auftreten, da wegen $V \cap \sigma = U$ der Raum V ein $(m-1)$-dimensionaler Unterraum von B durch P im Widerspruch zu der Annahme am Anfang des Beweises wäre.
Auch der dritte Fall ist nicht möglich. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, daß π mehr als $\theta_{m-1} + q^{2/3}\theta_{m-2}$ Punkte von B enthält. Dann gilt $|B \setminus \pi| < q^m + q^{m-1}q^{2/3}$. Daher gibt es mindestens eine Hyperebene π' durch σ, die weniger als $q^{m-1} + q^{m-2}q^{2/3}$ Punkte von B außerhalb σ, also weniger als $\theta_{m-1} + q^{m-2}q^{2/3}$ Punkte von$B$ enthält. Dann enthält $\pi' \cap B$ nach Lemma 4.26 b) einen $(m-1)$-dimensionalen Unterraum und dieser $(m-1)$-dimensionale Unterraum schneidet σ in U. Dies ist ein Widerspruch wie oben.

4) *Es gibt höchstens $\theta_{m-3} \cdot q^{2/3}$ Punkte von B außerhalb der $(m-3)$-KEGEL von B, die nach Schritt 2) in den Hyperebenen durch σ enthalten sind:*
Jeder $(m-3)$-*KEGEL* enthält $\theta_{m-1} + q^{2/3}q^{m-2}$ Punkte und je zwei der $(m-3)$-*KEGEL* von B in den Hyperebenen durch σ schneiden sich in den θ_{m-2} Punkten von $\sigma \cap B = U$. Die $(m-3)$-*KEGEL* aus B in den Hyperebenen durch σ überdecken mindestens

$$(q+1) \cdot (q + q^{2/3}) \cdot q^{m-2} + \theta_{m-2} = \theta_m + (q^{m-1} + q^{m-2}) \cdot q^{2/3}$$

Punkte. Jetzt folgt die Aussage aus der oberen Grenze (4.4) für $|B|$.

5) *Jede Hyperebene durch σ trifft B in einem $(m-3)$-KEGEL.*
Sei Σ die Menge der Coebenen, die in B enthalten sind und U in einem $(m-3)$-dimensionalen Unterraum schneiden. Dann enthält Σ genau $(q+1)(q+q^{2/3})$ Coebenen:
Sei π eine Hyperebene durch σ. Nach Schritt 3) enthält $\pi \cap B$ einen $(m-3)$-*KEGEL* C. Die Punkte von C erzeugen die ganze Hyperebene π. Angenommen es gibt einen B-Punkt R in $\langle C \rangle \setminus C$. Jede Gerade von $\langle C \rangle$ trifft C in $1 \mod p$ Punkten. (Eine Gerade, die die Spitze von C trifft enthält entweder einen oder $q+1$ Punkte von C, da die Spitze von C ein Unterraum ist. Eine Gerade g von $\langle C \rangle$, die die Spitze von C nicht trifft, ist in einer Ebene E von $\langle C \rangle$ enthalten, die die Spitze von C nicht trifft. Der Schnitt $E \cap C$ enthält eine nichttriviale geradenblockierende Menge der Mächtigkeit $q + q^{2/3} + 1$. Jede Gerade von E

trifft $E \cap C$ in 1, $q^{1/3}+1$ oder $q^{2/3}+1$ Punkten (vergleiche Bemerkung 4.24). Dies gilt insbesondere für g). Nach Resultat 4.18 enthält jede Gerade durch R, die C trifft, noch mindestens p Punkte von B außerhalb C. Der Kegel C trifft jede Gerade von $\langle C \rangle$ und daher trifft jede Gerade von $\langle C \rangle$ durch R den Kegel C und enthält mindestens p Punkte von $B \setminus C$. Da es θ_{m-1} Geraden in $\langle C \rangle$ durch R gibt, enthält der Unterraum $\langle C \rangle \subseteq \pi$ mindestens $\theta_{m-1} \cdot (p-1)+1$ Punkte von B außerhalb C. Dies ist ein Widerspruch zu Schritt 4). Damit ist die erste Behauptung gezeigt.
Eine Coebene von Σ trifft σ in einem $(m-3)$-dimensionalen Unterraum von U und erzeugt zusammen mit σ eine Hyperebene, die B in einem $(m-3)$-*KEGEL* trifft. Also sind alle Coebenen von Σ in den $(m-3)$-*KEGEL*n von B in den Hyperebenen durch σ enthalten. Da die Basis von einem $(m-3)$-*KEGEL* $q+q^{2/3}+1$ Punkte enthält, liegen $q+q^{2/3}+1$ Coebenen in einem $(m-3)$-*KEGEL*. Eine dieser Coebenen ist U. Also liegen in einer Hyperebene durch σ genau $q+q^{2/3}$ Coebenen von Σ. Es gibt $q+1$ Hyperebenen durch σ. Daher sind $(q+1)(q+q^{2/3})$ Coebenen in Σ enthalten.

6) *Eine Cogerade durch U enthält 0, $q^{1/3}$ oder $q^{2/3}$ Coebenen von Σ. Wir nennen diese Cogeraden durch U* ***kleine, mittlere*** *beziehungsweise* ***große Cogeraden****:*
Die Cogerade σ enthält keine Coebene von Σ und ist daher eine kleine Cogerade. Sei nun F eine Cogerade ungleich σ durch U. Dann ist $\langle \sigma, F \rangle \cap B$ nach Schritt 5) ein $(m-3)$-*KEGEL* C. Die Coebene U gehört zu C und die Spitze V von C ist in U enthalten. Sei E eine Ebene von $\langle \sigma, F \rangle$ disjunkt zu V. Dann ist $E \cap C$ eine nichttriviale geradenblockierende Menge der Mächtigkeit $q+q^{2/3}+1$ von E und der Punkt $E \cap U$ gehört zu dieser geradenblockierenden Menge. Die Cogerade F schneidet E in einer Geraden durch $E \cap U$ und diese Gerade trifft die geradenblockierende Menge $E \cap C$ in 0, $q^{1/3}$ oder $q^{2/3}$ Punkten ungleich $E \cap U$ (vergleiche Bemerkung 4.24). Jeder Punkt von $((E \cap C) \setminus U) \cap F$ erzeugt zusammen mit V eine Coebene von C, die in F enthalten ist. Dies sind die Coebenen von Σ aus F.

7) *Eine Hyperebene durch eine kleine Cogerade σ' trifft B in einem $(m-3)$-KEGEL und enthält $q+q^{2/3}$ Coebenen von Σ:*
Ist σ' gleich σ, dann folgt die erste Behauptung aus Schritt 5). Ist σ' ungleich σ, dann folgt aus Schritt 5), daß die Hyperebene $\langle \sigma, \sigma' \rangle$ die Menge B in einem $(m-3)$-*KEGEL* trifft. Da σ' keine Coebene von Σ enthält, ist $\sigma' \cap B$ gleich U. Sei π eine Hyperebene durch σ'. Wir können für σ' die gleichen Argumente anwenden wie für σ, da σ eine beliebige kleine Cogerade mit $\sigma \cap B = U$ war. Dann folgt aus Schritt 5), daß $\pi \cap B$ ein $(m-3)$-*KEGEL* C ist. Der Kegel C enthält $q+q^{2/3}+1$ Coebenen und U ist eine davon. Die Spitze von C ist in U enthalten, da die Dimension von U gleich $m-2$ ist. Daher gehören die Coebenen ungleich U von C zu Σ.

8) *Es gibt eine mittlere Cogerade durch U:*
Angenommen, es gibt keine mittlere Cogerade durch U. Dann ist nach Schritt 6) jede Cogerade durch U entweder groß oder klein. Jede Coebene von Σ liegt in einer eindeutigen großen Cogerade. Nach Schritt 5) gibt es $(q+1)(q+q^{2/3})$ Coebenen in Σ. Insgesamt existieren also

$$\frac{(q+1)(q+q^{2/3})}{q^{2/3}} = (q+1)(q^{1/3}+1) =: s$$

große Cogeraden. Sei h eine große Cogerade. Wir betrachten die Hyperebenen durch h. Enthält eine Hyperebene π durch h eine kleine Cogerade, dann folgt aus Schritt 7), daß $\pi \cap B$ genau $q+q^{2/3}$ Coebenen von Σ enthält. In diesem Fall gibt es $q^{1/3}+1$ große Cogeraden in π. Enthält π keine kleine Cogerade, dann sind alle $q+1$ Cogeraden von π durch U groß. Sei c die Anzahl der Hyperebenen durch h, die eine kleine Cogerade enthalten, und sei d die Anzahl der Hyperebenen, die keine kleine Cogerade enthalten. Dann gilt $c+d = q+1$ und $cq^{1/3}+dq+1 = s$. Daraus folgt $d = \frac{q^{2/3}}{q^{2/3}-1}$. Dies ist nicht möglich, da $q^{2/3}$ eine ungerade $q^{2/3}-1$ aber eine gerade Zahl ist.

9) *Der Widerspruch:*
Nach Schritt 8) existiert eine mittlere Cogerade h. Enthält eine Hyperebene π^* durch h eine kleine Cogerade, dann folgt mit Schritt 7), daß $\pi^* \cap B$ genau $q+q^{2/3}$ Coebenen von Σ enthält.
Angenommen jede Hyperebene durch h enthält eine kleine Cogerade. Dann gilt $|\Sigma| = (q+1)\cdot(q+q^{2/3}-q^{1/3})+q^{1/3}$, ein Widerspruch zu Schritt 5). Daher gibt es mindestens eine Hyperebene π, die keine kleine Cogerade enthält. Die Hyperebene π enthält $q+1$ Cogeraden, die mittlere oder große Cogeraden sind. Daher enthält $\pi \cap B$ mindestens $q^{1/3}q$ Coebenen von Σ, die nicht in h liegen.
Angenommen eine andere Hyperebene π' durch h enthält auch keine kleine Cogerade. Genau wie für π folgt, daß in π' mindestens $q^{1/3}q$ Coebenen von Σ nicht enthalten in h liegen. Dann gibt es in Σ mindestens

$$2q^{1/3}q + (q-1)\cdot(q+q^{2/3}-q^{1/3})+q^{1/3}$$

Coebenen im Widerspruch zu Schritt 5).
Also gibt es genau eine Hyperebene π durch h, die keine kleine Cogerade enthält. Im folgenden wird nur noch diese Hyperebene π betrachtet. In π gibt es

$$|\Sigma| - q(q+q^{2/3}-q^{1/3}) = q^{1/3}q+q+q^{2/3} =: s$$

Coebenen von Σ. Sei c die Anzahl der mittleren Cogeraden und d die Anzahl der großen Cogerade von π. Da π keine kleine Cogerade enthält, gilt $c+d = q+1$. In jeder mittleren Cogerade liegen $q^{1/3}$ Coebenen von Σ und jede große Cogerade enthält $q^{2/3}$ Coebenen von Σ. Also gilt $cq^{1/3}+dq^{2/3} = s$. Daraus folgt $d = \frac{q^{2/3}+q^{1/3}-1}{q^{1/3}-1}$, aber das ist ein Widerspruch, da $q^{2/3}+q^{1/3}-1$ eine ungerade $q^{1/3}-1$ aber eine gerade Zahl ist.

□

Lemma 4.27 und Lemma 4.28 schließen den Beweis zum Satz 4.6 für den Fall $n = m+1$ ab.

4.4.3 Beweis von Satz 4.6 im Fall $n = m + 2$

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall $n = m+2$, das heißt, jede Ebene von $\mathcal{P}$ enthält mindestens einen Punkt von B. Angenommen B ist kein m-dimensionaler Unterraum. Wir wollen in mehreren Lemmata zeigen, daß B ein $(m-2)$-*KEGEL* ist. Zuerst zeigen wir dies mit einer ähnlichen Technik wie im vorherigen Abschnitt. Der Beweis von dem abschließenden Lemma 4.35 kann aber durch die Verwendung von Satz 4.1 verkürzt werden, was im Anschluß an den Beweis von Lemma 4.35 aufgeführt ist.

Lemma 4.31 *Sei P ein Punkt, der nicht in B liegt, und π eine Hyperebene nicht durch P. Die Projektion $B(P,\pi)$ enthält einen m-dimensionalen Unterraum oder einen $(m-2)$-KEGEL.*

Beweis: Nach Lemma 2.12 ist $B(P,\pi)$ eine m-blockierende Menge von π, trifft also wegen $n-1 = m+1$ jede Gerade von π. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 4.26 a). □

Lemma 4.32 *Enthält für einen Punkt $P \notin B$ und eine Hyperebene π nicht durch P die Menge $B(P,\pi)$ einen m-dimensionalen Unterraum U, dann ist B ein $(m-2)$-KEGEL.*

Beweis: Sei π' die Hyperebene $\langle P, U\rangle$. Dann enthält π' mindestens θ_m Punkte von B. Nach Lemma 2.26 ist $\pi' \cap B$ eine m-blockierende Menge von π'. Da B minimal und entsprechend der Annahme am Anfang des Beweises B kein m-dimensionaler Unterraum ist, folgt die Behauptung aus Lemma 4.26 a). □

Gibt es einen Punkt $P \notin B$ und eine Hyperebene π nicht durch P, so daß $B(P,\pi)$ einen m-dimensionalen Unterraum enthält, dann schließt Lemma 4.32 den Beweis zum Satz 4.6 ab. Wir setzen also von jetzt an voraus, daß es keinen Punkt $P \notin B$ und keine Hyperebene π mit $P \notin \pi$ gibt, so daß $B(P,\pi)$ einen m-dimensionalen Unterraum enthält.

Lemma 4.33 *Sei T eine Menge von B-Punkten. Angenommen es gilt $|B| = \theta_m + (q^{m-1}+q^{m-2}) \cdot q^{2/3}$. Projizieren wir die B-Punkte von einem Punkt $P \notin B$ auf eine Hyperebene π nicht durch P, dann werden die Punkte von T auf mindestens $|T| - q^{m-2} \cdot q^{2/3}$ Punkte abgebildet.*

Beweis: Nach Lemma 4.31 enthält die Menge $B(P,\pi)$ einen m-dimensionalen Unterraum oder einen $(m-2)$-*KEGEL* C. Wegen der obigen Annahme kann der erste Fall nicht auftreten. Der Kegel C besteht aus $\theta_m + q^{m-1}q^{2/3}$ Punkten. Aus $|B| = \theta_m + (q^{m-1}+q^{m-2})q^{2/3}$ folgt $|B(P,\pi)| \geq |C| = |B| - q^{m-2}\cdot q^{2/3}$. Daher gilt die Behauptung für $T = B$. Aber dann muß die Behauptung auch für jede Untermenge von B gelten. □

Lemma 4.34 *Sei g eine Gerade disjunkt zu B und seien $P_0, P_1, \ldots, P_q$ die Punkte von g. Seien π_i Hyperebenen nicht durch P_i für $i = 0, 1, \ldots, q$. Nach Lemma 4.31 und der obigen Annahme enthält jede Menge $B(P_i,\pi_i)$ einen $(m-2)$-KEGEL C_i. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{q+1} |B(P_i,\pi_i) \setminus C_i| \leq q \cdot \theta_{m-3} q^{2/3}.$$

Das heißt, höchstens $q \cdot \theta_{m-3}q^{2/3}$ Punkte werden nicht auf die Kegel C_i projiziert. Gilt $|B| \leq \theta_m + (q^{m-1} + q^{m-2})q^{2/3}$, dann ist für jeden Punkt $P \notin B$ und jede Hyperebene π nicht durch P die Menge $B(P,\pi)$ ein $(m-2)$-KEGEL.

Beweis: Wir zählen die Punkte, die für die $(m-2)$-*KEGEL* C_i benötigt werden, und die projizierten Punkte in $\sum_{i=1}^{q+1} |B(P_i,\pi_i)|$.

$$\sum_{i=1}^{q+1} |C_i| = (q+1)\cdot(\theta_m + q^{m-1}q^{2/3}) \tag{4.20}$$

Da B jede Ebene trifft, enthält jede Ebene durch g mindestens einen B-Punkt außerhalb g. Jeder andere B-Punkt in solch einer Ebene trägt höchstens noch q zu $\sum_{i=1}^{q+1} |B(P_i,\pi_i)|$ bei. Es gibt θ_m Ebenen durch g. Zusammen mit der oberen Grenze (4.4) für die Anzahl der B-Punkte ergibt sich daraus

$$\sum_{i=1}^{q+1} |B(P_i,\pi_i)| \leq (q+1)\cdot\theta_m + q\cdot\theta_{m-1}q^{2/3}. \tag{4.21}$$

Daraus folgt mit (4.20), und da der Kegel C_i für alle i in $B(P_i,\pi_i)$ enthalten ist, die erste Behauptung.
Durch jeden Punkt $P \notin B$ gibt es eine Gerade g, die B nicht trifft, da P auf θ_{m+1} Geraden liegt und $|B|$ nach Bedingung (4.4) kleiner als θ_{m+1} ist. Gilt $|B| \leq \theta_m + (q^{m-1} + q^{m-2})q^{2/3}$, dann verbessert sich die Abschätzung (4.21) zu

$$\sum_{i=1}^{q+1} |B(P_i,\pi_i)| \leq (q+1)\cdot\theta_m + q\cdot(q^{m-1} + q^{m-2})q^{2/3} \leq \sum_{i=1}^{q+1} |C_i|.$$

Also gehören alle Punkte von $B(P_i,\pi_i)$ zu dem $(m-2)$-*KEGEL* C_i. Insbesondere gilt dies für $B(P,\pi)$. □

Lemma 4.35 *Jeder B-Punkt liegt auf einem $(m-1)$-dimensionalen Unterraum von B.*

Beweis: Sei P ein B-Punkt. Angenommen es gibt keinen $(m-1)$-dimensionalen Unterraum von B durch P.

1) *Es gibt einen $(m-2)$-dimensionalen Unterraum U von B durch P:*
Dies folgt aus Lemma 4.29.

2) *Es gibt eine Cogerade σ mit $\sigma \cap B = U$:*
Angenommen jede Cogerade durch U enthält noch mindestens einen Punkt Q von B außerhalb U. Nach Resultat 4.18 liegen auf jeder Geraden QR mit einem Punkt R aus U mindestens p Punkte von B außerhalb U. Daher enthält jede Cogerade durch U mindestens $(p-1)\theta_{m-2}+1$ Punkte von $B \setminus U$. Wir zählen inzidente Paare von B-Punkten außerhalb U und Cogeraden durch U. Ein Punkt außerhalb von U liegt in θ_2 dieser Cogeraden durch U und es gibt $(\theta_2\theta_3)/(q+1)$ Cogeraden durch U. Daraus folgt
$$\begin{aligned}(|B|-\theta_{m-2})\cdot\theta_2 &\geq \frac{\theta_2\theta_3}{q+1}\cdot((p-1)\theta_{m-2}+1)\\ &\Rightarrow |B| \geq (q^2+1)\cdot((p-1)\theta_{m-2}+1)+\theta_{m-2},\end{aligned}$$
im Widerspruch zur Bedingung (4.4).

3) *Jede Hyperebene durch σ enthält einen $(m-3)$-KEGEL von B:*
Dies folgt mit derselben Argumentation wie in Schritt 3) des Beweises von Lemma 4.30.

4) *Es gibt höchstens $\theta_{m-3}\cdot q^{2/3}$ Punkte von B außerhalb der $(m-3)$-KEGEL in den Hyperebenen durch σ:*
Dies folgt wie in Schritt 4) des Beweises von Lemma 4.30.

5) *Jede Hyperebene durch σ trifft B in einem $(m-3)$-KEGEL:*
Sei π eine Hyperebene durch σ. Nach Schritt 3) enthält $\pi \cap B$ einen $(m-3)$-*KEGEL* C. Angenommen, es gibt einen Punkt R von B in $\pi \setminus C$.
Liegt R in $\langle C\rangle$, dann folgt wie in Schritt 5) des Beweises von Lemma 4.30, daß der Unterraum $\langle C\rangle \subseteq \pi$ mindestens $\theta_{m-1}\cdot(p-1)+1$ Punkte von B außerhalb C enthält. Dies ist aber ein Widerspruch zu Schritt 4).
Also liegt R in $\pi \setminus \langle C\rangle$. Es gibt $|C| = \theta_{m-1}+q^{m-2}q^{2/3}$ Geraden durch R, die C in einem Punkt treffen und jede dieser Geraden enthält nach Resultat 4.18 mindestens p Punkte von B außerhalb C. Daher liegen mindestens $(\theta_{m-1}+q^{m-2}q^{2/3})\cdot(p-1)+1$ Punkte in $(\pi \cap B)\setminus C$ im Widerspruch zu Schritt 4).

6) *Sei F eine Coebene durch U. Die Menge $B \cap F$ enthält 1, $q^{1/3}+1$ oder $q^{2/3}+1$ Unterräume der Dimension $m-2$. Wir nennen diese Coebenen durch U* ***kleine, mittlere*** *beziehungsweise* ***große Coebenen****:*

Liegt F in σ, dann ist F eine kleine Coebene, da $\sigma \cap B = U$.
Sei nun F nicht in σ enthalten. Dann ist $\langle \sigma, F \rangle \cap B$ nach Schritt 5) ein $(m-3)$-*KEGEL* C. Der Unterraum U gehört zu C und die Spitze V von C liegt in U. Sei E eine Ebene von $\langle C \rangle$ disjunkt zu V. Dann ist $E \cap C$ eine nichttriviale geradenblockierende Menge der Mächtigkeit $q + q^{2/3} + 1$ von E und der Punkt $E \cap U$ gehört zu dieser Menge. Der Unterraum F schneidet E in einem Punkt oder einer Geraden durch $E \cap U$.
Ist $E \cap F$ ein Punkt, dann ist $F \cap B = U$ und F ist eine kleine Coebene.
Ist $E \cap F$ eine Gerade l, dann trifft l die geradenblockierende Menge $E \cap C$ in 1, $q^{1/3} + 1$ oder $q^{2/3} + 1$ Punkten (vergleiche Bemerkung 4.24). Jeder Punkt von $l \cap C$ erzeugt zusammen mit V einen $(m-2)$-dimensionalen Unterraum von C, der in F liegt, und dies sind alle $(m-2)$-dimensionalen Unterräume von C und damit von B in F.

7) *Die Menge B enthält $\theta_m + (q^{m-1} + q^{m-2}) \cdot q^{2/3}$ Punkte. Ist Q ein Punkt außerhalb B und π eine Hyperebene nicht durch Q, dann ist $B(Q, \pi)$ ein $(m-2)$-KEGEL:*
Nach Schritt 5) trifft jede Hyperebene durch σ die Menge B in einem $(m-3)$-*KEGEL*. Diese Kegel schneiden sich in U und jeder Kegel enthält $q^{m-1} + q^{2/3} \cdot q^{m-2}$ Punkte von $B \setminus U$. Daher gilt

$$|B| = (q+1) \cdot (q^{m-1} + q^{2/3} \cdot q^{m-2}) + \theta_{m-2}.$$

Die zweite Behauptung folgt aus Lemma 4.34.

8) *Eine Hyperebene durch U, die eine Cogerade σ' mit $\sigma' \cap B = U$ enthält, trifft B in einem $(m-3)$-KEGEL:*
Wir können auf σ' die gleiche Argumentation wie für σ anwenden, da σ eine beliebige Cogerade mit $\sigma \cap B = U$ durch U war. Dann folgt die Behauptung aus Schritt 5).

9) *Es gibt eine mittlere Coebene durch U*
Angenommen, alle Coebenen durch U sind klein oder groß. Sei h eine große Coebene durch U.

   i) *Es gibt $(q+1) \cdot (q^{1/3} + 1) = q^{4/3} + q + q^{1/3} + 1 =: s$ große Coebenen durch U:*
   Sei π eine Hyperebene durch σ. Nach Schritt 5) ist die Menge $\pi \cap B$ ein $(m-3)$-*KEGEL*, der U enthält. Dieser $(m-3)$-*KEGEL* enthält $q + q^{2/3}$ Unterräume der Dimension $m-2$, die U in einem $(m-3)$-dimensionalen Unterraum treffen. Diese $q + q^{2/3}$ Unterräume der Dimension $m-2$ sind in $q^{1/3} + 1$ großen Coebenen enthalten, da in einer große Coebene $q^{2/3}$ Unterräume der Dimension $m-2$ von B ungleich U liegen. Es gibt also $(q+1)(q^{1/3}+1) = s$ große Coebenen in den Hyperebenen durch σ.

   ii) *Eine Cogerade σ^*, die mindestens zwei große Coebenen h', h^* und eine kleine Coebene F durch U enthält, enthält $q^{1/3} + 1$ große Coebenen:*

Da s kleiner als θ_2 ist und jeder B-Punkt nicht enthalten in U zusammen mit U eine große Coebene erzeugt, gibt es eine Cogerade σ' durch F, die keinen B-Punkt außerhalb U enthält. Nach Schritt 8) trifft die Hyperebene $\langle \sigma', \sigma^* \rangle$ die Menge B in einem $(m-3)$-*KEGEL* C. Die Spitze V von C ist in U enthalten. Sei E eine Ebene von $\langle C \rangle$ disjunkt zu V. Dann schneiden h' und h^* die Ebene E in zwei verschiedenen Geraden durch $E \cap U$. Daher liegt C in $\langle h', h^* \rangle$. Wie in Schritt 9i) folgt, daß $q^{1/3}+1$ große Coebenen in dem Kegel C enthalten sind.

iii) *Es gibt eine Hyperebene π' durch h die $q+q^{1/3}+1$ große Coebenen enthält:* Nach Schritt 8) trifft eine Hyperebene, die eine Cogerade σ' mit $\sigma' \cap B = U$ enthält, die Menge B in einem $(m-3)$-*KEGEL* und wie in Schritt 9i) liegen $q^{1/3}+1$ große Coebenen in dieser Hyperebene. Also enthält jede Hyperebene durch h mindestens $q^{1/3}+1$ große Coebenen. Da s größer als $(q+1) \cdot q^{1/3}+1$ ist, gibt es eine Hyperebene π' durch h die keine solche Cogerade, die B nur in U trifft, enthält. Da s kleiner als θ_2 ist, enthält die Hyperebene π' eine kleine Coebene F. Da in π' keine Cogerade liegt, die B nur in U trifft, enthält jede Cogerade von π' durch U einen B-Punkt außerhalb von U und damit nach Schritt 6) eine große Coebene. Insbesondere gilt dies für die Cogeraden durch F. Daher enthält jede Cogerade von π' durch F mindestens eine große Coebene und π' enthält mindestens $q+1$ große Coebenen.
Angenommen eine andere Hyperebene π^* durch h enthält mehr als $q^{1/3}+1$ große Coebenen. Die selbe Argumentation wie für π' zeigt, daß π^* dann mindestens $q+1$ große Coebenen enthält. Jede Hyperebene durch h enthält mindestens $q^{1/3}+1$ große Coebenen. Also gibt es mindestens $(q-1) \cdot q^{1/3} + 2q+1$ große Coebenen. Aber das ist ein Widerspruch, da $(q-1) \cdot q^{1/3}+2q+1$ größer als s ist.
Also trifft jede Hyperebene ungleich π' durch h die Menge B in genau $q^{1/3}+1$ großen Coebenen und π' enthält $s - q \cdot q^{1/3} = q + q^{1/3} + 1$ große Coebenen.

iv) *In π' gibt es $q^{2/3}+1$ Cogeraden durch h, die $q^{1/3}+1$ große Coebenen enthalten. Die anderen Cogeraden von π' durch h enthalten keine große Coebene ungleich h:*
Nach Schritt 9ii) enthält jede Cogerade, in der mindestens zwei große Coebenen und eine kleine Coebene liegen, genau $q^{1/3}+1$ große Coebenen. Wenn jede Cogerade von π' durch h eine kleine Coebene enthält, haben wir die Behauptung für diesen Schritt gezeigt.
Wir nehmen also an, daß es in π' eine Cogerade σ'' durch h gibt, die keine kleine Coebene enthält. Dann gibt es $q+1$ große Coebenen in σ'' und es gilt $|\sigma'' \cap B| = (q+1) \cdot q^{2/3} \cdot q^{m-2} + \theta_{m-2}$. In B liegt kein m-dimensionaler Unterraum und deshalb gibt es einen Punkt Q in $\sigma'' \setminus B$. Sei π eine Hyperebene nicht durch Q. Projizieren wir B von Q auf π, dann werden die Punkte von $T := \sigma'' \cap B$ auf höchstens θ_{m-1} Punkte abgebildet, da die Dimension von

σ'' gleich $n-2=m$ ist. Aber dies ist ein Widerspruch zu Lemma 4.33 , da $|T|=(q+1)\cdot q^{2/3}\cdot q^{m-2}+\theta_{m-2}$.

v) *Eine Gerade g von π' disjunkt zu U trifft B in höchstens $q^{1/3}+1$ Punkten:* Nach der Annahme von Schritt 9) und Schritt 6) ist jede Coebene durch U groß oder klein und jeder B-Punkt von g erzeugt zusammen mit U eine große Coebene. Sei h' eine Coebene, die von einem B-Punkt von g und U erzeugt wird. Die Gerade g liegt in der Cogeraden $\langle U,g\rangle$ durch h'. Wir können die gleiche Argumentation, die wir für die Coebene h verwandt hatten, auf die Coebene h' anwenden, weil h als große Coebene beliebig gewählt war. Nach Schritt 9iv) enthält eine Cogerade von π' durch h höchstens $q^{1/3}+1$ große Coebenen. Dies gilt auch für die Cogerade $\langle U,g\rangle$.

vi) *Der Widerspruch:*
Sei Σ die Menge der $(m-2)$-dimensionalen Unterräumen von $\pi'\cap B$. Aus Schritt 9iv) folgt, daß in Σ genau $((q^{2/3}+1)q^{1/3}+1)q^{2/3}+1=:S$ Unterräume der Dimension $m-2$ liegen. Wegen der Bedingung (4.4) gibt es einen Punkt P' außerhalb $\pi'\cup B$. Nach Schritt 7) ist die Menge $B(P',\pi')$ ein $(m-2)$-*KEGEL* C.
Angenommen die Spitze V von C ist ungleich U. Jeder Unterraum von Σ ungleich V ist in C enthalten und erzeugt zusammen mit V einen eindeutigen $(m-1)$-dimensionalen Unterraum von C.
Wir zeigen, daß ein $(m-1)$-dimensionaler Unterraum E von C nicht durch U höchstens $q^{1/3}+1$ Unterräume von Σ enthält: Für $m=2$ ist dies Schritt 9v). Für $m\geq 3$ sei g eine Gerade von E disjunkt zu U. Aus der Dimensionsformel folgt, daß g existiert, jeder Unterraum von Σ, der in E liegt, die Gerade g trifft und g in keinem Unterraum von Σ enthalten ist, da g disjunkt zu U ist und alle Unterräume von Σ den Raum U in einem $(m-3)$-dimensionalen Unterraum treffen. Aus Schritt 9v) folgt, daß g höchstens $q^{1/3}+1$ Punkte von B und damit E höchstens $q^{1/3}+1$ Unterräume von Σ enthält.
Die Spitze V trifft U in einem $(m-3)$-dimensionalen Unterraum, da U in C liegt. Die Coebene $\langle U,V\rangle$ ist klein oder groß. Daher enthält $\langle U,V\rangle\cap B$ höchstens $q^{2/3}+1$ Unterräume der Dimension $m-2$ und mindestens $S-(q^{2/3}+1)=q^{2/3}q+q$ Unterräume von Σ sind nicht in $\langle U,V\rangle$ enthalten. Ein Unterraum von Σ ungleich V erzeugt zusammen mit V einen $(m-1)$-dimensionalen Unterraum von C und wie oben gezeigt enthält jeder der $(m-1)$-dimensionalen Unterräume von C ungleich $\langle U,V\rangle$ höchstens $q^{1/3}+1$ Unterräume von Σ. Dies liefert eine untere Schranke für die Anzahl k der $(m-1)$-dimensionalen Unterräume von C.

$$k\geq\frac{q^{2/3}q+q}{q^{1/3}+1}+1.$$

Dies ist ein Widerspruch, da $q+q^{2/3}+1$ solcher Unterräume in C enthalten sind, das heißt k kleiner gleich $q+q^{2/3}+1$ sein muß.

Daher muß U die Spitze von C sein. Sei $\overline{U}$ eine Ebene von π', die U nicht trifft. Die großen Coebenen sind in den $(m-1)$-dimensionalen Unterräumen von C enthalten und treffen $\overline{U}$ in Punkten, die in einer nichttrivialen geradenblockierenden Menge $\overline{U}^*$ von $\overline{U}$ der Mächtigkeit $q+q^{2/3}+1$ enthalten sind. Es gibt $q+q^{1/3}+1$ große Coebenen in π' und eine Cogerade von π' durch h enthält 1 oder $q^{1/3}+1$ große Coebenen nach Schritt 9iv). Also enthält jede Gerade von $\overline{U}$ durch $h \cap \overline{U}$ einen oder $q^{1/3}+1$ Schnittpunkte mit großen Coebenen und $h \cap \overline{U}$ ist nicht der Vertex von $\overline{U}^*$ (vergleiche Bemerkung 4.24). Die $q^{2/3}-q^{1/3}$ Punkte von $\overline{U}^*$, die nicht in einer großen Coebene enthalten sind, liegen auf der Geraden durch den Vertex von $\overline{U}^*$ und $h \cap \overline{U}$. Sei h' eine große Coebene ungleich h, die $\overline{U}$ in einem Punkt nicht auf der Geraden durch $h \cap \overline{U}$ und dem Vertex von $\overline{U}^*$ trifft. Wegen der Eigenschaften von $\overline{U}^*$ (vergleiche Bemerkung 4.24) und da es $q+q^{1/3}+1$ große Coebene in π' gibt, gibt es eine Gerade g' von $\overline{U}$ durch $h' \cap \overline{U}$, die mindestens $q^{2/3}$ und höchstens $q^{2/3}+1$ große Coebenen trifft. Daher enthält die Cogerade $\langle U, g' \rangle$ mindestens $q^{2/3}$ große Coebenen und mindestens eine kleine Coebene. Dies ist ein Widerspruch zu Schritt 9ii).

10) *Es gibt eine mittlere Coebene h und eine Cogerade σ^+ durch h, die B nur in Punkten von h trifft:*
Nach Schritt 9) gibt es eine mittlere Coebene h. Eine Cogerade durch h, die einen B-Punkt R von B außerhalb h enthält, trifft nach Resultat 4.18 auf jeder Geraden RQ mit einem Punkt Q aus $h \cap B$ die Menge B in mindestens p Punkten außerhalb h. Da $|h \cap B|$ gleich $q^{1/3}q^{m-2} + \theta_{m-2}$ ist, enthält diese Cogerade mindestens $(p-1)(q^{1/3}q^{m-2} + \theta_{m-2}) + 1$ Punkte von B außerhalb h.
Angenommen jede Cogerade durch h enthält einen B-Punkt außerhalb h, dann gilt

$$|B| \geq \theta_2 \cdot ((p-1)(q^{1/3}q^{m-2} + \theta_{m-2}) + 1) + |h \cap B|.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (4.4).

11) *Es gibt mindestens zwei $(m-3)$-KEGEL C_1 und C_2 von B, die sich in $h \cap B$ schneiden:*
Nach Schritt 5) ist die Menge $\langle \sigma, \sigma^+ \rangle \cap B$ ein $(m-3)$-*KEGEL* C_1.
Sei π^{**} eine Hyperebene durch σ^+ ungleich $\langle \sigma, \sigma^+ \rangle$ und sei F eine Coebene von σ^+, die B in U trifft. Enthält π^{**} eine Cogerade σ^{**} durch F mit $\sigma^{**} \cap B = U$, dann ist nach Schritt 8) die Menge $\pi^{**} \cap B$ ein $(m-3)$-*KEGEL* C_2, der $h \cap B$ enthält und wir haben die Behauptung für diesen Schritt gezeigt.
Angenommen, keine Hyperebene ungleich $\langle \sigma, \sigma^+ \rangle$ durch σ^+ enthält einen $(m-3)$-*KEGEL* von B. Da π^{**} keinen $(m-3)$-*KEGEL* von B enthält, liegt in jeder Cogeraden von π^{**} durch F ungleich σ^+ ein B-Punkt außerhalb U, da andernfalls Schritt 8) zu einem Widerspruch führen würde. Nach Schritt 6) enthält diese Cogerade mindestens eine mittlere oder große Coebene und daher mindestens

$q^{1/3} \cdot q^{m-2}$ Punkten von B außerhalb σ^+. In π^{**} gibt es q Cogeraden ungleich σ^+ durch F, daher gilt

$$|(\pi^{**} \setminus \sigma^+) \cap B| \geq q \cdot (q^{1/3} \cdot q^{m-2}) =: t.$$

Wir zählen die B-Punkte in den Hyperebenen durch σ^+.

$$\begin{aligned} q \cdot t + |\langle \sigma, \sigma^+ \rangle \cap B| &\leq |B| \\ q^2 \cdot (q^{1/3} \cdot q^{m-2}) + \theta_{m-1} + q^{m-2} q^{2/3} &\leq |B|. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (4.4).

12) *Der Widerspruch*
Nach 11) gibt es mindestens zwei $(m-3)$-*KEGEL* C_1 und C_2 von B, die sich in $h \cap B$ schneiden. Sei Q ein Punkt von $h \setminus B$ und π eine Hyperebene nicht durch Q. Wir betrachten $B(Q, \pi)$. Die B-Punkte der Kegel C_1 und C_2 werden auf die Punkte zweier Coebenen durch einen $(n-4)$-dimensionalen Unterraum abgebildet. Diese Coebenen enthalten $q^{m-1} + \theta_{m-1}$ und die $(m-3)$-*KEGEL* C_1 und C_2 enthalten

$$2(q^{2/3} \cdot q^{m-2} + \theta_{m-1}) - (q^{1/3} \cdot q^{m-2} + \theta_{m-2}) = q^{m-1} + \theta_{m-1} + (2q^{2/3} - q^{1/3})q^{m-2}$$

Punkte. Aus Lemma 4.33 mit $T := C_1 \cup C_2$ folgt,

$$(2q^{2/3} - q^{1/3})q^{m-2} \leq q^{m-2} \cdot q^{2/3},$$

ein Widerspruch.

□

Wie am Anfang des Abschnitts beschrieben, kann der Beweis von Lemma 4.35 durch die Verwendung von Satz 4.1 verkürzt werden. Dann müßte man die folgenden Schritte nach Schritt 5) einfügen:

6) *Die Menge B enthält $\theta_m + (q^{m-1} + q^{m-2}) \cdot q^{2/3}$ Punkte:*
Der Beweis zu diesem Schritt entspricht dem von Schritt 7) aus dem Beweis zum Lemma 4.35.

7) *Der Widerspruch:*
Nach Schritt 6) ist die Mächtigkeit von $|B|$ gleich $\theta_m + (q^{m-1} + q^{m-2}) \cdot q^{2/3}$. Da q keine Quadratzahl ist, folgt aus Satz 4.1, daß die Dimension von $\langle B \rangle$ höchstens $m+1$ ist. Daher können wir die selbe Argumentation wie in dem Abschnitt 4.4.2 auf $\langle B \rangle$ anwenden. Aus Lemma 4.30 folgt, daß es einen $(m-1)$-dimensionalen Unterraum von B durch P gibt, ein Widerspruch.

Lemma 4.27 und Lemma 4.28 schließen den Beweis zu Satz 4.6 für den Fall $n = m + 2$ ab.

4.4.4 Beweis von Satz 4.6 im Fall $n > m + 2$

Lemma 4.36 *Die Menge B ist ein m-dimensionaler Unterraum oder ein $(m-2)$-KEGEL.*

Beweis: Sei P ein Punkt außerhalb B und π eine Hyperebene nicht durch P. Da $B(P, \pi)$ nach Lemma 2.12 eine m-blockierende Menge von π ist, folgt aus Lemma 4.26 a), daß die Menge $B(P, \pi)$ einen m-dimensionalen Unterraum U oder einen $(m-2)$-*KEGEL* C enthält. Da n größer als $m + 2$ ist, gibt es eine Hyperebene π' durch P, die U beziehungsweise C enthält. Daher enthält π' mindestens θ_m Punkte von B. Nach Lemma 2.26 ist $\pi' \cap B$ eine m-blockierende Menge von π'. Jetzt folgt die Behauptung aus Lemma 4.26 a) und der Minimalität von B. □

4.5 Anhang: Beweis von Resultat 4.7

Dieser Abschnitt orientiert sich stark an [23] von T. Szőnyi.
Der Beweis verwendet algebraische Methoden und gilt daher nur für desarguessche projektive Ebenen. Sei also B eine minimale geradenblockierende Menge von $\mathcal{P}$ mit $|B| < 3(q+1)/2$. Für $q \in \{2, 3\}$ gibt es keine nichttriviale geradenblockierende Menge mit weniger als $3(q+1)/2$ Punkten und für $q = 4$ ist nach Resultat 2.16 eine Baerunterebene die einzige nichttriviale geradenblockierende Menge mit höchstens 7 Punkten. In dieser trifft jede Gerade B in $1 \mod \sqrt{q}$ Punkten und Resultat 4.7 ist erfüllt. Sei k eine Zahl, so daß $|B| = q + k + 1$. Wir können also annehmen, daß

$$|B| < \frac{3(q+1)}{2}, \qquad k < \frac{q+1}{2} \qquad \text{und} \qquad 5 \le q. \tag{4.22}$$

Lemma 4.37 (BLOKHUIS, BROUWER, [5]) Durch einen Punkt von B gibt es mindestens $q - k$ Tangenten.

Beweis: Angenommen, durch den Punkt P aus B gibt es weniger als $q - k$ Tangenten. Da B minimal ist, gibt es eine Tangente t durch P. Wir wählen diese als unendlich ferne Gerade und betrachten die affine Ebene $\mathcal{P} \setminus t$. In dieser werden alle Geraden außer den Tangenten durch P durch Punkte von $B \setminus t$ blockiert. Wenn wir zu $B \setminus t$ auf jeder Tangente durch P ungleich t einen Punkt hinzufügen, ist die resultierende Menge also eine blockierende Menge der affinen Ebene $\mathcal{P} \setminus t$. Da es weniger als $q - k$ Tangenten durch P gibt, enthält diese Menge weniger als $|B| + (q - k - 1) = 2q - 1$ Punkte. Dies ist ein Widerspruch zu einem Resultat von Jamison [18] und Brouwer, Schrijver [13], nach dem eine blockierende Menge in einer affinen Ebene mindestens $2q - 1$ Punkte enthält. □

Aus Lemma 4.37 und Bedingung (4.22) folgt, daß jeder B-Punkt auf mindestens zwei Tangenten liegt. Sei l_∞ eine dieser Tangenten. Wir betrachten die affine Ebene $\mathcal{A} := \mathcal{P} \setminus l_\infty$ und können die Punkte von $\mathcal{A}$ mit inhomogenen Koordinaten (x, y),

x, y aus $GF(q)$, bezeichnen. Die Geraden einer Parallelenschar von $\mathcal{A}$ treffen l_∞ in einem Punkt. Sei (∞) der Schnittpunkt der vertikalen Geraden von $\mathcal{A}$ mit l_∞. Wir können annehmen, daß l_∞ die Menge B in (∞) trifft und daß auch die Gerade, die in $\mathcal{A}$ die Gleichung $x = 0$ erfüllt, eine Tangente ist. Dies schränkt nur die Möglichkeiten ein, die Koordinaten von $\mathcal{A}$ festzulegen. Nicht vertikale Geraden von $\mathcal{A}$ kann man in der Form $y = mx+b$ mit $m, b \in GF(q)$ darstellen. Den Schnittpunkt der Geraden von $\mathcal{A}$ mit Steigung m mit l_∞ bezeichnen wir mit (m). Die Punkte von $U := B \cap \mathcal{A}$ haben eindeutige inhomogene Koordinaten (a_i, b_i), $i = 1, .., q+k$. Durch diese Koordinaten wird nun das Rédei-Polynom H in zwei Variablen X und Y definiert, das im folgenden untersucht wird. Sei also

$$H(X,Y) := \prod_{i=1}^{q+k}(X + a_iY - b_i). \tag{4.23}$$

Ein Faktor $X + a_iY - b_i$ von H ist genau dann gleich Null, wenn der Punkt (a_i, b_i) auf der Geraden mit Achsenabschnitt X und Steigung Y liegt. Das heißt, wenn man in H für X den Achsenabschnitt und für Y die Steigung einer Geraden $l = \{(x,y) \in \mathcal{A} | y = Yx + X\}$, einsetzt, so ist $H(X,Y)$ genau dann gleich Null, wenn l mindestens einen Punkt von U trifft. Mit dem nächsten Lemma wird der Zusammenhang der Vielfachheit einer Nullstelle von H mit der Anzahl der U-Punkte auf einer Geraden deutlich. Das Polynom H enthält somit Information über die Lage der Punkte von U. Dabei werden Geraden mit konstanter Steigung y_0, das heißt Geraden einer Parallelenschar, oder Geraden mit einem konstanten Achsenabschnitt x_0 betrachtet, so daß das zu untersuchende Polynom nur von einer Variablen abhängt. Für konstantes y_0 beziehungsweise konstantes x_0 bezeichnen wir $H(X, y_0)$ mit $H_{y_0}(X)$ beziehungsweise $H(x_0, Y)$ mit $H_{x_0}(Y)$.

Lemma 4.38 *Sei y_0 eine Konstante aus $GF(q)$. Das Polynom H_{y_0} hat eine r-fache Nullstelle an der Stelle $X = x_0$ genau dann, wenn die Gerade $l = \{(x,y) \in \mathcal{A} | y = y_0 \cdot x + x_0\}$ die Menge U in r Punkten trifft.*
Dies ist genau dann der Fall, wenn für ein x_0 aus $GF(q)$ das Polynom H_{x_0} eine r-fache Nullstelle an der Stelle $Y = y_0$ hat.
Insbesondere gilt $H(X,Y) = 0$ für alle X, Y aus $GF(q)$.

Beweis: Die Vielfachheit der Nullstelle x_0 von H_{y_0} entspricht der Anzahl der Faktoren $(X + a_i \cdot y_0 - b_i)$ von H_{y_0}, die für $X = x_0$ verschwinden, da $GF(q)[X][Y]$ ein ZPE-Ring und die Zerlegung von H in Linearfaktoren damit eindeutig ist. Jeder Punkt (a_i, b_i) von U auf l erfüllt $x_0 + a_i \cdot y_0 - b_i = 0$ und entspricht genau einem solchen Faktor $X + a_i \cdot y_0 - b_i$ von H_{y_0}, der verschwindet. Dies sind alle B-Punkte von l, da l_∞ die Menge B nur in (∞) trifft. Der Schnittpunkt (y_0) von l mit l_∞ ist also nicht in B enthalten.
Auf das Polynom H_{x_0}, das nur von Y abhängt, können wir die gleiche Argumentation anwenden. Dabei werden die Geraden durch den affinen Punkt $(0, x_0)$ betrachtet

und Y entspricht der Steigung dieser Geraden. Hier geht ein, daß nach Konstruktion die affine Gerade $\{(0,y)|y \in GF(q)\}$ eine Tangente ist, die B in (∞) trifft. Daher liegt der Punkt $(0,x_0)$ nicht in B und jede Gerade durch diesen Punkt trifft B in mindestens einem Punkt außerhalb $(0,x_0)$.
Eine Gerade mit Steigung Y und Achsenabschnitt X enthält mindestens einen Punkt von B, da B eine blockierende Menge ist. Daher verschwindet H für alle X, Y aus $GF(q)$. □

Lemma 4.39 *Wir können das Polynom H folgendermaßen aufspalten:*

$$H(X,Y) = (X^q - X) \cdot f(X,Y) + (Y^q - Y) \cdot g(X,Y). \tag{4.24}$$

Dabei haben f und g höchstens den totalen Grad k in X und Y.

Beweis: Nach der Definition (4.23) ist der totale Grad von H in X und Y gleich $q+k$. Zuerst führen wir eine Polynomdivison von H durch $(X^q - X)$ durch: Dann ist

$$H(X,Y) = (X^q - X) \cdot f(X,Y) + r(X,Y),$$

wobei f und r Polynome aus $GF(q)[X][Y]$ sind und der Grad von r in X kleiner als q ist. Da H den totalen Grad $q+k$ hat, ist der totale Grad von f in X und Y höchstens k. Wir teilen r durch $(Y^q - Y)$ und erhalten $r(X,Y) = (Y^q - Y) \cdot g(X,Y) + h(X,Y)$ und insgesamt

$$H(X,Y) = (X^q - X) \cdot f(X,Y) + (Y^q - Y) \cdot g(X,Y) + h(X,Y),$$

wobei g und h Polynome aus $GF(q)[X][Y]$ sind und h in X und Y den Grad kleiner q hat. Wie oben hat g den totalen Grad höchstens k.
Angenommen, h ist ungleich Null. Da der Grad von h in Y kleiner als q ist, gibt es ein y_0 aus $GF(q)$, so daß $h(X,y_0)$ ungleich Null ist. Sei n der Grad in X von $h(X,y_0)$. Es gilt $n < q$. Aus Lemma 4.38 folgt, daß $H_{y_0}(X)$ für alle X aus $GF(q)$ gleich Null ist. Für ein festes $X = x_0$ aus $GF(q)$ gilt aber $H(x_0,y_0) = h(x_0,y_0)$. Also verschwindet $h(X,y_0)$ für alle X aus $GF(q)$ und hat daher mindestens q Nullstellen. Dies ist aber ein Widerspruch, da $h(X,y_0)$ den Grad $n < q$ hat. □

Da in H der Term X^{q+k} vorkommt, kommt der Term X^k in f vor und f hat den Grad k in X. Nach Konstruktion enthält die affine Gerade $x = 0$ keinen Punkt von U und daher gilt für alle (a_i,b_i) aus U, daß a_i ungleich Null ist. Daher kommt in H auch der Term $c \cdot Y^{q+k}$ mit einer Konstanten c ungleich Null vor und der Grad von g in Y ist k. Wir bezeichnen $f(X,y_0)$ für ein festes y_0 aus $GF(q)$ mit $f_{y_0}(X)$. Ebenso bezeichnen wir $f(x_0,Y)$ für ein festes x_0 aus $GF(q)$ mit $f_{x_0}(Y)$. Analog wird $g(X,y_0)$ als $g_{y_0}(X)$ und $g(x_0,Y)$ als $g_{x_0}(Y)$ definiert.

Lemma 4.40 *a) Für ein festes y_0 aus $GF(q)$ ist x_0 eine m-fache Nullstelle von f_{y_0} genau dann, wenn die Gerade $\{(x,y)|y = x \cdot y_0 + x_0\}$ genau $m+1$ Punkte von U enthält.*

b) Für ein festes x_0 aus $GF(q)$ ist y_0 eine m-fache Nullstelle von g_{x_0} genau dann, wenn die Gerade $\{(x,y)|y = x \cdot y_0 + x_0\}$ genau $m+1$ Punkte von U enthält.

Beweis:

1. Ist x_0 eine m-fache Nullstelle von f_{y_0}, so folgt aus der Darstellung (4.24) von H aus Lemma 4.39, daß x_0 eine $m+1$-fache Nullstelle von H_{y_0} ist. Aus Lemma 4.38 folgt dann die Behauptung. Enthält die Gerade $\{(x,y)|y = x \cdot y_0 + x_0\}$ genau $m+1$ Punkte von U, so folgt mit Lemma 4.38, daß x_0 eine $m+1$-fache Nullstelle von H_{y_0} ist. Wegen $H_{y_0}(X) = (X^q - X) \cdot f_{y_0}(X)$ ist x_0 eine m-fache Nullstelle von f_{y_0}.

2. Wie im ersten Teil folgt, wenn y_0 eine m-fache Nullstelle von g_{x_0} ist, aus der Darstellung (4.24) von H aus Lemma 4.39, daß y_0 eine $m+1$-fache Nullstelle von H_{x_0} ist. Enthält die Gerade $\{(x,y)|y = x \cdot y_0 + x_0\}$ genau $m+1$ Punkte von U, so folgt mit Lemma 4.38, daß y_0 eine $m+1$-fache Nullstelle von H_{x_0} ist. Damit ist y_0 ist eine m-fache Nullstelle von g_{x_0} wegen $H_{x_0}(Y) = (Y^q - Y) \cdot g_{x_0}(Y)$.

□

Lemma 4.41 *Seien a und b aus $GF(q)$. Kein Faktor $X + aY - b$ teilt f.*

Beweis: Angenommen $X + aY - b$ ist ein Teiler von f. Wir betrachten $f_{y_0}(X)$ für ein konstantes $y_0 \in GF(q)$. Da $X + aY - b$ das Polynom f teilt, ist $X + ay_0 - b$ ein Teiler von $f_{y_0}(X)$ und es gilt $f_{y_0}(b - y_0 a) = f(b - y_0 a, y_0) = 0$, das heißt $(b - y_0 a, y_0)$ ist eine mindestens einfache Nullstelle von f. Nach Lemma 4.40 Teil a) folgt dann, daß die Gerade $l := \{(x,y)|y = y_0 \cdot x + b - y_0 a\}$ von $\mathcal{A}$ mit Steigung y_0 durch $P := (a,b) \in \mathcal{A}$ mindestens zwei Punkte von U enthält. Da y_0 beliebig gewählt war, enthält also jede nichtvertikale affine Gerade durch P mindestens 2 Punkte von B. Angenommen, P ist kein Punkt von B. Dann folgt mit (4.22), daß $|B| \geq q \cdot 2 + 1 > 3(q+1)/2$, ein Widerspruch zu Bedingung (4.22).
Also liegt P in B und jede nichtvertikale affine Gerade durch P trifft B in mindestens einem Punkt außerhalb P. Da auch die vertikale affine Gerade durch P einen weiteren B-Punkt (∞) ungleich P enthält, gibt es keine Tangente durch P. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, daß B minimal ist. □

Lemma 4.42 *Für x_0, y_0 aus $GF(q)$ ist $f(x_0, y_0) = 0$ genau dann, wenn $g(x_0, y_0) = 0$ ist.*

Beweis: Wir nehmen an, daß für x_0, y_0 aus $GF(q)$ gilt $f(x_0, y_0) = 0$. Nach Lemma 4.40 Teil a) enthält dann die Gerade $\{(x, y)|y = x \cdot y_0 + x_0\}$ mindestens 2 Punkte von U. Mit Lemma 4.40 Teil b) folgt daraus $g(x_0, y_0) = 0$.
Sei nun umgekehrt $g(x_0, y_0) = 0$ vorausgesetzt. Aus Lemma 4.40 Teil b) folgt, daß $\{(x, y)|y = x \cdot y_0 + x_0\}$ die Menge U in mindestens 2 Punkten trifft. Aus Lemma 4.40 Teil a) folgt dann die Behauptung. □

Lemma 4.43 *Sei $d \in GF(q)[X][Y]$ ein Teiler von f und g. Dann ist d ein Element von $GF(q)$.*

Beweis: Angenommen d ist nicht in $GF(q)$ enthalten. Aus der Darstellung (4.24) von H aus Lemma 4.39 kann man erkennen, daß d ein Teiler von H ist. Da H in (4.23) als Produkt von Linearfaktoren definiert und $GF(q)[X][Y]$ ein ZPE-Ring ist, muß d für gewisse a und b aus $GF(q)$ durch $X + aY - b$ teilbar sein. Also ist auch $(X + aY - b)$ ein Teiler von f. Dies ist ein Widerspruch zu Lemma 4.41. □

4.5.1 Eigenschaften algebraischer Kurven

Hier werden kurz einige Definitionen und Lemmata zu der Schnittvielfachheit von Punkten mit algebraischen Kurven angegeben, da wir zum Beweis von Resultat 4.7 die Polynome f und g weiter untersuchen. Diese enthalten als Teiler von H Information über die affinen Punkte von B.
Eine Einführung in dieses Gebiet findet man in [25] von R.J. Walker und in [14] von W. Fulton. Dieser Abschnitt orientiert sich an diesen Quellen [14, 25] und einer Vorlesung (Juli 1999, Gießen) über blockierende Mengen und Bögen von T. Szőnyi.
Seien F und G Polynome aus $GF(q)[X][Y]$. Die affine algebraische **Kurve** $\mathcal{F}$ zu F ist die Menge der affinen Punkte (x, y), deren Koordinaten Nullstellen von F sind. In unserem Fall zerfallen die Polynome schon über $GF(q)$, da sie Teiler von H sind und H in (4.23) als Produkt von Linearfaktoren von $GF(q)[X][Y]$ definiert ist. Das heißt, alle Punkte der Kurven liegen schon in der affinen Ebene $AG(2, q)$ und wir müssen nicht zu dem algebraischen Abschluß von $GF(q)$ übergehen. Die durch ein irreduzibles Polynom, das F teilt, definierte Kurve nennt man auch **Komponente** von $\mathcal{F}$. Die Schnittvielfachheit $\boldsymbol{m_P(l, \mathcal{F})}$ eines Punktes P bezüglich einer Geraden l und einer Kurve $\mathcal{F}$, wobei l keine Komponente von $\mathcal{F}$ ist, ist die Vielfachheit der Nullstelle, die P entspricht, in dem auf l entwickelten Polynom F zu $\mathcal{F}$. Die Schnittvielfachheit $\boldsymbol{m_P(\mathcal{F})}$ von P bezüglich $\mathcal{F}$ ist das Minimum der Vielfachheiten $m_P(l, \mathcal{F})$, wobei l über alle Geraden durch P läuft. Dies entspricht der niedrigsten Ordnung des nicht verschwindenden Terms in der Taylorentwicklung von F im Punkt P. Eine Gerade t durch P heißt **Tangente**, wenn $m_P(t, \mathcal{F})$ größer als $m_P(\mathcal{F})$ ist.
Die Schnittvielfachheit $\boldsymbol{I(P, \mathcal{F} \cap \mathcal{G})}$ eines Punktes P bezüglich zweier Kurven $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ kann axiomatisch definiert werden. Dabei wird gefordert, daß $I(P, \mathcal{F} \cap \mathcal{G})$ invariant

unter projektiven Kollineationen ist. Die Schnittvielfachheit ist gleich Null, wenn der Punkt nicht auf beiden Kurven liegt:

$$P \notin (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) \Rightarrow I(P, \mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = 0. \tag{4.25}$$

Sie ist unendlich, wenn es eine Komponente beider Kurven durch diesen Punkt gibt und ansonsten ist sie eine natürliche Zahl. Haben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ keine gemeinsame Tangente an P, so gilt $I(P, \mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = m_P(\mathcal{F}) \cdot m_P(\mathcal{G})$. Die Schnittvielfachheit bleibt gleich, wenn man von dem einen Polynom Vielfache des anderen abzieht:

$$I(P, \mathcal{F} \cap (\mathcal{G} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{F})) = I(P, \mathcal{F} \cap \mathcal{G}), \tag{4.26}$$

wobei die Summe von Kurven die durch die Summe der dazugehörigen Polynome definierte Kurve ist. Sei nun $\mathcal{D}$ die Kurve zu dem Polynom $D \in GF(q)[X][Y]$. Betrachtet man zwei Faktoren eines Polynoms, so addieren sich die Schnittvielfachheiten bezüglich dieser beiden Faktoren:

$$I(P, \mathcal{F} \cap (\mathcal{G} \cdot \mathcal{D})) = I(P, \mathcal{F} \cap \mathcal{G}) + I(P, \mathcal{F} \cap \mathcal{D}), \tag{4.27}$$

wobei das Produkt von Kurven als die durch das Produkt der dazugehörigen Polynome definierte Kurve ist. Der Satz von Bézout wird dann auch axiomatisch gefordert und besagt, daß wenn $\mathcal{F}$ den Grad m und $\mathcal{G}$ den Grad n hat und wenn F und G keine gemeinsame Komponente haben, die Summe über die Schnittvielfachheiten gleich $m \cdot n$ ist. Also

$$\sum_P I(P, \mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = m \cdot n. \tag{4.28}$$

Man kann zeigen, daß mit diesen Axiomen die Schnittvielfachheit eines Punktes eindeutig bestimmt ist. Im nächsten Lemma wird gezeigt, daß bei bestimmten Verknüpfungen der zu den Kurven gehörigen Polynome die Schnittvielfachheit eines Punktes gleichbleibt. Mit Hilfe dieses Lemmas kann man die Schnittvielfachheit $m_P(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$ eines Punktes ausrechnen, indem man Verknüpfungen der dazugehörigen Polynome bildet, so daß die Schnittvielfachheit gleichbleibt und eines der resultierenden Polynome durch Y teilbar ist. Mit der Eigenschaft (4.27) kann dann dieser Faktor Y abgespalten werden.

Lemma 4.44 (`SZOENYI`) Seien B, C, D, E, F, G Polynome aus $GF(q)[X][Y]$. Sei nun $F^* := BF + CG$ und $G^* := DF + EG$, wobei $BE - DC$ eine Konstante k aus $GF(q) \setminus \{0\}$ ist. Seien $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}^*$, $\mathcal{G}^*$ die durch B, C, D, E, F, G, F^* und G^* definierten Kurven. Dann gilt

$$I(P, \mathcal{F}^* \cap \mathcal{G}^*) = I(P, \mathcal{F} \cap \mathcal{G}).$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
I(P,\mathcal{F}^*\cap\mathcal{G}^*) &= I(P,(\mathcal{BF}+\mathcal{CG})\cap(\mathcal{DF}+\mathcal{EG}))\\
&= I(P,(\mathcal{BFE}+\mathcal{CGE})\cap(\mathcal{DF}+\mathcal{EG}))-I(P,\mathcal{E}\cap(\mathcal{DF}+\mathcal{EG})) \quad (4.29)\\
&= I(P,(\mathcal{BFE}+\mathcal{CGE}-\mathcal{C}(\mathcal{DF}+\mathcal{EG}))\cap(\mathcal{DF}+\mathcal{EG}))-I(P,\mathcal{E}\cap(\mathcal{DF})) \quad (4.30)\\
&= I(P,(\mathcal{F}(\mathcal{BE}-\mathcal{CD}))\cap(\mathcal{DF}+\mathcal{EG}))-I(P,\mathcal{E}\cap\mathcal{D})-I(P,\mathcal{E}\cap\mathcal{F}) \quad (4.31)\\
&= I(P,\mathcal{F}\cap(\mathcal{DF}+\mathcal{EG}))-I(P,\mathcal{E}\cap\mathcal{F}) \quad (4.32)\\
&= I(P,\mathcal{F}\cap\mathcal{E})+I(P,\mathcal{F}\cap\mathcal{G})-I(P,\mathcal{E}\cap\mathcal{F}) \quad (4.33)\\
&= I(P,\mathcal{F}\cap\mathcal{G})
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen (4.30) und (4.33) folgen aus der Eigenschaft (4.26) und (4.29), (4.31), (4.32) und (4.33) folgen mit (4.27), wobei in (4.32) benutzt wird, daß $BE-CD$ ungleich Null ist und damit $I(P,(\mathcal{BE}-\mathcal{CD})\cap(\mathcal{DF}+\mathcal{EG}))$ nach (4.25) gleich Null sein muß. Außerdem ist $I(P,\mathcal{E}\cap\mathcal{D})$ gleich Null, da nach Voraussetzung $BE-CD$ eine Konstante ungleich Null ist und daher die Koordinaten von P nicht gleichzeitig Nullstellen von D und E sein können. □

Lemma 4.45 (`SZOENYI`) Seien F und G Polynome aus $GF(q)[X][Y]$. Sei g die affine horizontale Gerade $\{(x,y)\in\mathcal{A}|y=y_0\}$ und sei $P=(x_0,y_0)$ ein Punkt von g. Angenommen $X=x_0$ ist eine s-fache Nullstelle von $F(X,y_0)$, also $m_P(g,\mathcal{F})=s$, und für $G(X,y_0)$ ist $X=x_0$ eine t-fache Nullstelle, also $m_P(g,\mathcal{G})=t$, mit $s,t\in\mathbb{N}$ und $s\leq t$. Dann gilt

$$I(P,\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\geq s.$$

Beweis: Wir können annehmen, daß P die Koordinaten $(0,0)$, hat, da die Schnittvielfachheit unter projektiven Kollineationen invariant ist und wir somit P auf den Nullpunkt abbilden können. Sei nun

$$
\begin{aligned}
F_0(X) &:= F(X,0)\\
G_0(X) &:= G(X,0).
\end{aligned}
$$

Da 0 eine s-fache Nullstelle von F_0 ist, teilt X^s das Polynom F_0. Ebenso teilt X^t das Polynom G_0. Sei d der größte gemeinsame Teiler von F_0 und G_0 und $\mathcal{D}$ die durch d definierte Kurve. Aus $s\leq t$ folgt insbesondere, daß X^s das Polynom G_0 und damit d teilt. Nach dem euklidischen Algorithmus gibt es in $GF(q)[X]$ Polynome a und b, so daß

$$
\begin{aligned}
a(X)\cdot F_0(X)+b(X)\cdot G_0(X) &= d(X)\\
\Rightarrow a(X)\cdot\frac{F_0(X)}{d(x)}+b(X)\cdot\frac{G_0(X)}{d(x)} &= 1. \quad (4.34)
\end{aligned}
$$

Mit diesen Polynomen können wir jetzt Polynome F^* und G^* aus $GF(q)[X][Y]$ definieren, wobei die Voraussetzungen von Lemma 4.44 wegen (4.34) erfüllt sind. Seien also

$$\begin{aligned}F^*(X,Y) &:= -\frac{F_0(X)}{d(x)} \cdot G(X,Y) + \frac{G_0(X)}{d(x)} \cdot F(X,Y)\\ G^*(X,Y) &:= b(X) \cdot G(X,Y) + a(X) \cdot F(X,Y).\end{aligned}$$

Es ist F^* durch Y teilbar, da der Grad von F in X gleich $k < q$ ist und für alle X aus $GF(q)$ gilt:

$$F^*(X,0) = -\frac{F_0(X)}{d(x)} \cdot G_0(X) + \frac{G_0(X)}{d(x)} \cdot F_0(X) = 0.$$

Also ist $F^*(X,Y) = Y \cdot F^+(X,Y)$ für ein F^+ aus $GF(q)[X][Y]$. Wir bezeichnen die Gerade zu $Y = 0$ mit $\mathcal{Y}$. Nach Lemma 4.44 gilt

$$\begin{aligned}I(P, \mathcal{F} \cap \mathcal{G}) &= I(P, \mathcal{F}^* \cap \mathcal{G}^*)\\ &= I(P, (\mathcal{Y} \cdot \mathcal{F}^+) \cap \mathcal{G}^*)\\ &= I(P, \mathcal{Y} \cap \mathcal{G}^*) + I(P, \mathcal{F}^+ \cap \mathcal{G}^*)\\ &\geq I(P, \mathcal{Y} \cap \mathcal{G}^*).\end{aligned}$$

Wir können $G^*(X,Y)$ so aufspalten: $G^*(X,Y) = G^*(X,0) + Y \cdot G_1^*(X,Y)$. Die Form $G^*(X,0)$ ist gleich $d(X)$ und definiert daher die Kurve $\mathcal{D}$ Sei die Kurve $\mathcal{G}_1^*$ durch $G_1^*(X,Y)$ definiert. Nach (4.26) ist

$$I(P, \mathcal{Y} \cap \mathcal{G}^*) = I(P, \mathcal{Y} \cap (\mathcal{D} + \mathcal{Y} \cdot \mathcal{G}_1^*) = I(P, \mathcal{Y} \cap \mathcal{D}).$$

Außerdem ist $X = 0$ eine genau s-fache Nullstelle von d und damit ist $I(P, \mathcal{Y} \cap \mathcal{D}) = s$. $\square$

Wir setzen nun den Beweis von Resultat 4.7 fort.
Sei dazu $l_{y_0} := \{(x,y) \in \mathcal{A} | y = y_0\}$ die horizontale Gerade von $\mathcal{A}$ mit dem y-Achsenabschnitt y_0.

Lemma 4.46 *Sei h ein irreduzibler Teiler von f mit dem totalen Grad s. Ist die partielle Ableitung von h nach X ungleich Null, dann gibt es mindestens $qs - s(s-1)$ Punkte aus $\mathcal{A}$, die auf der durch h definierten Kurve liegen.*

Beweis: Da h ein Teiler von f ist und in f der Term X^k vorkommt, muß in h der Term X^s vorkommen und h hat in X den Grad s. Sei $\mathcal{C}$ die affine Kurve von h. Wir zählen die Punkte von $\mathcal{C}$ auf den horizontalen Geraden l_{y_0} für alle $y_0 \in GF(q)$. Dies sind die Nullstellen von $h(X, y_0)$ bezüglich X.
Das Polynom H wurde als Produkt von Linearfaktoren aus $GF(q)[X][Y]$ definiert. Daher liegen für ein festes $Y = y_0$ alle Nullstellen von $H(X, y_0)$ in $GF(q)$ und dies

gilt auch für jeden Teiler von $H(X, y_0)$ also auch für $f(X, y_0)$ und insbesondere für $h(X, y_0)$. Da h in X den Grad s hat, hat $h(X, y_0)$ bezüglich X genau s Nullstellen, die den Schnittpunkten von $\mathcal{C}$ mit der horizontalen Geraden l_{y_0} entsprechen. Für alle affinen horizontalen Geraden sind dies also $q \cdot s$ Punkte. Diese werden allerdings mit ihrer Vielfachheit gezählt.
Um jetzt die Anzahl der verschiedenen Schnittpunkte nach unten abschätzen zu können, müssen wir für einen Punkt $P := (x_0, y_0)$, wobei x_0 eine m-fache Nullstelle von $h(X, y_0)$ mit $m > 1$ ist, mindestens den Wert $m - 1$ abziehen, damit dieser höchstens einmal gezählt wird. Sei h'_X das partiell nach X abgeleitete Polynom h und $\mathcal{C}'_X$ die durch h'_X definierte Kurve. Nach Lemma 4.45 gilt $I(P, \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'_X) \geq m - 1$, da x_0 eine $(m-1)$-fache Nullstelle von $h'_X(X, y_0)$ ist. Wenn wir von den Schnittpunkten von $\mathcal{C}$ mit den horizontalen Geraden mit Vielfachheit gezählt also die Schnittpunkte von $\mathcal{C}$ mit $\mathcal{C}'_X$ abziehen, so erhalten wir eine Abschätzung für die Anzahl der verschiedenen Punkte von $\mathcal{C}$. Die Anzahl der Schnittpunkte von $\mathcal{C}$ mit $\mathcal{C}'_X$ ist nach dem Satz von Bézout (Eigenschaft (4.28)) gleich $s \cdot (s-1)$. Diesen Satz kann man anwenden, da h irreduzibel ist und daher keine gemeinsame Komponente mit h'_X hat und weil h'_X ungleich Null ist. Das heißt

$$|\mathcal{C}| = |\{(x, y) \in \mathcal{A} | h(x, y) = 0\}| \geq qs - s(s-1).$$

□

Lemma 4.47 *Ist h ein irreduzibler Teiler von f, so sind die Exponenten von X in h alle durch p teilbar.*

Beweis: Sei h ein irreduzibler Teiler von f vom totalen Grad s. Angenommen die partielle Ableitung h'_X von h nach X ist ungleich Null. Dann enthält die durch h definierte Kurve mindestens $qs - s(s-1)$ Punkte nach Lemma 4.46. Diese Punkte liegen auch auf der durch f definierten Kurve und nach Lemma 4.42 sind dies auch Punkte der durch g definierten Kurve. Nach Lemma 4.43 haben f und g keinen gemeinsamen Faktor und damit gilt dies auch für h und g. Wir können also den Satz von Bézout (Eigenschaft (4.28)) anwenden. Nach diesem liegen ks Punkte in dem Schnitt der Kurven von g und h. Also folgt mit $s \leq k$ und $k < (q+1)/2$ aus (4.22)

$$\begin{aligned} qs - s(s-1) &\leq ks \\ &\Rightarrow q \leq k + s - 1 \\ &\Rightarrow q \leq 2k - 1 < 2(q+1)/2 - 1 = q, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. Also ist h'_X gleich Null und daher müssen alle Exponenten von X in h durch p teilbar sein. □

Lemma 4.48 *Für ein konstantes y_0 aus $GF(q)$ ist die Vielfachheit jeder Nullstelle von $f_{y_0}(X)$ durch p teilbar.*

Beweis: Nach Lemma 4.47 sind für jeden irreduziblen Teiler von f alle Exponenten von X durch p teilbar. Dies gilt damit auch für f und damit ist f_{y_0} eine p-fache Potenz eines Polynoms aus $GF(q)[X]$. Damit hat jede Nullstelle von f_{y_0} eine durch p teilbare Vielfachheit. □

Dies schließt den Beweis von Resultat 4.7 ab, da die Anzahl der Punkte von U auf einer nicht vertikalen Geraden $\{(x, y) \in \mathcal{A} | y = x \cdot y_0 + x_0\}$ nach Lemma 4.40 Teil a) der Vielfachheit einer Nullstelle x_0 von $f_{y_0}(X)$ plus eins entspricht und die Vielfachheit der Nullstellen von $f_{y_0}(X)$ nach Lemma 4.48 durch p teilbar ist. Für eine vertikale Gerade g existiert ein B-Punkt P nicht auf g, da B nicht trivial ist. Wegen Lemma 4.37 liegt P auf mindestens zwei Tangenten und wir wählen eine dieser Tangenten als unendlich ferne Gerade, die andere als x-Achse und P als Punkt (∞). Dann trifft g in diesem Koordinatensystem nicht (∞), ist also nicht vertikal und wir können analog wie oben in diesem Koordinatensystem folgern, daß g die Menge B in $1 \mod p$ Punkten trifft.

Literaturverzeichnis

[1] S. Ball and A. Blokhuis, On the size of a double blocking set in $PG(2, q)$, *Finite Fields Appl.* **2** (1996), 125–137.

[2] A. Beutelspacher, On Baer Subspaces of Finite Projective Spaces, *Math. Z.* **184** (1983), 301–319.

[3] A. Beutelspacher, Blocking Sets and Partial Spreads in Finite Projective Spaces. *Geom. Dedicata* **9** (1980), 130-157.

[4] A. Blokhuis, On the size of a blocking set in $PG(2, p)$, *Combinatorica* **14** (1994), 111–114.

[5] A. Blokhuis und A. E. Brouwer, Blocking Sets in Desarguesian Projective Planes, *Bull. London Math. Soc.* **18** (1986), 132–134.

[6] M. Bokler and K. Metsch, On the smallest minimal blocking sets in projective space generating the whole space, *Contributions to algebra and geometry*, to appear.

[7] M. Bokler, Minimal blocking sets in projective spaces of square order, *Des. Codes Cryptogr.* **24** (2001), 131–144.

[8] M. Bokler, 3-blockierende Mengen in projektiven Räumen quadratischer Ordnung, *Diplomarbeit im Fachbereich Mathematik der Justus-Liebig-Universität Gießen* (1999).

[9] R.C. Bose and R.C. Burton, A characterization of flat spaces in a finite geometry and the uniqueness of the Hamming and the MacDonald codes, *J. Combinat. Theory* **1** (1966), 96–104.

[10] A.A. Bruen, Blocking sets in finite projective planes, *SIAM. J. Appl. Math* **21** (1971), 380–392.

[11] A.A. Bruen, Blocking sets and skew subspaces of projective space, *Canad. J. Math.* **32** (1980), 628–630.

[12] A.A. Bruen and J.A. Thas, Blocking Sets, *Geom. Ded.* **6** (1977), 193–203.

[13] A. E. Brouwer and A. Schrijver, The blocking number of an affine space, *J. Comb. Th. Ser. A* **24** (1978), 251–253.

[14] W. Fulton, *Algebraic curves*, W.A. Benjamin Inc., New York-Amsterdam (1969).

[15] U. Heim, Blockierende Mengen in endlichen projektiven Räumen, *Mitt. Math. Semin. Giessen* **226** (1996), 4–82.

[16] J.W.P. Hirschfeld, *Projective geometries over finite fields*, Clarendon Press, Oxford (1998).

[17] M. Huber, Baer Cones in Finite Projective Spaces, *J. of Geom.* **28** (1987), 128–144.

[18] R. E. Jamison, Covering finite fields with cosets of subspaces, *J. Comb. Th. Ser. A* **22** (1977), 253–266.

[19] K. Metsch and L. Storme, 2-Blocking sets in $PG(n, q)$, q square, *Contributions to algebra and geometry* **41** (2000), No. 1, 247–255.

[20] O. Polverino, Small blocking sets in $PG(2, q^3)$, *Des. Codes Cryptogr.*, to appear.

[21] O. Polverino and L. Storme, Minimal blocking sets in $PG(2, q^3)$, (preprint).

[22] L. Storme and Zs. Weiner, On 1-blocking sets in $PG(n, q)$, $n \geq 3$, (preprint).

[23] T. Szőnyi, Blocking sets in Desarguesian affine and projective planes, *Finite Fields and Appl.* **3** (1997), 187–202.

[24] T. Szőnyi and Zs. Weiner, Small blocking sets in higher dimensions, (preprint).

[25] R. J. Walker, *Algebraic curves*, Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1978).

Index