

Nichtparametrische Schätzung bei sequentiell auftretenden Lebensdauern unter Zensierung

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
an den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
(Mathematik)

der Justus-Liebig-Universität Gießen

vorgelegt von
Christoph Neuhoff

Gießen 2002

Dekan: Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Winfried Stute (Gießen)
2. Berichterstatter: Prof. Dr. Erich Häusler (Gießen)

Datum der Disputation: 02.09.2002

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Das Modell	4
3	Notationen und Bezeichnungen	7
3.1	Verteilungen	7
3.2	Ordnungsgrößen	7
3.3	Mengen	8
3.4	Notationsvereinfachungen	8
4	Herleitung und erste Analyse zweier Schätzer	9
4.1	Identifizierungsgleichungen	9
4.2	Herleitung von zwei Schätzern	11
4.3	Schätzer für die Verteilungsfunktion	14
4.4	Eigenschaften der Schätzer	15
4.5	Vergleich zwischen den Schätzern	16
4.6	Vergleich mit Schätzern aus der Literatur	18
5	Linearisierung des Schätzers	21
6	Ein Invarianzprinzip für den φ-Prozeß	57
7	Simulationen	75
7.1	Allgemeines	75
7.2	Exponentialverteilung mit unabhängigen Komponenten	76
7.3	Exponentialverteilung nach Marshall und Olkin	78
7.4	Exponentialverteilung nach Gumbel	81
7.5	Vergleich zwischen S_n und T_n	84
7.6	Vergleich zwischen S_n und dem Schätzer von Lin, Sun und Ying	87

1 Einleitung

Bei statistischen Erhebungen im medizinischen, technischen oder sozialwissenschaftlichen Umfeld werden häufig Lebensdauern untersucht. Der Begriff Lebensdauer ist dabei allgemein gefaßt und beschreibt eine Zeitspanne zwischen zwei interessierenden Ereignissen. So könnte dies bei einer Untersuchung der Berufschancen von Hochschulabsolventen der Zeitraum von der Beendigung des Studiums bis zum Eintritt in das erste Arbeitsverhältnis sein. Beschrieben wird diese zufällige Zeitdauer durch die Variable X . Ziel ist es, aus der Beobachtung an n Personen und den bei ihnen ermittelten Werten $X_1, \dots, X_n$ auf die Verteilung von X zu schließen. Dies dient dazu, um etwa Aussagen über den mittleren Wert oder Prognosen hinsichtlich X machen zu können.

Bei diesen Untersuchungen kommt es jedoch vor, daß Absolventen von einem gewissen Zeitpunkt an aus persönlichen Gründen an den regelmäßig durchgeführten Befragungen nicht mehr teilnehmen. Dies könnte zum Beispiel daran liegen, daß sie den Wohnort gewechselt oder eine Beschäftigung gefunden haben, ohne es zu melden. Außerdem ist nicht auszuschließen, daß bei Abschluß der Studie zum Zeitpunkt C manche Absolventen noch kein Arbeitsverhältnis eingegangen sind. In beiden Situationen haben wir demnach nicht das Eintreten des uns interessierenden Ereignisses beobachtet und kennen somit nicht den genauen Wert von X . Wir wissen nur, daß $X \geq C$ gilt und sprechen in diesem Fall von Zensierung. Diese unvollständige Information über den Wert von X erschwert den Rückschluß auf die zugehörige Verteilung. Mit der Analyse solcher zensierten Daten beschäftigt sich die Survival Analysis.

In dem einführenden Beispiel sind wir an *einer* Lebensdauer X interessiert. Es handelt sich somit um eindimensionale Größen. Dieser Fall ist in der Literatur seit der Arbeit von Kaplan und Meier (1958) bereits eingehend diskutiert und bearbeitet worden. Häufig beobachtet man jedoch zwei gepaarte Lebensdauern X_1, X_2 , wie die folgenden Anwendungen belegen:

Bei Personen, die verschiedene Krankheitsstadien durchlaufen, könnte X_1 die Zeitspanne sein, während der eine gewisse Therapie verabreicht wird und X_2 die nach Beendigung der Therapie dauernde Zeit bis zur vollständigen Genesung. Eine Zensierung würde eintreten, wenn wir nicht den ganzen Krankheitsprozeß des Patienten verfolgen können. Entsprechend kann X_1 für die Inkubationszeit einer Krankheit und X_2 für die Dauer derselben stehen.

Eine mehr technisch ausgerichtete Anwendung ist die folgende: In einem elektronischen System wird ein Aggregat durch ein Notaggregat gesichert. Wenn das erste ausfällt, dann beginnt das zweite zu arbeiten. Hier werden die Lebensdauern der Aggregate durch X_1 und X_2 beschrieben. Zensierung käme hier zum Beispiel einem aus wirtschaftlichen Überlegungen motivierten Abschalten des Systems bzw. einem Ausfall des Systems aus Gründen, die nicht mit den Aggregaten in Zusammenhang stehen, gleich.

Wir sehen, daß die Lebensdauern in diesen Anwendungen einer natürlichen Reihenfolge unterliegen. Zuerst realisiert sich die Lebensdauer X_1 , dann X_2 . Die zensierende Variable bezeichnen wir mit C . Das heißt, das Modell, das diesen Anwendungen zugrunde liegt und welches wir in dieser Arbeit analysieren werden, besteht aus der zweidimensionalen

Lebensdauer $(X_1, X_2) \sim F$ und der davon unabhängigen zensierenden Variablen $C \sim G$. Da die Lebensdauern sich hintereinander realisieren und die Zensierung damit auf die Summe wirkt, führt ein großer Wert von X_1 häufig zu einer erhöhten Zensierungsgefahr für X_2 . Dies hat zur Folge, daß wir es bei X_2 mit abhängiger Zensierung zu tun haben. Ziel ist es nun, aus den erhobenen Daten Rückschlüsse auf die zugrunde liegende Verteilung des Vektors (X_1, X_2) zu ziehen. Da wir es mit einer mehrdimensionalen Lebensdauerverteilung zu tun haben, fällt dies in das Gebiet der *Multivariaten Survival Analysis*.

Wir interessieren uns in dieser Arbeit nicht nur für die gemeinsame Verteilung der Lebensdauern (X_1, X_2) , sondern allgemeiner für das Integral

$$\int \varphi(x_1, x_2) F d(x_1, x_2)$$

für eine integrierbare Funktion φ . Dadurch, daß wir diesen allgemeineren Ansatz wählen und eine beliebige integrierbare Funktion φ zulassen, können wir damit einige interessante Größen neben der Verteilungsfunktion beschreiben, wie beispielsweise Erwartungswerte oder höhere Momente von X_1 und X_2 sowie deren Kovarianz.

Für diese Zielgröße werden wir in dieser Arbeit einen nichtparametrischen Schätzer herleiten. Dann weisen wir nach, daß er einige wünschenswerte Eigenschaften besitzt und untersuchen seine Verteilungsstruktur. Wir zeigen für den standardisierten Schätzer asymptotische Normalität und für den zugehörigen Prozeß Konvergenz gegen einen zentrierten Gaußprozeß.

In Kapitel zwei folgt eine mathematische Beschreibung des zugrundegelegten Modells. Daran anschließend, halten wir einige Notationen und Bezeichnungen fest, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit benutzen werden. Im vierten Kapitel leiten wir zwei Schätzer her, von denen wir einen für die weitere Analyse auswählen. Außerdem werden erste Eigenschaften des Schätzers nachgewiesen, und es wird ein Vergleich mit anderen in der Literatur vorgeschlagenen Schätzern angestellt. In Kapitel fünf bestimmen wir eine Linearisierung des Schätzers, die seine asymptotische Normalität zur Folge hat. Anschließend, in Kapitel sechs, lassen wir φ eine Vapnik-Červonenkis Klasse durchlaufen und beweisen für den zugehörigen Prozeß Verteilungskonvergenz gegen einen zentrierten Gaußprozeß. Im letzten Kapitel fassen wir die durchgeführten Simulationen für den Schätzer der Verteilungsfunktion zusammen.

Herrn Prof. Dr. Winfried Stute danke ich für die Anregung zum Thema dieser Dissertation. Durch seine ständige Bereitschaft zu kritischen und konstruktiven Diskussionen leistete er eine wertvolle und vorbildliche Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit.

Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. Erich Häusler, der jederzeit bereit war, auf Fragen einzugehen.

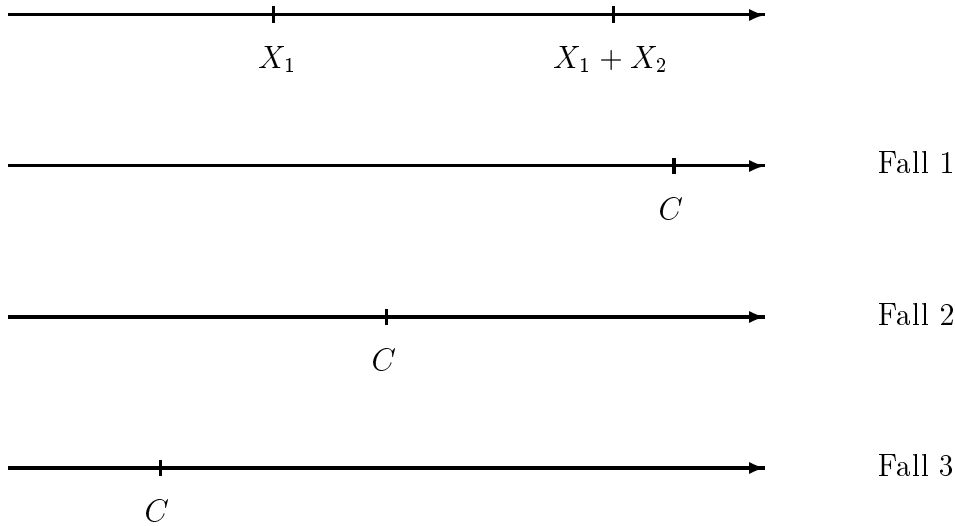
Schließlich möchte ich mich bei meinen Freunden und meiner Familie bedanken, die mich auf vielfältige Weise unterstützt haben.

2 Das Modell

In diesem Kapitel werden wir das mathematische Modell, das in dieser Arbeit untersucht wird, näher beschreiben.

In unserem Modell treten zwei Lebensdauern hintereinander auf, die einer möglichen Zensurierung durch rechts unterliegen. Das heißt, wir haben die zweidimensionale Lebensdauer $(X_1, X_2) \sim F$ und die davon unabhängige zensierende Variable $C \sim G$. Wir setzen voraus, daß diese beiden Verteilungen und die von $X_1 + X_2$ stetig seien. Da es sich um Lebensdauern handelt, können wir davon ausgehen, daß alle Variablen nichtnegativ sind. Die Unabhängigkeit zwischen (X_1, X_2) und C bedeutet, daß das zensierende Ereignis unabhängig von der Realisierung der Lebensdauern eintritt. Dies ist in vielen Fällen und den uns interessierenden Anwendungen gegeben. Über die Verteilungen sowie über die Abhängigkeitsstruktur zwischen X_1 und X_2 machen wir keine weiteren Annahmen.

Wenn wir die Variablen auf Zeitachsen abtragen, sind folgende drei Zensierungsszenarien denkbar:



Die Zeitdauern, die wir beobachten, seien Z_1, Z_2 . Außerdem kennen wir bei Datenerhebung den Zensierungstyp (Fall 1 bis 3), der vorliegt, und bezeichnen die zugehörige Variable mit δ .

Fall 1:

Hier realisiert sich C erst nach $X_1 + X_2$, so daß wir sowohl X_1 als auch X_2 beobachten. Es liegt keine Zensurierung vor, und wir geben in diesem Fall δ den Wert 3. Das heißt, hier gilt:

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1 \\ Z_2 &= X_2 \\ \delta &= 3 \end{aligned}$$

Fall 2:

Während X_1 beobachtet wird, wirkt auf X_2 die zensierende Variable, so daß wir nicht X_2 , sondern $C - X_1$ beobachten. Man beachte, daß die X_2 zensierende Variable nicht C ist, sondern $C - X_1$, da X_2 sich erst nach Ablauf von X_1 realisiert. Natürlich ist mit $C - X_1$ und X_1 auch C bekannt. Wir ordnen in diesem Fall δ den Wert 2 zu:

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1 \\ Z_2 &= C - X_1 \\ \delta &= 2 \end{aligned}$$

Fall 3:

X_1 wird schon durch C zensiert, so daß wir in der zweiten Komponente gar nichts beobachten und wir in diesem Fall Z_2 den Wert Null geben. δ setzen wir auf 1:

$$\begin{aligned} Z_1 &= C \\ Z_2 &= 0 \\ \delta &= 1 \end{aligned}$$

Wenn wir die drei Fälle zusammensetzen, können wir die beobachtbaren Zufallsvariablen folgendermaßen beschreiben (für das Minimum zweier Größen a, b benutzen wir die Schreibweise $a \wedge b$):

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_1 \wedge C \\ Z_2 &= X_2 \wedge ((C - X_1)1_{\{X_1 \leq C\}}) \\ \delta &= 1 + 1_{\{X_1 \leq C\}} + 1_{\{X_2 \leq C - X_1\}} \end{aligned}$$

Auf der Grundlage n solcher Daten, $(Z_{11}, Z_{21}, \delta_1), \dots, (Z_{1i}, Z_{2i}, \delta_i), \dots, (Z_{1n}, Z_{2n}, \delta_n)$, müssen wir unseren Schätzer konstruieren.

Wir halten dazu einige Beobachtungen fest:

Dadurch, daß die X_2 zensierende Variable $(C - X_1)1_{\{X_1 \leq C\}}$ von X_1 abhängt und wir eine beliebige Abhängigkeit zwischen X_1 und X_2 zulassen, ist die zensierende Variable im allgemeinen abhängig von X_2 . Es liegt somit abhängige Zensierung vor. Ein großer Wert von X_1 sorgt insbesondere bei positiver Korrelation zwischen X_1 und X_2 für eine höhere Zensierungsgefahr für X_2 .

Wir stellen außerdem fest, daß im Fall $\delta = 1$ keine Information über X_2 vorliegt, was die Schätzung erschwert. Der zugehörige Vektor (Z_1, Z_2) realisiert sich auf der x-Achse. Die zensierende Variable wirkt eher auf die Summe der X_1, X_2 anstatt auf jede Komponente einzeln. Aus diesem Grund betrachten wir die Summe $Z_1 + Z_2$ näher:

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (X_1 \wedge C) + (X_2 \wedge ((C - X_1)1_{\{X_1 \leq C\}})) \\ &= \begin{cases} X_1 + X_2 & \text{für } X_1 + X_2 \leq C \\ C & \text{für } C < X_1 + X_2 \end{cases} \\ &= C \wedge (X_1 + X_2) \end{aligned}$$

Hierbei gilt:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 \leq C &\Leftrightarrow X_1 \leq C \quad \text{und} \quad X_2 \leq C - X_1 && \Leftrightarrow \delta = 3 \\ C < X_1 + X_2 &\Leftrightarrow C < X_1 \quad \text{oder} \quad (C \geq X_1 \quad \text{und} \quad C - X_1 < X_2) && \Leftrightarrow \delta \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Somit folgt für die Summe $Z_1 + Z_2$:

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= X_1 + X_2 && \Leftrightarrow \delta = 3 \\ Z_1 + Z_2 &= C && \Leftrightarrow \delta \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Diese Summen werden später eine wichtige Rolle spielen.

Wir betrachten das Modell für zwei Spezialfälle:

Spezialfall $C \equiv \infty$:

Wenn $C \equiv \infty$ ist, gibt es keine Zensierung, und wir beobachten immer (X_1, X_2) . δ ist konstant 3.

Spezialfall $X_2 \equiv 0$:

Für den Fall, daß $X_2 \equiv 0$ gilt, besteht unser Vektor nur aus einer Variablen, die zweite Komponente ist Null. Dies bedeutet, wir haben X_1 zensiert durch C , was dem eindimensionalen Rechtszensierungsmodell entspricht, das von Kaplan und Meier (1958) schon untersucht wurde. Für den Indikator δ sind dann nur die Werte 3 (keine Zensierung) und 1 (Zensierung) möglich.

Verallgemeinerung des Modells:

Das in diesem Kapitel vorgestellte Modell läßt sich auch auf den k -dimensionalen Fall erweitern. Dann wird der Vektor der Lebensdauern $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ durch die davon unabhängige Variable C zensiert und die beobachtbaren Zufallsvariablen sind:

$$Z_1 = X_1 \wedge C, Z_2 = X_2 \wedge ((C - X_1)1_{\{X_1 \leq C\}}), \dots, Z_k = X_k \wedge \left(\left(C - \sum_{i=1}^{k-1} X_i \right) 1_{\{\sum_{i=1}^{k-1} X_i \leq C\}} \right)$$

und

$$\delta = 1 + 1_{\{X_1 \leq C\}} + \dots + 1_{\{\sum_{i=1}^k X_i \leq C\}}.$$

Dies bedeutet, daß nur im Fall $\delta = k + 1$ alle X_i beobachtet werden und im Fall $\delta = j$ mit $j \in \{1, \dots, k\}$ die ersten $j - 1$ Z_i den X_i entsprechen, während X_j zensiert wird. Alle Z_i mit $i > j$ werden auf Null gesetzt.

Die in dieser Arbeit angestellten Überlegungen lassen sich leicht auf dieses allgemeinere Modell übertragen. Wir haben uns auf den Fall $k = 2$ beschränkt, da er in der Praxis die größte Relevanz besitzt und die Notationen übersichtlicher bleiben.

3 Notationen und Bezeichnungen

Wir tragen hier einige Bezeichnungen zusammen, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit verwenden werden.

3.1 Verteilungen

Wir benutzen folgende Bezeichnungen für die Verteilungen der beobachtbaren Zufallsvariablen:

$$\begin{aligned}(Z_1, Z_2) &\sim H \\ (Z_1, Z_2, \delta) &\sim H_v\end{aligned}$$

Mit einem unteren Index werden bei mehrdimensionalen Verteilungen die entsprechenden Marginalverteilungen kenntlich gemacht. So steht F_1 für die Verteilung von X_1 , H_1 für die Verteilung von Z_1 usw. Im Sinne dieser Notation ist unter F_s die Verteilung der Summe der Komponenten, also von $X_1 + X_2$, zu verstehen. Subverteilungen werden durch eine Tilde und einen oberen Index beschrieben, wobei der obere Index angibt, welcher Zensierungsfall gemeint ist. Dazu ein paar Beispiele:

$$\begin{aligned}\tilde{H}^3(t_1, t_2) &= P(Z_1 \leq t_1, Z_2 \leq t_2, \delta = 3) \\ \tilde{H}_1^1(t) &= P(Z_1 \leq t, \delta = 1)\end{aligned}$$

Um die Notation zu vereinfachen, haben wir eine Ausnahme gemacht, und zwar haben wir bei der Subverteilung zu $\delta \in \{1, 2\}$ den oberen Index weggelassen. Der einzige Fall, bei dem dies auftritt, ist bei der Verteilung der Summe:

$$\tilde{H}_s(t) = P(Z_1 + Z_2 \leq t, \delta \in \{1, 2\})$$

Die empirischen Analoga dieser (Sub-)Verteilungen zum Stichprobenumfang n sind mit einem (zusätzlichen) Index n versehen.

Bei den auftretenden Verteilungen und Verteilungsfunktionen betrachten wir häufiger linksseitige Grenzwerte, z.B. in der Form $F_s(t-)$ oder als obere Integralgrenze $\int_0^{t-} f(x)G(dx)$. Obwohl die Verteilungen stetig sind, lassen wir die linksseitigen Grenzwerte stehen, da dies bei empirischen Verteilungen eine Rolle spielt und wir öfter empirische und theoretische Größen ineinander transformieren.

3.2 Ordnungsgrößen

Gelegentlich gehen wir von den zweidimensionalen Vektoren zu eindimensionalen Variablen über, die wir dann der Größe nach sortieren. Die zugehörigen Ordnungsstatistiken machen wir durch entsprechende Indizierung kenntlich. So steht z.B. $(Z_1 + Z_2)_{i:n}$ für die i -t kleinste Größe im Sample $Z_{11} + Z_{21}, \dots, Z_{1n} + Z_{2n}$. Die Konkomitanten dürfen bei dieser Umindizierung nicht verlorengehen. Deshalb beschreibt $\delta_{i:n}$ die Konkomitante, welche zu dem Vektor gehört, der zur i -ten Ordnungsstatistik führt.

3.3 Mengen

Mit $\mathbb{R}_+^2$ bezeichnen wir den nichtnegativen Quadranten im $\mathbb{R}^2$. Das heißt,

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \geq 0\}.$$

Die Borel- σ -Algebra über $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{B}^*$ und im zweidimensionalen entsprechend $\mathbb{B}_2^*$.

3.4 Notationsvereinfachungen

In den Beweisen haben wir zum Teil der Übersichtlichkeit wegen die Bezeichnungen vereinfacht. Im folgenden werden wir erklären, wie sie zu verstehen sind.

Häufig betrachten wir Mehrfachsummen, bei denen wir nach den verschiedenen Indexkombinationen unterscheiden müssen. Wenn dabei zum Beispiel eine Dreifachsumme der Art $\sum_i \sum_{\neq j} \sum_{\neq k}$ steht, dann meint dies die Summation über die Variablen, deren Indizes paarweise verschieden sind, d.h. hier $i \neq j, i \neq k, j \neq k$. Die Summation $\sum_i \sum_{\neq j} \sum_k \sum_{\neq l}$ bedeutet, daß die Indizes i und j sowie k und l verschieden sind. Über weitere Beziehungen wird nichts ausgesagt. Im übrigen wird die Bedeutung immer aus dem Kontext ersichtlich sein.

Bei der Integration bzgl. der zweidimensionalen Subverteilung $\tilde{H}^3$ werden wir uns öfter auf den Bereich $\{(z_1, z_2) : z_1 + z_2 \leq a_n\}$ für ein $a_n > 0$ beschränken. Dies schreiben wir in der abkürzenden Form:

$$\int 1_{\{(z_1, z_2) : z_1 + z_2 \leq a_n\}} f(z_1, z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) = \int_0^{a_n} f(z_1, z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)$$

4 Herleitung und erste Analyse zweier Schätzer

In diesem Kapitel werden wir zunächst für die Zielgröße $\int \varphi(x_1, x_2) Fd(x_1, x_2)$ zwei Identifizierungsgleichungen herleiten. Dabei handelt es sich um Darstellungen der interessierenden Größe, in denen nur noch Verteilungen und Subverteilungen von beobachtbaren Zufallsvariablen vorkommen. Davon ausgehend, können wir dann zwei Schätzer herleiten, die wir anschließend näher untersuchen. Als erstes betrachten wir dabei den Spezialfall der Schätzung der Verteilungsfunktion und machen uns daran die Funktionsweise der beiden Schätzer klar. Im darauf folgenden Abschnitt weisen wir einige wünschenswerte Eigenschaften unserer Schätzer nach. Im Abschnitt 4.5 führen wir die Unterschiede zwischen den beiden Schätzern auf und machen deutlich, warum wir einen von beiden vorziehen. Im letzten Abschnitt des Kapitels gehen wir auf die bisher in der Literatur vorgeschlagenen Schätzer ein.

4.1 Identifizierungsgleichungen

Wir werden die uns interessierende Größe

$$\int \varphi(x_1, x_2) Fd(x_1, x_2)$$

in einen Ausdruck umschreiben, in den nur noch Verteilungen und Subverteilungen von Zufallsvariablen eingehen, die wir beobachten. Dies ermöglicht uns dann die Herleitung eines Schätzers. Wir werden dies auf zwei unterschiedliche Arten realisieren.

Dazu benötigen wir zunächst einige Zusammenhänge zwischen den Verteilungen, die auf der Unabhängigkeit zwischen (X_1, X_2) und C beruhen. Wir führen sie im folgenden auf. Für $t, t_1, t_2 \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} 1 - H_s(t) &= P(Z_1 + Z_2 > t) \\ &= P((X_1 + X_2) \wedge C > t) \\ &= P(X_1 + X_2 > t, C > t) \\ &= P(X_1 + X_2 > t)P(C > t) \\ &= (1 - F_s(t))(1 - G(t)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} 1 - H_1(t) &= P(Z_1 > t) \\ &= P(C \wedge X_1 > t) \\ &= P(C > t, X_1 > t) \\ &= P(C > t)P(X_1 > t) \\ &= (1 - G(t))(1 - F_1(t)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^3(t_1, t_2) &= P(Z_1 \leq t_1, Z_2 \leq t_2, \delta = 3) \\
&= P(Z_1 \leq t_1, Z_2 \leq t_2, X_1 + X_2 \leq C) \\
&= P(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, X_1 + X_2 \leq C) \\
&= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} (1 - G((x_1 + x_2)-)) Fd(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_s(t) &= P(Z_1 + Z_2 \leq t, \delta \in \{1, 2\}) \\
&= P(Z_1 + Z_2 \leq t, C < X_1 + X_2) \\
&= P(C \leq t, C < X_1 + X_2) \\
&= \int_0^t (1 - F_s(y)) G(dy)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_1^1(t) &= P(Z_1 \leq t, \delta = 1) \\
&= P(Z_1 \leq t, C < X_1) \\
&= P(C \leq t, C < X_1) \\
&= \int_0^t (1 - F_1(y)) G(dy)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

An dieser Stelle weisen wir darauf hin, daß unter der Annahme der Stetigkeit von F , F_s und G die oben aufgeführten (Sub-)Verteilungen ebenfalls stetig sind.

Diese Gleichungen ermöglichen es uns, $\int \varphi(x_1, x_2) Fd(x_1, x_2)$ umzuschreiben. Wir gehen davon aus, daß die auftretenden Nenner nicht Null sind (siehe auch Bemerkung 5.6). Mit (4.3) kommen wir zu:

$$\begin{aligned}
\int \varphi(x_1, x_2) Fd(x_1, x_2) &= \int \varphi(x_1, x_2) \frac{1}{1 - G((x_1 + x_2)-)} \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \\
&= \int \varphi(x_1, x_2) \exp \left\{ \ln \left(\frac{1}{1 - G((x_1 + x_2)-)} \right) \right\} \tilde{H}^3 d(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Den logarithmischen Term können wir auf zwei Arten bearbeiten. Wir werden sie nacheinander darstellen.

Mit (4.1) und (4.4) folgt für eine stetige Verteilung G und $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\ln \left(\frac{1}{1 - G(x)} \right) &= \int_0^x \frac{1}{1 - G(y)} G(dy) \\
&= \int_0^x \frac{1}{(1 - G(y))(1 - F_s(y))} \tilde{H}_s(dy) \\
&= \int_0^x \frac{1}{1 - H_s(y)} \tilde{H}_s(dy)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\int \varphi(x_1, x_2) Fd(x_1, x_2) = \int \varphi(x_1, x_2) \exp \left\{ \int_0^{(x_1+x_2)-} \frac{1}{1-H_s(y)} \tilde{H}_s(dy) \right\} \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \quad (4.7)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung stehen nur noch Verteilungen und Subverteilungen von beobachtbaren Größen, so daß dies die erste Identifizierungsgleichung darstellt. Mittels der Gleichungen (4.2) und (4.5) gilt für $x \geq 0$ und eine stetige Verteilung G für den Logarithmus:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1}{1-G(x)} \right) &= \int_0^x \frac{1}{1-G(y)} G(dy) \\ &= \int_0^x \frac{1}{(1-G(y))(1-F_1(y))} \tilde{H}_1^1(dy) \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-H_1(y)} \tilde{H}_1^1(dy) \end{aligned}$$

Dadurch kommen wir auf die zweite Identifizierungsgleichung:

$$\int \varphi(x_1, x_2) Fd(x_1, x_2) = \int \varphi(x_1, x_2) \exp \left\{ \int_0^{(x_1+x_2)-} \frac{1}{1-H_1(y)} \tilde{H}_1^1(dy) \right\} \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \quad (4.8)$$

4.2 Herleitung von zwei Schätzern

Wir entwickeln aus den beiden Identifizierungsgleichungen aus dem letzten Abschnitt jetzt zwei Schätzer, indem wir die vorkommenden (Sub-)Verteilungen der beobachtbaren Zufallsvariablen durch die entsprechenden empirischen (Sub-)Verteilungen ersetzen. Wir beginnen mit der ersten Identifizierungsgleichung (4.7):

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n &= \int \varphi(x_1, x_2) \exp \left\{ \int_0^{(x_1+x_2)-} \frac{1}{1-H_{s_n}(y)} \tilde{H}_{s_n}(dy) \right\} \tilde{H}_n^3 d(x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \exp \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{1j}+Z_{2j}\}}} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \prod_{j=1}^n \exp \left\{ \frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{1j}+Z_{2j}\}}} \right\} \end{aligned}$$

Man beachte, daß der Nenner wegen des Indikators im Zähler nie Null werden kann.

Mit der Approximation $x \approx \ln(1+x)$ für x in der Nähe von Null kommen wir auf den Schätzer:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \prod_{j=1}^n \left\{ 1 + \frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{1j}+Z_{2j}\}}} \right\}$$

Dies läßt sich natürlich auch wieder als empirisches Integral schreiben:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \prod_{j=1}^n \left\{ 1 + \frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{1j}+Z_{2j}\}}} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \ln \left(1 + \frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{1j}+Z_{2j}\}}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \exp \left\{ \sum_{j=1}^n 1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}} \times \right. \\ &\quad \left. \ln \left(1 + \frac{1}{n(1 - H_{s_n}(Z_{1j} + Z_{2j}))} \right) \right\} \\ &= \int \varphi(z_1, z_2) \exp \left\{ n \int_0^{(z_1+z_2)-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1 - H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \right\} \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Wenn wir mit (4.8) ansetzen, folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n &= \int \varphi(x_1, x_2) \exp \left\{ \int_0^{(x_1+x_2)-} \frac{1}{1 - H_{1_n}(y)} \tilde{H}_{1_n}^1(dy) \right\} \tilde{H}_n^3 d(x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \exp \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1_{\{\delta_j=1, Z_{1j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k} \leq Z_{1j}\}}} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \prod_{j=1}^n \exp \left\{ \frac{1_{\{\delta_j=1, Z_{1j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k} \leq Z_{1j}\}}} \right\} \end{aligned}$$

Da wir hier nicht ausschließen können, daß der Nenner Null wird, ersetzen wir das Kleingleichzeichen durch ein echtes Kleinerzeichen. Außerdem führen wir wieder die Approximation $x \approx \ln(1+x)$ durch und erhalten:

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \prod_{j=1}^n \left\{ 1 + \frac{1_{\{\delta_j=1, Z_{1j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k} < Z_{1j}\}}} \right\}$$

Analog zu S_n gilt für T_n :

$$T_n = \int \varphi(z_1, z_2) \exp \left\{ n \int_0^{(z_1+z_2)-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1 - H_{1_n}(w-))} \right) \tilde{H}_{1_n}^1(dw) \right\} \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2)$$

Das Ersetzen von x durch $\ln(1+x)$ hat neben der dadurch einfacheren Form unserer Schätzer zwei Gründe. Zum einen ist dies der Herleitung des Kaplan-Meier Schätzers im eindimensionalen Fall nachempfunden und führt dazu, daß unsere Schätzer im Spezialfall zum Kaplan-Meier Schätzer werden. Zum anderen hat der Logarithmus für größere Werte einen dämpfenden Effekt, da $\ln(1+x)$ auf $\mathbb{R}_0^+$ langsamer wächst als x . Dies wirkt sich in Simulationen mit endlichen Stichprobenumfängen positiv aus. Für die Asymptotik spielt die Approximation keine Rolle.

Die beiden hergeleiteten Schätzer lassen sich auch noch auf eine andere Art motivieren. In beiden Fällen starten wir mit der Gleichung (4.6). Mit ihr wird das Problem darauf verlagert, die Verteilungsfunktion G zu schätzen. Dies haben wir auf zwei unterschiedliche Weisen realisiert.

Wenn die interessierende Variable C ist, dann können wir sie uns zensiert durch $X_1 + X_2$ vorstellen. Das heißt, wir haben die zwei Fälle:

- $C < X_1 + X_2$ und wir beobachten C ($\delta \in \{1, 2\}$).
- $C \geq X_1 + X_2$ und C wird zensiert ($\delta = 3$).

In diesem Kontext ist die beobachtbare Variable $C \wedge (X_1 + X_2) = Z_1 + Z_2$. Wenn wir auf dieser Grundlage den Kaplan-Meier Schätzer für G bestimmen, ist er gegeben durch:

$$1 - \hat{G}_n(y) = \prod_{j=1}^n \left\{ \frac{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k} + Z_{2k} \leq Z_{1j} + Z_{2j}\}}}{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k} + Z_{2k} \leq Z_{1j} + Z_{2j}\}} + 1} \right\}^{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j} + Z_{2j} \leq y\}}}$$

Dies in die Gleichung (4.6) eingesetzt und $\tilde{H}^3$ durch sein empirisches Analogon ersetzt, ergibt S_n . Zusammenfassend können wir festhalten: Indem wir den Kaplan-Meier Schätzer für G basierend auf den $Z_{1i} + Z_{2i}$ in die Gleichung (4.6) einsetzen, kommen wir zu S_n . Diese Idee findet sich in ähnlicher Form schon bei Burke (1988) bzw. bei Wang und Wells (1998).

Wenn wir dagegen unseren Blick auf die erste Komponente richten, dann können wir uns C durch X_1 zensiert vorstellen. Hier sind die beiden Fälle möglich:

- $C < X_1$ und wir beobachten C ($\delta = 1$).
- $C \geq X_1$ und C wird zensiert ($\delta \in \{2, 3\}$).

Das bedeutet, hier ist das Minimum gegeben durch $Z_1 = C \wedge X_1$. Wenn wir damit den Kaplan-Meier Schätzer bestimmen, kommen wir auf:

$$1 - \hat{G}_n(y) = \prod_{j=1}^n \left\{ \frac{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k} \leq Z_{1j}\}}}{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k} \leq Z_{1j}\}} + 1} \right\}^{1_{\{\delta_j = 1, Z_{1j} \leq y\}}}$$

Wenn wir dies und $\tilde{H}_n^3$ in (4.6) einsetzen, erhalten wir bis auf die Modifikation durch das Ersetzen des Kleingleichzeichens durch das Kleinerzeichen T_n . Also entsteht dieser Schätzer bis auf die Modifikation dadurch, daß wir den Kaplan-Meier Schätzer basierend auf den Z_{1i} verwenden und $\tilde{H}^3$ empirisch schätzen.

4.3 Schätzer für die Verteilungsfunktion

Wir setzen für φ den Indikator $1_{[0,t_1] \times [0,t_2]}$ mit $t_1, t_2 \geq 0$ ein und erhalten somit Schätzer für die Verteilungsfunktion an der Stelle (t_1, t_2) . Da unsere Schätzer rein diskret sind und nur den Datenvektoren Masse geben, müssen wir nur das Gewicht, das der i -te Datenvektor bekommt, berechnen.

Dazu führen wir jetzt bei S_n Ordnungsgrößen ein. Aus dem Sample $(Z_{11}, Z_{21}), \dots, (Z_{1i}, Z_{2i}), \dots, (Z_{1n}, Z_{2n})$ entsteht der eindimensionale Datensatz $Z_{11} + Z_{21}, \dots, Z_{1i} + Z_{2i}, \dots, Z_{1n} + Z_{2n}$, indem wir bei jedem Vektor die beiden Komponenten addieren. Dieses Sample können wir dann der Größe nach sortieren, und wir bezeichnen die i -te Ordnungsgröße mit $(Z_1 + Z_2)_{i:n}$. Die dazugehörige Konkomitante ist $\delta_{i:n}$. Das Gewicht, welches das i -te kleinste Datum erhält, ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 W_{in} &= \frac{1}{n} 1_{\{\delta_{i:n}=3\}} \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j} + Z_{2j} < (Z_1 + Z_2)_{i:n}\}}}{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k} + Z_{2k} \leq Z_{1j} + Z_{2j}\}}} \right) \\
 &= \frac{1}{n} 1_{\{\delta_{i:n}=3\}} \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j} + Z_{2j} < (Z_1 + Z_2)_{i:n}\}}}{n - \text{Rang}(Z_{1j} + Z_{2j})} \right) \\
 &= \frac{1}{n} 1_{\{\delta_{i:n}=3\}} \prod_{j=1}^n \left(\frac{n - \text{Rang}(Z_{1j} + Z_{2j}) + 1}{n - \text{Rang}(Z_{1j} + Z_{2j})} \right)^{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j} + Z_{2j} < (Z_1 + Z_2)_{i:n}\}}} \\
 &= \frac{1}{n} 1_{\{\delta_{i:n}=3\}} \prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{n - j + 1}{n - j} \right)^{1_{\{\delta_{j:n} \neq 3\}}} \\
 &= 1_{\{\delta_{i:n}=3\}} \frac{1}{n - i + 1} \prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{n - j}{n - j + 1} \right)^{1_{\{\delta_{j:n}=3\}}}
 \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus der Tatsache, daß

$$\prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{n - j + 1}{n - j} \right)^{1_{\{\delta_{j:n} \neq 3\}}} \left(\frac{n - j + 1}{n - j} \right)^{1_{\{\delta_{j:n}=3\}}} = \frac{n}{n - i + 1}.$$

Wenn wir uns die Gewichte ansehen, stellen wir fest, daß sie den Kaplan-Meier Gewichten aus dem eindimensionalen Fall entsprechen (siehe Stute (1995)). Unzensiert bedeutet hier $\delta = 3$, anderenfalls liegt Zensierung vor. Nur Daten, bei denen beide Komponenten unzensiert sind, bekommen Masse. Die Verteilung der Massen kann deshalb folgendermaßen beschrieben werden:

1. Für die Daten bilden wir die Summen der Komponenten und erhalten dadurch eindimensionale Größen.
2. Für diese werden die Kaplan-Meier Gewichte verteilt, wie im eindimensionalen Fall, wobei 'unzensiert' bedeutet, daß beide Komponenten der Originaldaten unzensiert sind, andernfalls liegt Zensierung vor.
3. Die so verteilten Massen gehören zu den jeweiligen Vektoren.

Für den Schätzer T_n ist die Masse, die der (zeitlich) i -te Datenvektor erhält, gegeben durch:

$$\hat{W}_{in} = \frac{1}{n} 1_{\{\delta_i=3\}} \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{1_{\{\delta_j=1, Z_{1j} < Z_{1i} + Z_{2i}\}}}{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k} < Z_{1j}\}}} \right)$$

Hier läßt sich die Massenverteilung nicht so schön beschreiben, wie bei S_n , da hier die ersten Komponenten der Vektoren mit den Summen der Komponenten verglichen werden. Wir können lediglich mit Hilfe der Ordnungsgrößen der ersten Komponenten $Z_{1(j:n)}$ und den dazugehörigen Konkomitanten $\delta_{j:n}$ die Gewichte umschreiben in:

$$\begin{aligned} \hat{W}_{in} &= \frac{1}{n} 1_{\{\delta_i=3\}} \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{1_{\{\delta_j=1, Z_{1j} < Z_{1i} + Z_{2i}\}}}{n - \text{Rang}(Z_{1j}) + 1} \right) \\ &= \frac{1}{n} 1_{\{\delta_i=3\}} \prod_{j=1}^n \left(\frac{n - \text{Rang}(Z_{1j}) + 2}{n - \text{Rang}(Z_{1j}) + 1} \right)^{1_{\{\delta_j=1, Z_{1j} < Z_{1i} + Z_{2i}\}}} \\ &= \frac{1}{n} 1_{\{\delta_i=3\}} \prod_{j=1}^n \left(\frac{n - j + 2}{n - j + 1} \right)^{1_{\{\delta_{j:n}=1, Z_{1(j:n)} < Z_{1i} + Z_{2i}\}}} \end{aligned}$$

Wir sehen, daß auch hier nur Vektoren eine Masse erhalten, deren beide Komponenten unzensiert sind. Um die Masse, die dem i -ten Vektor zugeteilt wird, zu bestimmen, müssen wir folgendermaßen vorgehen:

1. Ist $\delta_i \neq 3$, so ist die Masse Null. Anderenfalls berechnen wir $Z_{1i} + Z_{2i}$.
2. Für den Wert $Z_{1i} + Z_{2i}$ bilden wir das Produkt entsprechend der obigen Vorschrift über alle geordneten Z_1 Größen, die kleiner diesem Wert sind und für die der entsprechende δ -Wert gleich 1 ist.
3. Das berechnete Produkt dividieren wir durch n und erhalten das Gewicht.

4.4 Eigenschaften der Schätzer

Im folgenden führen wir einige Eigenschaften, die beiden Schätzern gemein sind, auf.

Monotonie

Da beide Schätzer für die Verteilungsfunktion diskret sind und den Datenvektoren nicht-negative Massen geben, sind sie per Konstruktion in (t_1, t_2) monoton wachsend.

Explizite Form

Beide Schätzer sind in expliziter Form gegeben und lassen sich leicht berechnen.

Spezialfall $C \equiv \infty$

Im Falle $C \equiv \infty$ liegt keine Zensierung vor; wir beobachten immer (X_1, X_2) . Dann tritt der Fall $\delta \in \{1, 2\}$ nie auf, und es gilt immer $\delta = 3$. Dadurch sind die Gewichte in

beiden Fällen konstant $1/n$, und unsere Schätzer für die Verteilungsfunktion werden zur empirischen Verteilungsfunktion F_n bzw. allgemeiner:

$$\begin{aligned} S_n &= T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X_{1i}, X_{2i}) \\ &= \int \varphi(x_1, x_2) F_n d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Spezialfall $X_2 \equiv 0$

Falls $X_2 \equiv 0$ gilt, haben wir es im Grunde genommen mit einem eindimensionalen Problem zu tun. Da hier nur die Fälle $\delta = 3$ und $\delta = 1$ auftreten können und $Z_2 \equiv 0$ gilt, werden bei S_n die Gewichte nach den Rängen der Z_{1i} verteilt. Damit entspricht der Algorithmus der Massenverteilung exakt dem im eindimensionalen Fall des Kaplan-Meier Schätzers für $F_1, \hat{F}_n$. Da es in dieser Situation nur Sinn macht, eine eindimensionale Funktion φ zu betrachten, gilt für unseren Schätzer S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3\}} \varphi(Z_{1i}) \prod_{j=1}^n \left\{ 1 + \frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j} < Z_{1i}\}}}{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k} \leq Z_{1j}\}}} \right\} \\ &= \int \varphi(x) \hat{F}_n(dx) \end{aligned}$$

Für T_n gilt entsprechend:

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3\}} \varphi(Z_{1i}) \prod_{j=1}^n \left\{ 1 + \frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j} < Z_{1i}\}}}{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k} < Z_{1j}\}}} \right\}$$

Bis auf die kleine Modifikation im Nenner, mit der wir im allgemeinen Fall eine mögliche Division durch Null verhindert haben, entspricht T_n dem Kaplan-Meier Integral.

4.5 Vergleich zwischen den Schätzern

Nach den Gemeinsamkeiten wollen wir nun Unterschiede zwischen den Schätzern herausarbeiten. Da wir die Schätzer durch verschiedene Herleitungen entwickelt haben, wollen wir unser Augenmerk zunächst darauf richten.

Wir haben gesehen, daß die beiden Schätzer zustande kommen, daß wir unterschiedliche Kaplan-Meier Schätzer für die Verteilung G benutzen. Dabei bleibt festzuhalten, daß wir beim zweiten Ansatz im Falle $\delta = 2$ C als zensiert ansehen. Dies ist für die erste Komponente richtig, allerdings beobachten wir in unserem Modell bei diesem Zensierungsfall in der zweiten Komponente $C - X_1$, so daß wir mit der ersten Komponente, X_1 , den Wert von C kennen. Das heißt, wir sehen C als zensiert an, obwohl wir

es in dieser Situation beobachten. Dies liegt daran, daß wir beim zweiten Ansatz nur die erste Komponente bei der Schätzung für G berücksichtigen. Dies wird bei der Herleitung von S_n vermieden und stellt somit intuitiv betrachtet einen besseren Zugang dar.

Im folgenden werden wir eine Datensituation konstruieren, die gewisse Schwächen von T_n aufzeigt.

Der Datensatz zerfalle in zwei Hälften. O.B.d.A sei n gerade. Für die eine Hälfte - wir nehmen wiederum o.B.d.A. an, dies sei $(Z_{11}, Z_{21}), \dots, (Z_{1(n/2)}, Z_{2(n/2)})$ - gelte $\delta = 3$ und für den anderen Teil $(Z_{1(n/2+1)}, Z_{2(n/2+1)}), \dots, (Z_{1n}, Z_{2n})$ sei jeweils $\delta = 1$. Außerdem soll gelten:

$$\begin{aligned} Z_{1i} &< Z_{1j} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n/2 < j \leq n \\ Z_{1i} + Z_{2i} &> Z_{1j} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n/2 < j \leq n \end{aligned}$$

Dann gilt für die Gewichte

$$\hat{W}_{in} = 0 \quad \text{für alle } n/2 < i \leq n$$

und für $1 \leq i \leq n/2$:

$$\begin{aligned} \hat{W}_{in} &= \frac{1}{n} 1_{\{\delta_i=3\}} \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{1_{\{\delta_j=1, Z_{1j} < Z_{1i} + Z_{2i}\}}}{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k} < Z_{1j}\}}} \right) \\ &= \frac{1}{n} \prod_{j=\frac{n}{2}+1}^n \left(1 + \frac{1_{\{Z_{1j} < Z_{1i} + Z_{2i}\}}}{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k} < Z_{1j}\}}} \right) \\ &= \frac{1}{n} \prod_{j=\frac{n}{2}+1}^n \left(1 + \frac{1}{n - \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_{1k} < Z_{1j}\}}} \right) \\ &= \frac{1}{n} \prod_{j=\frac{n}{2}+1}^n \left(1 + \frac{1}{n - (j - 1)} \right) \\ &= \frac{1}{n} \prod_{j=\frac{n}{2}}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n - j} \right) \\ &= \frac{1}{n} \prod_{j=\frac{n}{2}}^{n-1} \frac{n - j + 1}{n - j} \\ &= \frac{n/2 + 1}{n} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Die Masse eines Datums aus der ersten Hälfte ist somit immer größer als $1/2$ und die Gesamtmasse, die verteilt wird, ist $\frac{n}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$. Somit könnte theoretisch jeder Wert überschritten werden. Sicherlich ist die Datensituation konstruiert, dennoch ist sie nicht völlig abwegig. Die großen Z_1 -Werte sind im Gegensatz zu den kleinen Z_1 -Werten

zensiert, was plausibel ist, da große X_1 -Werte eher in Gefahr sind, zensiert zu werden. Somit ist zumindest denkbar, daß Teile eines Datensatzes diese Struktur besitzen. Dies macht deutlich, daß der Schätzer für die Verteilungsfunktion Werte größer 1 annehmen kann, was sich auch in den Simulationen bestätigt hat. Bei S_n ist dies nicht möglich, da hier die Gewichte den Kaplan-Meier Gewichten für die $Z_{1i} + Z_{2i}$ entsprechen. Somit ist hier die Gesamtmasse immer kleiner oder gleich 1.

Auch bei einem Vergleich auf Simulationsebene zwischen S_n und T_n hinterließ der Schätzer S_n einen besseren Eindruck. Wir haben dazu Monte-Carlo Simulationen durchgeführt, mit deren Hilfe wir für die Schätzer den Bias und die Varianz schätzen konnten. Bei einem Vergleich bezüglich dieser Werte schnitt S_n besser ab. Die Ergebnisse finden sich in tabellarischer Form in Abschnitt 7.5.

Aus den in diesem Abschnitt angeführten Gründen haben wir uns entschieden, den Schätzer S_n dem Schätzer T_n vorzuziehen, und werden die asymptotischen Aussagen für S_n herleiten.

4.6 Vergleich mit Schätzern aus der Literatur

Multivariate Zensierungsmodelle wurden in den letzten Jahren mit steigendem Interesse untersucht. Man muß jedoch die betrachteten Modelle bezüglich ihres Zensierungsmechanismus unterscheiden. Zunächst wurde als Verallgemeinerung des eindimensionalen Falles das Modell einer bivariaten Lebensdauer (X_1, X_2) zensiert durch einen davon unabhängigen Vektor (C_1, C_2) betrachtet. Dazu gibt es unter anderem Arbeiten von Campbell und Földes (1982), Tsai, Leurgans und Crowley (1986), Burke (1988), Dabrowska (1988) und van der Laan (1996). In unserem Kontext ist $(C_1, C_2) = (C, (C - X_1)1_{\{X_1 \leq C\}})$, was der Unabhängigkeitsannahme widerspricht. Aus diesem Grund sind deren Ergebnisse nicht auf unser Modell anwendbar. Allerdings hat Burke in seiner Arbeit die Idee entwickelt, die Schätzung von F durch geeignete Darstellung auf die Schätzung von G zu transformieren. Die äquivalente Gleichung in unserem Modell ist Gleichung (4.6). Wang und Wells (1998) haben später diesen Ansatz aufgegriffen.

Wenn wir das Modell umschreiben in der Form, daß der Vektor der Lebensdauern $(X_1, X_1 + X_2)$ zensiert wird durch (C, C) , dann könnten wir die oben genannten Arbeiten heranziehen, um die Verteilung von $(X_1, X_1 + X_2)$ zu schätzen und daraus einen Schätzer für F zu konstruieren. Da der zensierende Vektor aus identischen Komponenten besteht, spricht man auch von univariater oder homogener Zensierung. Damit beschäftigen sich unter anderem auch Lin und Ying (1993). Wenn man diesen Weg einschlägt, werden jedoch die Besonderheiten des Modells, wie zum Beispiel die Tatsache, daß die zweite Komponente des Vektors $(X_1, X_1 + X_2)$ immer größergleich der ersten Komponente ist, nicht berücksichtigt. Zudem werden sich die Schwächen der vorgeschlagenen Schätzer bei Anwendung in unserem Modell auch hier auswirken.

Eine erste mathematische Analyse unseres Modells findet sich bei Visser (1996). Statt der Verteilungsfunktion betrachtet er die Survivalfunktion. Um sie zu schätzen, zerlegt er die gemeinsame Verteilung in die Marginalverteilung von X_1 und die bedingte Verteilung von X_2 gegeben X_1 . Für diese beiden werden die Hazardfunktion und die

bedingte Hazardfunktion betrachtet. Dabei entwickelt er Maximum-Likelihood-Schätzer für $P(X_1 = k|X_1 \geq k)$ und $P(X_2 = l|X_1 = k, X_2 \geq l)$. Dieser Ansatz basiert auf der einschränkenden Annahme, daß die Verteilungen diskret sind und einen endlichen Träger besitzen. Eine tiefergehende Asymptotik des Schätzers wird nicht betrieben.

Ein allgemeinerer Ansatz findet sich bei Wang und Wells (1998). Auch hier wird die Survivalfunktion zerlegt. Mit $\Lambda_{X_2|X_1>t_1}$, der kumulativen bedingten Hazardfunktion von X_2 gegeben $X_1 > t_1$, wird folgende Gleichung, die für eine diskrete bedingte Verteilung richtig ist, benutzt:

$$\begin{aligned} P(X_1 > t_1, X_2 > t_2) &= P(X_2 > t_2|X_1 > t_1)P(X_1 > t_1) \\ &= \prod_{v \leq t_2} (1 - \Lambda_{X_2|X_1>t_1}(dv)) P(X_1 > t_1) \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung wird nun ein Schätzer abgeleitet. Für die Survivalfunktion von X_1 wird der Kaplan-Meier Schätzer eingesetzt. Wang und Wells zeigen, daß, falls für die bedingte kumulative Hazardfunktion ein Schätzer verwendet wird, der auf der Annahme der Unabhängigkeit der zensierenden Variablen, $(C, (C - X_1)1_{\{X_1 \leq C\}})$, von (X_1, X_2) beruht, wie z.B. der von Campbell und Földes, ein inkonsistenter Schätzer entsteht. Aus diesem Grund modifizieren Wang und Wells diesen Schätzer, indem sie die Daten mit $1/(1 - \hat{G}_n(Z_{1i} + v))$ gewichten. Hierbei ist $\hat{G}_n$ der Kaplan-Meier Schätzer für G basierend auf den $(Z_{1i} + Z_{2i}, \delta_i)$.

Der resultierende Schätzer der Survivalfunktion ist schwach konsistent, und für den zugehörigen standardisierten Prozeß wird auf einem Kompaktum Verteilungskonvergenz gezeigt. Für den Grenzprozeß wird jedoch keine Kovarianzformel angegeben.

Wang und Wells greifen auch den Ansatz von Burke (1988) auf und schätzen die Verteilungsfunktion G durch den Kaplan-Meier Schätzer aus den $(Z_{1i} + Z_{2i}, \delta_i)$. Dieser Schätzer unterscheidet sich von unserem S_n nur dadurch, daß bei der Herleitung im Nenner $1 - G(x_1 + x_2)$ steht, statt des linksseitigen Grenzwertes (siehe Gleichung (4.6)). Eine mathematische Untersuchung dieses Schätzers fehlt. Ein Vergleich auf Simulationsebene mit ihrem vorgeschlagenen Schätzer läßt keine eindeutige Aussage, welcher Schätzer vorzuziehen ist, zu. Bei der Auswertung ihres Schätzers ist zweimal ein Kaplan-Meier Schätzer zu berechnen, was aufwendiger ist. Bei den Simulationen wird deutlich, daß ihr Schätzer nicht die allen Survivalfunktionen zugrunde liegende Eigenschaft der Monotonie besitzt.

Lin, Sun und Ying (1999) schlagen zunächst einen Schätzer für $P(X_1 \leq t_1, X_2 > t_2)$ vor und entwickeln daraus einen für die Verteilungsfunktion:

$$\hat{F}_n(t_1, t_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1_{\{\delta_i \neq 1, Z_{1i} \leq t_1\}}}{1 - \hat{G}_n(Z_{1i})} - \frac{1_{\{Z_{1i} \leq t_1, Z_{2i} > t_2\}}}{1 - \hat{G}_n(Z_{1i} + t_2)} \right)$$

Dabei steht $\hat{G}_n$ für den Kaplan-Meier Schätzer für G , der aus den (Z_{1i}, δ_i) oder den $(Z_{1i} + Z_{2i}, \delta_i)$ berechnet wird. Für $\hat{F}_n$ wird starke Konsistenz und für den standardisierten Prozeß Verteilungskonvergenz formuliert. Sie sind in der Lage, die Kovarianz des Grenzprozesses inklusive eines konsistenten Schätzers anzugeben. Durch ihren Ansatz und die daraus resultierende Differenzstruktur des Schätzers ergeben sich jedoch Probleme. So kann es sein, daß bei festem t_1 und Erhöhen des Wertes von t_2 der Nenner im zweiten Summand kleiner wird. Das heißt, es ist möglich, daß sich der Wert von $\hat{F}_n$ über einem Bereich verändert, in dem kein Datum liegt. Das ist sicherlich ungewöhnlich, insbesondere wird der Wert des Schätzers kleiner, obwohl t_2 größer wird. Dies zeigt, daß auch dieser Schätzer nicht monoton ist. Wenn wir davon ausgehen, daß für $\hat{G}_n$ der Kaplan-Meier Schätzer basierend auf den durch X_1 zensierten C -Werten eingesetzt wird, dann wird deutlich, daß es für $\hat{F}_n$ keinen Unterschied macht, ob die zweite Komponente eines Datenvektors zensiert ist oder nicht. In diesem Fall ist es auch möglich, daß der Nenner des zweiten Summanden Null ist, was man ausschließen sollte. Wenn $\hat{G}_n$ über die $(Z_{1i} + Z_{2i}, \delta_i)$ berechnet wird, dann geht der Zensierungstyp der zweiten Komponente nur über die Gewichtsverteilung von $\hat{G}_n$ ein.

Lin, Sun und Ying führen in ihrer Arbeit auch eine Simulationsstudie durch. In Abschnitt 7.6 stellen wir sie den Ergebnissen für unseren Schätzer gegenüber. Es zeigt sich, daß die geschätzte Varianz von S_n nahezu immer kleiner ist als die von $\hat{F}_n$.

Wir haben gesehen, welche strukturellen Schwächen die vorgeschlagenen Schätzer besitzen. Insbesondere die fehlende Monotonie ist hier hervorzuheben. Durch unseren Ansatz werden diese Nachteile vermieden, und wir sind in der Lage, nicht nur für die Verteilungsfunktion, sondern für das allgemeine F -Integral, $\int \varphi dF$, einen Schätzer zu entwickeln und Verteilungskonvergenz nachzuweisen.

5 Linearisierung des Schätzers

In diesem Kapitel werden wir für unseren Schätzer eine lineare Entwicklung herleiten. Dazu benutzen wir die Theorie der U-Statistiken sowie die Hájek-Projektion. Wir werden allerdings keine fertigen Ergebnisse dieser Theorie anwenden, sondern die auftretenden Terme einzeln bearbeiten. So erhalten wir die Linearisierung unter der Forderung der Endlichkeit der zweiten Momente der führenden Terme in der linearen Entwicklung von S_n . Diese ist hinreichend, um auf die asymptotische Normalität unseres standardisierten Schätzers schließen zu können.

Als erstes haben wir die Hauptresultate dieses Kapitels formuliert. Aus dem Beweis zu Satz 5.1 haben wir die Bearbeitung der Restterme in verschiedene Lemmata ausgelagert. Am Ende des Kapitels befinden sich noch einige technische Lemmata, die wir für den Beweis benötigen. Hier haben wir insbesondere die Methode aus Stute und Wang (2000) verwendet, die es uns ermöglicht, mit den Integralen umzugehen, die bei der Integration über den Tail der Verteilung häufig Probleme bereiten.

Satz 5.1 *Unter den folgenden Endlichkeitsannahmen:*

$$\int \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) < \infty \quad (5.1)$$

$$\int \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \varphi(x_1, x_2) \gamma(x_1 + x_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \int_0^{(x_1+x_2)-} \frac{1_{\{v \leq w\}}}{(1 - H_s(v))^2} \tilde{H}_s(dv) \times \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) < \infty \quad (5.2)$$

$$\int \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \varphi(x_1, x_2) \gamma(x_1 + x_2) \times \int_0^{((z_1+z_2) \wedge (x_1+x_2)) -} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) < \infty \quad (5.3)$$

mit

$$\gamma(z) = \exp \left\{ \int_0^{z-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right\} \quad \forall z \geq 0$$

gilt für unseren Schätzer S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\ &\quad - \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1 - H_{s_n}(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\ &\quad + \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\ &\quad + o_p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

Korollar 5.2 *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.1 gilt:*

$$\sqrt{n} \left(S_n - \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Dabei bezeichnet σ^2 die Varianz eines Summanden der linearen Entwicklung aus Satz 5.1.

Beweis:

Da wir in Satz 5.1 S_n als ein arithmetisches Mittel von i.i.d. Daten plus einem Rest dargestellt haben, folgt die Behauptung mit dem Zentralen Grenzwertsatz und Cramér Slutsky (siehe Korollar 8.6.6 aus Gänssler und Stute (1977)). Die zentrierende Größe ist der Erwartungswert des ersten Summanden, da der zweite und der dritte Summand identische Erwartungswerte haben, die sich aufgrund des unterschiedlichen Vorzeichens gegenseitig wegheben.

□

Bemerkung 5.3 *Bei der zentrierenden Größe handelt es sich nach Gleichung (4.7) um die Größe von Interesse.*

In die Varianz σ^2 gehen nur (Sub-)Verteilungen von beobachtbaren Größen ein, so daß durch Einsetzen der empirischen Analoga ein Ad-hoc-Schätzer für σ^2 zur Verfügung steht.

Bemerkung 5.4 *Die Forderungen (5.1) bis (5.3) stellen die Quadratintegrierbarkeit der führenden Terme der Linearisierung sicher. Die letzten beiden entsprechen der Quadratintegrierbarkeit zweier Hájek-Projektionen, die von U-Statistiken herkommen. Dies stellt eine schwächere Forderung dar als die Quadratintegrierbarkeit der zugehörigen Kerne der U-Statistiken (siehe dazu auch Bemerkung 6.1). Wir kommen hier mit dieser schwächeren Forderung aus, da wir keine allgemeinen Resultate über U-Statistiken benutzen, sondern statt dessen die Terme einzeln bearbeiten (siehe Lemma 5.9 und 5.10).*

Bemerkung 5.5 *Aufgrund der Quadratintegrierbarkeit sind insbesondere auch die ersten Momente der führenden Terme und damit das Integral*

$$\int |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)$$

endlich.

Bemerkung 5.6 *Die Forderung der Endlichkeit der Integrale legt nahe, daß $G^{-1}(1)$ größergleich $F_s^{-1}(1)$ sein sollte. Anderenfalls ist auch eine konsistente Schätzung von F auf ganz $\mathbb{R}_+^2$ nicht zu erwarten, da C auf die Summe wirkend dann dafür sorgt, daß gewisse Werte von (X_1, X_2) nie beobachtet werden. Die Bedingung ist trivialerweise erfüllt, falls $G^{-1}(1) = \infty$ ist.*

Beweis von Satz 5.1:
Für unseren Schätzer

$$S_n = \int \varphi(z_1, z_2) \exp \left\{ n \int_0^{(z_1+z_2)^-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1-H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \right\} \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2)$$

wenden wir auf den Exponentialterm die Taylorformel an:

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ n \int_0^{(z_1+z_2)^-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1-H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \right\} \\ &= \gamma(z_1 + z_2) \left[1 + \left(n \int_0^{(z_1+z_2)^-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1-H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \right] \\ & \quad + \frac{1}{2} \exp(\Delta_n(z_1 + z_2)) \left(n \int_0^{(z_1+z_2)^-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1-H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \right. \\ & \quad \left. - \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \end{aligned}$$

mit

$$\Delta_n(z_1 + z_2) \quad \text{zwischen} \quad n \int_0^{(z_1+z_2)^-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1-H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \quad \text{und} \quad \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw).$$

Damit folgt für den Schätzer:

$$\begin{aligned} S_n &= \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\ & \quad + \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \left(n \int_0^{(z_1+z_2)^-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1-H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \right. \\ & \quad \left. - \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\ & \quad + \int \varphi(z_1, z_2) \frac{1}{2} \exp(\Delta_n(z_1 + z_2)) \left(n \int_0^{(z_1+z_2)^-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1-H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \right. \\ & \quad \left. - \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \left(n \int_0^{(z_1+z_2)^-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1-H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \right. \\
&\quad \quad \left. - \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1-H_{s_n}(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) \right) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \left(\int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1-H_{s_n}(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) \right. \\
&\quad \quad \left. - \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + \int \varphi(z_1, z_2) \frac{1}{2} \exp(\Delta_n(z_1 + z_2)) \left(n \int_0^{(z_1+z_2)^-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1-H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \right. \\
&\quad \quad \left. - \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
&= A_n + B_n + C_n + D_n
\end{aligned}$$

Diese vier Terme werden wir einzeln bearbeiten. Während A_n bereits eine Summe von i.i.d. Größen darstellt, müssen wir C_n erst noch mittels U-Statistiken und Hájek-Projektionen in solch eine Summe plus entsprechendem Restterm umwandeln. Die Terme B_n und D_n werden wir in den Lemmata 5.12 und 5.13 als Restterme identifizieren; das bedeutet, daß sie von der Ordnung $o_p(n^{-1/2})$ sind.

Wir beginnen mit C_n . Dabei benutzen wir folgende Gleichung:

$$\frac{1}{1-H_{s_n}(w)} = \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1-H_s(w))^2} + \frac{1}{1-H_s(w)} + \frac{(H_{s_n}(w) - H_s(w))^2}{(1-H_s(w))^2(1-H_{s_n}(w))}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
C_n &= \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_{s_n}(dw) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1-H_s(w)} \left(\tilde{H}_{s_n}(dw) - \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{(H_{s_n}(w) - H_s(w))^2}{(1-H_s(w))^2(1-H_{s_n}(w))} \tilde{H}_{s_n}(dw) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
&= C_{n_1} + C_{n_2} + C_{n_3}
\end{aligned}$$

Die V-Statistik C_{n_1} formen wir in eine U-Statistik um, deren Hájek-Projektion im Anschluß daran berechnet wird. Dies führt zu:

$$\begin{aligned}
C_{n_1} &= \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \times \\
&\quad \quad \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \left(\tilde{H}_{s_n}(dw) - \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \times \\
&\quad \quad \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \left(\tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) - \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) \\
&= \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + o_p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)
\end{aligned}$$

Die Ordnung der Restterme bestimmen wir in Lemma 5.8 und 5.9.

Für C_{n_2} gehen wir genauso vor und erhalten:

$$\begin{aligned}
C_{n_2} &= \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \left(\tilde{H}_{s_n}(dw) - \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \times \\
&\quad \quad \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \left(\tilde{H}_{s_n}(dw) - \tilde{H}_s(dw) \right) \left(\tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) - \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) \\
&= \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \left(\tilde{H}_{s_n}(dw) - \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + o_p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)
\end{aligned}$$

Den Restterm bearbeiten wir in Lemma 5.10. In Lemma 5.11 zeigen wir, daß auch C_{n_3} von der Ordnung $o_p(n^{-1/2})$ ist. Damit gilt insgesamt:

$$\begin{aligned}
C_n &= \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \left(\tilde{H}_{s_n}(dw) - \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + o_p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad - \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1 - H_{s_n}(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

So haben wir folgende lineare Entwicklung für unseren Schätzer erhalten:

$$\begin{aligned}
S_n &= \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad - \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1 - H_{s_n}(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

□

Bei der Bearbeitung der Restterme werden wir uns häufiger folgende Tatsache zunutze machen:

Bemerkung 5.7 *Wenn wir für eines der auftretenden empirischen Integrale zeigen wollen, daß es stochastisch gegen Null konvergiert, dann können wir uns darauf beschränken, dies auf $\{(z_1, z_2) : z_1 + z_2 \leq a_n\}$ zu zeigen, wobei die Folge a_n folgendermaßen gewählt wird:*

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $c > 0$ und eine Folge $a_n \rightarrow H_s^{-1}(1)$, so daß für $n \geq n_\varepsilon$ gilt:

$$1 - H_s(a_n) = \frac{c}{n} \quad \text{und} \quad P((Z_1 + Z_2)_{n:n} \leq a_n) \geq 1 - \varepsilon$$

Dies ist möglich, da

$$\begin{aligned}
a_n = H_s^{-1}\left(1 - \frac{c}{n}\right) &\Rightarrow 1 - H_s(a_n) = \frac{c}{n} \quad \text{und} \\
P((Z_1 + Z_2)_{n:n} \leq a_n) &= P(Z_1 + Z_2 \leq a_n)^n \\
&= \left(1 - \frac{c}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-c} \geq 1 - \varepsilon \quad \text{für } c \text{ klein.}
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß die empirische Masse von $\{(z_1, z_2) : z_1 + z_2 > a_n\}$ mit großer Wahrscheinlichkeit Null ist und wir uns deshalb bei der stochastischen Konvergenz empirischer Integrale bzgl. H_n auf $\{(z_1, z_2) : z_1 + z_2 \leq a_n\}$ beschränken können.

Lemma 5.8

$$\int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \left(\tilde{H}_{s_n}(dw) - \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) = o_p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Beweis:

$$\left| \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \left(\tilde{H}_{s_n}(dw) - \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \right| \leq \int |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \left| \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \left(\tilde{H}_{s_n}(dw) - \tilde{H}_s(dw) \right) \right| \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2)$$

Von diesem Term werden wir die Konvergenz jetzt zeigen. Nach Bemerkung 5.7 brauchen wir das Integral nur auf der Menge $\{(z_1, z_2) : z_1 + z_2 \leq a_n\}$ mit der entsprechend gewählten Folge a_n zu betrachten. Für dessen Erwartungswert gilt:

$$\begin{aligned} E[\cdot] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \left[1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{H_{s_n}(Z_{1j} + Z_{2j}) - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} - \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right| \right] \\ &= E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) \left| \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \left(1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{11}+Z_{21}\}} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{H_{s_n}(Z_{1j} + Z_{2j}) - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} - \int_0^{(Z_{11}+Z_{21})-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{n} \int_0^{(Z_{11}+Z_{21})-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right| \right] \\ &\leq E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) \left| \frac{1}{n^2} \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^n \left(1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{11}+Z_{21}\}} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{1j}+Z_{2j}\}} - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} - \int_0^{(Z_{11}+Z_{21})-} \frac{1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right) \right| \right] \\ &\quad + \frac{1}{n} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Bei der letzten Ungleichung haben wir die Dreiecksungleichung benutzt, beim zweiten Term den Betrag in das Integral gezogen und dann die Differenz im Zähler durch 1 abgeschätzt. Das so erhaltene Integral besitzt nach Lemma 5.15 die Ordnung $o(1/\sqrt{n})$.

Bei der inneren Doppelsumme spalten wir zunächst die Summe mit $k = 1$ ab. Dabei ist folgender Erwartungswert zu untersuchen:

$$E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) \left| \frac{1}{n^2} \sum_{j=2}^n \left(1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{11}+Z_{21}\}} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{-H_s(Z_{1j} + Z_{2j})}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} + \int_0^{(Z_{11}+Z_{21})-} \frac{H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right) \right| \right]$$

Indem wir wieder die Dreiecksungleichung benutzen und die Zähler betraglich durch 1 abschätzen, bekommen wir zweimal das obige Integral als obere Schranke.

Für die restliche Summe gilt:

$$E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) \left| \frac{1}{n^2} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n \left(1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{11}+Z_{21}\}} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{1j}+Z_{2j}\}} - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} - \int_0^{(Z_{11}+Z_{21})-} \frac{1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right) \right| \right] \\ = E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) E \left[\frac{1}{n^2} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n \left(1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{11}+Z_{21}\}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \frac{1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{1j}+Z_{2j}\}} - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \int_0^{(Z_{11}+Z_{21})-} \frac{1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right) \right| Z_{11}, Z_{21}, \delta_1 \right] \\ = E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) E \left[\frac{1}{n^2} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n \left(1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{11}+Z_{21}\}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{1j}+Z_{2j}\}} - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} - \int_0^{(Z_{11}+Z_{21})-} \frac{1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right) \right| \right] \right]$$

Diesen inneren Erwartungswert, in den aufgrund der Unabhängigkeit $(Z_{11}, Z_{21}, \delta_1)$ eingesetzt wurde, werden wir jetzt abschätzen. Wir beginnen dabei mit der Summation über $j = k$:

$$E \left[\left| \frac{1}{n^2} \sum_{j=2}^n \left(1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{11}+Z_{21}\}} \frac{1}{1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \int_0^{(Z_{11}+Z_{21})-} \frac{1_{\{Z_{1j}+Z_{2j} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right) \right| \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{n} \left(\int_0^{(Z_{11}+Z_{21})-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) + \int_0^{(Z_{11}+Z_{21})-} \frac{1}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right) \\
&\leq \frac{2}{n} \int_0^{(Z_{11}+Z_{21})-} \frac{1}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw)
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir wieder die Dreiecksungleichung angewendet und den Betrag in das zweite Integral gezogen, um den Zähler des Integranden durch 1 abzuschätzen. Damit bekommen wir insgesamt wieder die Schranke

$$\frac{2}{n} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2),$$

deren Ordnung in Lemma 5.15 bestimmt wird.

Somit bleibt noch die Summe über $j \neq k$ zu betrachten. Für sie folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&E \left[\left| \frac{1}{n^2} \sum_{j \neq}^n \sum_{k=2}^n \left(1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{11}+Z_{21}\}} \frac{1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{1j}+Z_{2j}\}} - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})}{(1-H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \int_0^{(Z_{11}+Z_{21})-} \frac{1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq w\}} - H_s(w)}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right) \right| \right] \\
&\leq \left(E \left[\frac{1}{n^4} \sum_{j \neq}^n \sum_{k=2}^n \sum_{l \neq}^n \sum_{m=2}^n \left(1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{11}+Z_{21}\}} \frac{1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{1j}+Z_{2j}\}} - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})}{(1-H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \int_0^{(Z_{11}+Z_{21})-} \frac{1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq w\}} - H_s(w)}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \times \left(1_{\{\delta_l \neq 3, Z_{1l}+Z_{2l} < Z_{11}+Z_{21}\}} \frac{1_{\{Z_{1m}+Z_{2m} \leq Z_{1l}+Z_{2l}\}} - H_s(Z_{1l} + Z_{2l})}{(1-H_s(Z_{1l} + Z_{2l}))^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \int_0^{(Z_{11}+Z_{21})-} \frac{1_{\{Z_{1m}+Z_{2m} \leq w\}} - H_s(w)}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right) \right] \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Da für $a, b \geq 0$ $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ gilt, betrachten wir die einzelnen Indexkombinationen getrennt und setzen dann das Ergebnis jeweils oben ein.

Man beachte, daß bei der Summation immer $j \neq k$ und $l \neq m$ gilt. Deshalb ist es nicht möglich, daß vier oder drei Indizes gleich sind. Falls je zwei identisch sind, gibt es zwei Kombinationen. Für $j = l \neq k = m$ gilt:

$$\begin{aligned}
E[\cdot] &= \frac{1}{n^4} \sum_{j \neq}^n \sum_{k=2}^n E \left[1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{11}+Z_{21}\}} \frac{1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{1j}+Z_{2j}\}} - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})}{(1-H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{(Z_{11}+Z_{21})-} \frac{1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq w\}} - H_s(w)}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{n^4} \sum_{j \neq k}^n \sum_{k=2}^n E \left[1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j} + Z_{2j} < Z_{11} + Z_{21}\}} \frac{(1_{\{Z_{1k} + Z_{2k} \leq Z_{1j} + Z_{2j}\}} - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^4} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{(Z_{11} + Z_{21}) -} \frac{(1_{\{Z_{1k} + Z_{2k} \leq w\}} - H_s(w))^2}{(1 - H_s(w))^4} \tilde{H}_s(dw) \right] \\
&\leq \frac{4}{n^2} \int_0^{(Z_{11} + Z_{21}) -} \frac{1}{(1 - H_s(w))^3} \tilde{H}_s(dw)
\end{aligned}$$

Hier haben wir zunächst die Ungleichung $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ benutzt und im zweiten Term die Quadratfunktion in das Integral gezogen. Nach Bedingen bzgl. $(Z_{1j}, Z_{2j}, \delta_j)$, dem Vorziehen der meßbaren Faktoren und dem Ausnutzen der Unabhängigkeit ($j \neq k$) haben wir es dann mit dem Erwartungswert von $(1_{\{Z_{1k} + Z_{2k} \leq (\cdot)\}} - H_s(\cdot))^2$ zu tun, den wir durch $1 - H_s(\cdot)$ nach oben abschätzen. So erhalten wir insgesamt das Integral:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{n} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \left(\int_0^{(z_1 + z_2) -} \frac{1}{(1 - H_s(w))^3} \tilde{H}_s(dw) \right)^{1/2} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&\leq \frac{2}{n} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \frac{1}{1 - H_s(z_1 + z_2)} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&= o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Nach Anwendung von Lemma 5.14 ergibt sich die Ordnung des Integrals aus dem Beweis zu Lemma 5.15.

Falls $j = m \neq k = l$ ist, gilt folgendes:

$$\begin{aligned}
E[\cdot] &= \frac{1}{n^4} \sum_{j \neq k}^n \sum_{k=2}^n E \left[\left(1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j} + Z_{2j} < Z_{11} + Z_{21}\}} \frac{1_{\{Z_{1k} + Z_{2k} \leq Z_{1j} + Z_{2j}\}} - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^{(Z_{11} + Z_{21}) -} \frac{1_{\{Z_{1k} + Z_{2k} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right) \right. \\
&\quad \times \left(1_{\{\delta_k \neq 3, Z_{1k} + Z_{2k} < Z_{11} + Z_{21}\}} \frac{1_{\{Z_{1j} + Z_{2j} \leq Z_{1k} + Z_{2k}\}} - H_s(Z_{1k} + Z_{2k})}{(1 - H_s(Z_{1k} + Z_{2k}))^2} \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^{(Z_{11} + Z_{21}) -} \frac{1_{\{Z_{1j} + Z_{2j} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right) \right] \\
&\leq \frac{4}{n^2} \left(\int_0^{(Z_{11} + Z_{21}) -} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right)^2
\end{aligned}$$

Wir haben die einzelnen Klammern betragslich nach oben abgeschätzt, indem wir den Betrag in die Integrale gezogen und jeden Zähler durch 1 ersetzt haben. Dadurch werden die beiden Klammerterme unabhängig, und wir können das Produkt der Erwartungswerte berechnen. Wenn wir dies oben einsetzen, kommen wir auf:

$$\frac{2}{n} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Die Ordnung des Integrals wird in Lemma 5.15 nachgewiesen.

Da die Klammerterme für unterschiedliche Indizes zentriert sind und auch die beiden Summanden in diesem Fall zentriert sind, bekommen wir, wenn drei oder vier Indizes verschieden sind, jeweils durch Bedingen und Vorziehen der meßbaren Faktoren den Erwartungswert Null.

□

Lemma 5.9

$$\begin{aligned} \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \left(\tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) - \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) \\ = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Beweis:

Wir schauen uns die Differenz der Integrale zunächst auf $\{(z_1, z_2) : z_1 + z_2 \leq a_n\}$ mit einer Folge a_n wie in Bemerkung 5.7 an. Die Betrachtung auf dem Komplement folgt anschließend. Sie entspricht dem folgenden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1_{\{Z_{1j}+Z_{2j} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right. \\ \left. - \int_0^{a_n} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1_{\{Z_{1j}+Z_{2j} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) \end{aligned}$$

Mit Cauchy-Schwarzscher Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} (E[|\cdot|])^2 &\leq \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n E \left[\left(1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \times \right. \right. \\ &\quad \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1_{\{Z_{1j}+Z_{2j} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \\ &\quad - \int_0^{a_n} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1_{\{Z_{1j}+Z_{2j} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \Big) \\ &\quad \left(1_{\{\delta_k=3, Z_{1k}+Z_{2k} \leq a_n\}} \varphi(Z_{1k}, Z_{2k}) \gamma(Z_{1k} + Z_{2k}) \times \right. \\ &\quad \int_0^{(Z_{1k}+Z_{2k})-} \frac{1_{\{Z_{1l}+Z_{2l} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \\ &\quad \left. \left. - \int_0^{a_n} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1_{\{Z_{1l}+Z_{2l} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) \right] \end{aligned}$$

Wir werden jetzt die verschiedenen Indexkombinationen untersuchen. Der jeweils zweite Term in den runden Klammern ist zentriert. Falls $i \neq j$ gilt bzw. $k \neq l$, ist es auch der erste Summand. Deshalb führt die Verschiedenheit von drei oder vier Indizes jeweils durch Bedingen und Vorziehen der meßbaren Faktoren zum Erwartungswert Null. Falls $i = j \neq k = l$ gilt, wird aus dem Erwartungswert des Produktes das Produkt der Erwartungswerte und aufgrund der Zentriertheit:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^2} \left(\int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right)^2 \\ & \leq \left(\frac{1}{n} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right)^2 \\ & = o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Die Ordnung des Terms leitet sich aus Lemma 5.15 ab.

Falls $i = k \neq j = l$ gilt, multiplizieren wir aus und kommen beim Produkt der ersten Terme auf folgende obere Schranke:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^2} \int_0^{a_n} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{E[(1_{\{Z_1+Z_2 \leq w\}} - H_s(w))(1_{\{Z_1+Z_2 \leq v\}} - H_s(v))]}{(1 - H_s(w))^2 (1 - H_s(v))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}_s(dv) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\ & = \frac{1}{n^2} \int_0^{a_n} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \times \\ & \quad \int_0^{(z_1+z_2)-} \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{H_s(v \wedge w) - H_s(w)H_s(v)}{(1 - H_s(w))^2 (1 - H_s(v))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}_s(dv) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\ & = \frac{2}{n^2} \int_0^{a_n} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \times \\ & \quad \int_0^{(z_1+z_2)-} \int_0^{(z_1+z_2)-} 1_{\{v \leq w\}} \frac{H_s(v)(1 - H_s(w))}{(1 - H_s(w))^2 (1 - H_s(v))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}_s(dv) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\ & \leq \frac{2}{n^2} \int_0^{a_n} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\ & = o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir für $w < z_1 + z_2$ die Abschätzung benutzt:

$$\begin{aligned} \int_0^{(z_1+z_2)-} 1_{\{v \leq w\}} \frac{H_s(v)}{(1 - H_s(v))^2} \tilde{H}_s(dv) & \leq \int_0^w \frac{1}{(1 - H_s(v))^2} H_s(dv) \\ & \leq \frac{1}{1 - H_s(w)} \end{aligned}$$

Die Ordnung des verbliebenen Terms wird in Lemma 5.16 bestimmt.

Ähnlich gehen wir bei den drei anderen Termen, die beim Ausmultiplizieren entstehen, vor. Sie sind durch folgende Größe nach oben beschränkt:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n^2} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{a_n} |\varphi(x_1, x_2)| \gamma(x_1 + x_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \int_0^{(x_1+x_2)-} \\
& \quad \frac{E[(1_{\{Z_1+Z_2 \leq w\}} - H_s(w))(1_{\{Z_1+Z_2 \leq v\}} - H_s(v))]}{(1 - H_s(w))^2 (1 - H_s(v))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}_s(dv) \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
& \leq \frac{1}{n^2} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{a_n} |\varphi(x_1, x_2)| \gamma(x_1 + x_2) \times \\
& \quad \int_0^{(z_1+z_2)-} \int_0^{(x_1+x_2)-} \frac{H_s(v) - H_s(w)H_s(v)}{(1 - H_s(w))^2 (1 - H_s(v))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}_s(dv) \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
& \leq \frac{1}{n^2} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(v))^2} \tilde{H}_s(dv) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
& \quad \times \int_0^{(x_1+x_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \\
& = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

Die Ordnung ergibt sich durch Anwendung von Lemma 5.15 unter Beachtung, daß das zweite Integral nach Bemerkung 5.5 endlich ist.

In der Situation, wo $i = l \neq j = k$ ist, bleibt wegen der Zentriertheit nur das Produkt der ersten Summanden übrig. Bei diesem schätzen wir den Zähler im inneren Integral betragsmäßig durch 1 ab, so daß wir auf unabhängige Terme und damit auf folgende obere Schranke kommen:

$$\frac{1}{n^2} \left(\int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right)^2 = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Die Konvergenzrate folgt aus Lemma 5.15.

Wenn drei Indizes identisch sind, dann führt Bedingen bezüglich dieser Variablen und Vorziehen der meßbaren Faktoren zu zentrierten Größen, so daß wir uns nur noch den Fall, wo alle Indizes gleich sind, anschauen müssen. Dabei benutzen wir die Ungleichung $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, ziehen die Quadratfunktion im zweiten Summanden in das Integral und schätzen jeweils den Zähler im inneren Integral durch 1 nach oben ab:

$$\frac{4}{n^3} \int_0^{a_n} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \left(\int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Die Ordnung berechnen wir in Lemma 5.17. Damit sind alle Fallunterscheidungen gemacht.

Für das Integral auf $\{(z_1, z_2) : z_1 + z_2 > a_n\}$ brauchen wir den empirischen Teil nach Bemerkung 5.7 nicht zu beachten. Für das Integral bzgl. $\tilde{H}^3$ gilt:

$$\begin{aligned}
E[|\cdot|] &= E \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{a_n}^{\infty} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1_{\{Z_{1i}+Z_{2i} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right| \right] \\
&\leq \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \int_{a_n}^{\infty} \int_{a_n}^{\infty} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \varphi(x_1, x_2) \gamma(x_1 + x_2) \times \right. \\
&\quad \left. \int_0^{(z_1+z_2)-} \int_0^{(x_1+x_2)-} \frac{E[(1_{\{Z_{1i}+Z_{2i} \leq w\}} - H_s(w))(1_{\{Z_{1i}+Z_{2i} \leq v\}} - H_s(v))]}{(1 - H_s(w))^2 (1 - H_s(v))^2} \right. \\
&\quad \left. \tilde{H}_s(dv) \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{n} \int_{a_n}^{\infty} \int_{a_n}^{\infty} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \varphi(x_1, x_2) \gamma(x_1 + x_2) \times \right. \\
&\quad \left. \int_0^{(z_1+z_2)-} \int_0^{(x_1+x_2)-} \frac{H_s(v \wedge w) - H_s(v)H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2 (1 - H_s(v))^2} \tilde{H}_s(dv) \tilde{H}_s(dw) \right. \\
&\quad \left. \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{2}{n} \int_{a_n}^{\infty} \int_{a_n}^{\infty} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \varphi(x_1, x_2) \gamma(x_1 + x_2) \times \right. \\
&\quad \left. \int_0^{(z_1+z_2)-} \int_0^{(x_1+x_2)-} \frac{1_{\{v \leq w\}} H_s(v)}{(1 - H_s(v))^2} \tilde{H}_s(dv) \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right. \\
&\quad \left. \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Hier haben wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung benutzt und die Zentriertheit der Terme. Da das verbliebene Integral über ganz $\mathbb{R}^2$ die Varianz eines der führenden Terme aus der linearen Entwicklung unseres Schätzers darstellt und somit nach Voraussetzung endlich ist und a_n gegen den Trägerpunkt von H_s konvergiert, bekommen wir auch diesen Term (mit $\sqrt{n}$ multipliziert) beliebig klein.

□

Lemma 5.10

$$\int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \times \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1-H_s(w)} \left(\tilde{H}_{s_n}(dw) - \tilde{H}_s(dw) \right) \left(\tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) - \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) = o_p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Beweis:

Der Term auf $\{(z_1, z_2) : z_1 + z_2 \leq a_n\}$ mit einer Folge a_n wie in Bemerkung 5.7 ist gleich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n & \left(1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \times \right. \\ & \left(\frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{1-H_s(Z_{1j} + Z_{2j})} - \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \\ & - \int_0^{a_n} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \times \\ & \left. \left(\frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < z_1+z_2\}}}{1-H_s(Z_{1j} + Z_{2j})} - \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung kommen wir auf:

$$\begin{aligned} (E[|\cdot|])^2 & \leq \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n E \left[\left[1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \times \right. \right. \\ & \left(\frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{1-H_s(Z_{1j} + Z_{2j})} - \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \\ & - \int_0^{a_n} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \times \\ & \left. \left(\frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < z_1+z_2\}}}{1-H_s(Z_{1j} + Z_{2j})} - \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right] \\ & \left[1_{\{\delta_k=3, Z_{1k}+Z_{2k} \leq a_n\}} \varphi(Z_{1k}, Z_{2k}) \gamma(Z_{1k} + Z_{2k}) \times \right. \\ & \left(\frac{1_{\{\delta_l \neq 3, Z_{1l}+Z_{2l} < Z_{1k}+Z_{2k}\}}}{1-H_s(Z_{1l} + Z_{2l})} - \int_0^{(Z_{1k}+Z_{2k})-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \\ & - \int_0^{a_n} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \times \\ & \left. \left(\frac{1_{\{\delta_l \neq 3, Z_{1l}+Z_{2l} < z_1+z_2\}}}{1-H_s(Z_{1l} + Z_{2l})} - \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right] \right] \end{aligned}$$

Wir werden im folgenden die verschiedenen Indexkombinationen untersuchen. Man beachte, daß die Terme in den Klammern für unterschiedliche Indizes zentriert sind. Da-

durch ist der Erwartungswert bei drei oder vier verschiedenen Indizes immer Null. Deshalb können wir damit beginnen, die Indexkombinationen zu betrachten, bei denen je zwei gleich sind. Für den Fall, daß $i = j \neq k = l$ gilt, können wir aufgrund der Unabhängigkeit den Erwartungswert der einzelnen [...] berechnen, wobei der Integrand des zweiten Summanden zentriert ist. Somit kommen wir auf folgende obere Schranke:

$$\frac{1}{n^2} \left(\int_0^{a_n} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right)^2 = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Das quadrierte Integral ist nach Bemerkung 5.5 endlich.

Diese obere Schranke erhalten wir auch, wenn wir den Fall $i = l \neq j = k$ betrachten, da in diesem Fall das Produkt der Indikatoren $1_{\{\delta_i=3\}}$ und $1_{\{\delta_i \neq 3\}}$ zu Null wird und beim Ausmultiplizieren der eckigen Klammern wegen der Zentriertheit nur ein Term übrigbleibt.

Für $i = k \neq j = l$ erhalten wir die eckige Klammer zum Quadrat. Indem wir wiederholt die Ungleichung $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ benutzen und die Quadratfunktion immer in das Integral ziehen, sehen wir, daß der Term durch folgenden nach oben beschränkt ist:

$$\frac{16}{n^2} \int_0^{a_n} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Die Ordnung ergibt sich aus Lemma 5.16.

Falls drei Indizes identisch sind und der vierte verschieden, führt Bedingen bzgl. der Variablen dieser drei Indizes und Vorziehen der meßbaren Faktoren zu zentrierten Größen, so daß der Erwartungswert immer Null ist.

Wenn alle Indizes gleich sind, dann kommen wir mit der Ungleichung $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ und dem anschließenden Ziehen der Quadratfunktion unter das Integral auf:

$$\frac{10}{n^3} \int_0^{a_n} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Die Ordnung des letzten Terms bestimmen wir in Lemma 5.16.

Damit sind alle Fälle untersucht.

Auf $\{(z_1, z_2) : z_1 + z_2 > a_n\}$ können wir das empirische Integral nach Bemerkung 5.7 vernachlässigen. Für das Integral bzgl. $\tilde{H}^3$ gilt:

$$E[|\cdot|] = E \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{a_n}^{\infty} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \times \left(\frac{1_{\{\delta_i \neq 3, Z_{1i} + Z_{2i} < z_1 + z_2\}}}{1 - H_s(Z_{1i} + Z_{2i})} - \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right| \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(E \left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \int_{a_n}^{\infty} \int_{a_n}^{\infty} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \varphi(x_1, x_2) \gamma(x_1 + x_2) \times \right. \right. \\
&\quad \left(\frac{1_{\{\delta_i \neq 3, Z_{1i} + Z_{2i} < z_1 + z_2\}}}{1 - H_s(Z_{1i} + Z_{2i})} - \int_0^{(z_1 + z_2)^-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \times \\
&\quad \left. \left(\frac{1_{\{\delta_i \neq 3, Z_{1i} + Z_{2i} < x_1 + x_2\}}}{1 - H_s(Z_{1i} + Z_{2i})} - \int_0^{(x_1 + x_2)^-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right] \right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{n} \int_{a_n}^{\infty} \int_{a_n}^{\infty} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \varphi(x_1, x_2) \gamma(x_1 + x_2) \times \right. \\
&\quad \int_0^{((z_1 + z_2) \wedge (x_1 + x_2))^-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad \left. - \left(\int_{a_n}^{\infty} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1 + z_2)^-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\frac{1}{n} \int_{a_n}^{\infty} \int_{a_n}^{\infty} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \varphi(x_1, x_2) \gamma(x_1 + x_2) \times \right. \\
&\quad \left. \int_0^{((z_1 + z_2) \wedge (x_1 + x_2))^-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Wir haben die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung angewendet und die Zentriertheit der Terme ausgenutzt. Da das Integral in der letzten Zeile über $\mathbb{R}^2$ endlich ist und a_n gegen den Trägerpunkt von H_s konvergiert, können wir es (mit $\sqrt{n}$ multipliziert) beliebig klein bekommen, so daß insgesamt die Ordnung gezeigt ist.

□

Lemma 5.11

$$C_{n_3} = o_p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Beweis:

Mit Bemerkung 5.7 genügt es, C_{n_3} auf $\{(z_1, z_2) : z_1 + z_2 \leq a_n\}$ zu betrachten. Sei deshalb

$$\tilde{C}_{n_3} = \int_0^{a_n} \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1 + z_2)^-} \frac{(H_{s_n}(w) - H_s(w))^2}{(1 - H_s(w))^2 (1 - H_{s_n}(w))} \tilde{H}_{s_n}(dw) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{C}_{n_3} \right| &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1_{\{\delta_i = 3, Z_{1i} + Z_{2i} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) 1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j} + Z_{2j} < Z_{1i} + Z_{2i}\}} \times \\
&\quad \frac{(H_{s_n}(Z_{1j} + Z_{2j}) - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2 (1 - H_{s_n}(Z_{1j} + Z_{2j}))}
\end{aligned}$$

Man beachte, daß die Summanden für $i = j$ verschwinden, so daß wir den Erwartungswert abschätzen können durch:

$$\begin{aligned}
E[|\tilde{C}_{n_3}|] &\leq E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) 1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}} \times \right. \\
&\quad \left. \frac{(H_{s_n}(Z_{12} + Z_{22}) - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^2}{(1 - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^2 (1 - H_{s_n}(Z_{12} + Z_{22}))} \right] \\
&= E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) \frac{1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}}}{(1 - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^2} \times \right. \\
&\quad \left. E \left[\frac{(H_{s_n}(Z_{12} + Z_{22}) - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^2}{1 - H_{s_n}(Z_{12} + Z_{22})} \middle| Z_{11}, Z_{21}, \delta_1, Z_{12}, Z_{22}, \delta_2 \right] \right]
\end{aligned}$$

Den bedingten Erwartungswert schauen wir uns jetzt näher an, wobei zu beachten ist, daß der erste Summand in H_{s_n} aufgrund des Indikators $1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}}$ nicht auftaucht:

$$\begin{aligned}
&E \left[\frac{(H_{s_n}(Z_{12} + Z_{22}) - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^2}{1 - H_{s_n}(Z_{12} + Z_{22})} \middle| Z_{11}, Z_{21}, \delta_1, Z_{12}, Z_{22}, \delta_2 \right] \\
&= E \left[\frac{(\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n 1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^2}{1 - \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n 1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{12}+Z_{22}\}}} \middle| Z_{11}, Z_{21}, \delta_1, Z_{12}, Z_{22}, \delta_2 \right] \\
&= E \left[\frac{(\frac{1}{n} (\sum_{k=3}^n 1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} + 1) - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^2}{1 - \frac{1}{n} (\sum_{k=3}^n 1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} + 1)} \right] \\
&= E \left[\frac{(\frac{1}{n} \sum_{k=3}^n 1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} + \frac{1}{n} - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^2}{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=3}^n 1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{12}+Z_{22}\}}} \right]
\end{aligned}$$

Die Summe besitzt (bei festem Z_{12}, Z_{22}) eine Binomialverteilung, so daß wir den Erwartungswert nach Lemma 5.18 durch $\frac{1}{n}$ abschätzen können. Damit erhalten wir für das erste Moment von $\tilde{C}_{n_3}$ die Schranke:

$$\begin{aligned}
E[|\tilde{C}_{n_3}|] &\leq \frac{1}{n} E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) \frac{1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}}}{(1 - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^2} \right] \\
&= \frac{1}{n} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&= o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Lemma 5.15 liefert uns die Ordnung.

□

Lemma 5.12

$$B_n = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Beweis:

$$B_n = \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \left[n \int_0^{(z_1+z_2)^-} \ln\left(1 + \frac{1}{n(1-H_{s_n}(w))}\right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \right. \\ \left. - \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1-H_{s_n}(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) \right] \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2)$$

Für den Term in der eckigen Klammer, bezeichnet mit B_{n1} , erhalten wir mit der Ungleichung $\ln(1+x) \leq x$ für $x \geq 0$, $B_{n1} \leq 0$. Und mit $\ln(1+x) \geq x - x^2/2$ für $x \geq 0$ folgt:

$$B_{n1} \geq -\frac{1}{2} \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{n} \frac{1}{(1-H_{s_n}(w))^2} \tilde{H}_{s_n}(dw)$$

Also gilt insgesamt:

$$|B_{n1}| \leq \frac{1}{2n} \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{(1-H_{s_n}(w))^2} \tilde{H}_{s_n}(dw)$$

Damit kommen wir zu:

$$|B_n| \leq \frac{1}{2n} \int |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{(1-H_{s_n}(w))^2} \tilde{H}_{s_n}(dw) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\ = \frac{1}{2n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1_{\{\delta_i=3\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{(1-H_{s_n}(Z_{1j} + Z_{2j}))^2}$$

Mit Bemerkung 5.7 reicht es zu untersuchen:

$$\frac{1}{2n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1_{\{Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} 1_{\{\delta_i=3\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{(1-H_{s_n}(Z_{1j} + Z_{2j}))^2}$$

Dessen Erwartungswert schätzen wir im folgenden nach oben ab. Dabei ist zu beachten, daß die Summanden für $i = j$ Null sind.

$$E[\cdot] = \frac{n-1}{2n^2} E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) \frac{1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}}}{(1-H_{s_n}(Z_{12} + Z_{22}))^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n-1}{2n^2} E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) 1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}} \times \right. \\
&\quad \left. E \left[\frac{1}{(1 - H_{s_n}(Z_{12} + Z_{22}))^2} |Z_{11}, Z_{21}, \delta_1, Z_{12}, Z_{22}, \delta_2 \right] \right] \\
&= \frac{n-1}{2n^2} E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) 1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}} \times \right. \\
&\quad \left. E \left[\frac{1}{(1 - \frac{1}{n} (\sum_{k=3}^n 1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} + 1))^2} \right] \right] \\
&= \frac{n-1}{2n^2} E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) 1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}} \times \right. \\
&\quad \left. E \left[\frac{1}{(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=3}^n 1_{\{Z_{1k}+Z_{2k} \leq Z_{12}+Z_{22}\}})^2} \right] \right] \\
&\leq \frac{n-1}{2n^2} E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) 1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}} \times \right. \\
&\quad \left. \frac{2n}{n-1} \frac{1}{(1 - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^2} \right] \\
&= \frac{1}{n} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)
\end{aligned}$$

Man beachte, daß aufgrund des Indikators $1_{\{Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}}$ bei H_{s_n} der erste Summand wegfällt. Der Erwartungswert, in dem diese Größe vorkommt, wird in Lemma 5.19 abgeschätzt.

Um die Behauptung zu beweisen, bleibt zu zeigen:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) = o(1)$$

Dies wird in allgemeinerer Form in Lemma 5.15 getan.

□

Lemma 5.13

$$D_n = o_p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
D_n = \int \varphi(z_1, z_2) \frac{1}{2} \exp(\Delta_n(z_1 + z_2)) &\left(n \int_0^{(z_1+z_2)-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1 - H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2)
\end{aligned}$$

Dabei liegt $\Delta_n(Z_{1i} + Z_{2i})$ zwischen

$$n \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1-H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \quad \text{und} \quad \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw).$$

Entweder gilt

$$\Delta_n(Z_{1i} + Z_{2i}) \leq \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw)$$

oder es ist

$$\begin{aligned} \Delta_n(Z_{1i} + Z_{2i}) &\leq n \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1-H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \\ &\quad - \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_{s_n}(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) \\ &\quad + \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_{s_n}(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) - \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \\ &\quad + \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \\ &\leq \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_{s_n}(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) - \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \\ &\quad + \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \\ &\leq D_{n1} + \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw). \end{aligned}$$

Hier ging die Abschätzung aus dem Beweis zu Lemma 5.12 ein ($B_{n1} \leq 0$). Für D_{n1} zeigen wir später:

$$D_{n1} = \sup_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_{s_n}(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) - \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right| \right\} = O_p(1)$$

Das heißt, zu zeigen bleibt:

$$\begin{aligned} &\int |\varphi(z_1, z_2)| \frac{1}{2} \exp \left(\int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \times \\ &\quad \left(n \int_0^{(z_1+z_2)-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1-H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) = o_p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

Wir benutzen Bemerkung 5.7 und spalten den Term auf in:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \left(n \int_0^{(z_1+z_2)^-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1 - H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1 - H_{s_n}(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) \right)^2 \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
& + \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \left(\int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1 - H_{s_n}(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
& = D_{n2} + D_{n3}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ benutzt. Für D_{n2} folgt mit der Abschätzung aus dem Beweis zu Lemma 5.12:

$$|D_{n2}| \leq \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \frac{1}{n^2} \left(\int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{(1 - H_{s_n}(w))^2} \tilde{H}_{s_n}(dw) \right)^2 \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2)$$

Bevor wir zeigen, daß dieser Term die Ordnung $o_p(n^{-1/2})$ hat, halten wir zunächst folgendes Resultat, das auf Ungleichung 1 aus Shorack und Wellner (1986), S. 415, zurückgeht, fest. Es erlaubt uns, den Nenner $1 - H_{s_n}$ durch $1 - H_s$ zu ersetzen:

$$\sup_{1 \leq i < n} \left| \frac{1 - H_s(Z_1 + Z_2)_{i:n}}{1 - H_{s_n}(Z_1 + Z_2)_{i:n}} \right| \leq \sup_{0 \leq t < (Z_1 + Z_2)_{n:n}} \left| \frac{1 - H_s(t)}{1 - H_{s_n}(t)} \right| = O_p(1)$$

Mit $(Z_1 + Z_2)_{i:n}$ bezeichnen wir die i -te Ordnungsgröße der $(Z_{1k} + Z_{2k})_{1 \leq k \leq n}$.

Damit bleibt zu zeigen:

$$\int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \frac{1}{n^2} \left(\int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_{s_n}(dw) \right)^2 \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Dazu bilden wir den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
E[\cdot] &= E \left[\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \times \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$= E \left[\frac{1}{n^5} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n 1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \times \right. \\ \left. \frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} \frac{1_{\{\delta_k \neq 3, Z_{1k}+Z_{2k} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{(1 - H_s(Z_{1k} + Z_{2k}))^2} \right]$$

Man beachte, daß bei der Summation über $i = j$ oder $i = k$ die Summanden Null sind, so daß nur die Fälle $j = k$ und $j \neq k$ zu unterscheiden sind.

Für $i \neq j \neq k$ gilt:

$$E[\cdot] = E \left[\frac{1}{n^5} \sum_i^n \sum_{j \neq i}^n \sum_{k \neq i}^n 1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \times \right. \\ \left. E \left[\frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} \frac{1_{\{\delta_k \neq 3, Z_{1k}+Z_{2k} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{(1 - H_s(Z_{1k} + Z_{2k}))^2} \middle| Z_{1i}, Z_{2i}, \delta_i \right] \right] \\ \leq E \left[\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \times \right. \\ \left. \left(\int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \right] \\ = \frac{1}{n^2} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \left(\int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)$$

Für dieses Integral - multipliziert mit $\sqrt{n}$ - folgern wir jetzt die Konvergenz gegen Null. Mit Lemma 5.14 genügt es zu zeigen:

$$\frac{1}{n^{3/2}} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \frac{1}{(1 - H_s(z_1 + z_2))^2} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) = o(1)$$

Dies wird im Beweis zu Lemma 5.15 getan.

Wir kommen zum Fall $i \neq j = k$ und schätzen den Erwartungswert folgendermaßen ab:

$$E[\cdot] = E \left[\frac{1}{n^5} \sum_i^n \sum_{j \neq i}^n 1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \times \right. \\ \left. E \left[\frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^4} \middle| Z_{1i}, Z_{2i}, \delta_i \right] \right] \\ \leq \frac{1}{n^3} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^4} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)$$

Mit Lemma 5.15 erhalten wir das gewünschte Ergebnis auch für diesen Fall.

Als nächstes wird D_{n3} untersucht:

$$\begin{aligned}
|D_{n3}| &\leq 2 \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \left(\int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1 - H_{s_n}(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
&\quad + 2 \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \left(\int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
&= D_{n4} + D_{n5}
\end{aligned}$$

Für D_{n4} folgt:

$$\begin{aligned}
|D_{n4}| &= 2 \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \times \\
&\quad \left(\int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_{s_n}(w))(1 - H_s(w))} \tilde{H}_{s_n}(dw) \right)^2 \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
&\leq 2 \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \times \\
&\quad \left(\int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{|H_{s_n}(w) - H_s(w)|}{(1 - H_{s_n}(w))(1 - H_s(w))} \tilde{H}_{s_n}(dw) \right)^2 \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2)
\end{aligned}$$

Mit der Bemerkung von oben können wir wieder im Nenner den Faktor $1 - H_{s_n}$ durch $1 - H_s$ ersetzen, so daß wir folgenden Term bearbeiten müssen:

$$\begin{aligned}
&2 \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \left(\int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{|H_{s_n}(w) - H_s(w)|}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_{s_n}(dw) \right)^2 \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
&= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \times \\
&\quad \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}} \frac{|H_{s_n}(Z_{1j} + Z_{2j}) - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})|}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} \right)^2 \\
&= \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n 1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \times \\
&\quad 1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}} \frac{|H_{s_n}(Z_{1j} + Z_{2j}) - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})|}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} \times \\
&\quad 1_{\{\delta_k \neq 3, Z_{1k}+Z_{2k} < Z_{1i}+Z_{2i}\}} \frac{|H_{s_n}(Z_{1k} + Z_{2k}) - H_s(Z_{1k} + Z_{2k})|}{(1 - H_s(Z_{1k} + Z_{2k}))^2}
\end{aligned}$$

Im folgenden werden wir den Erwartungswert nach oben abschätzen. Dabei machen wir wieder eine Fallunterscheidung. Für die Indexkombinationen, bei denen $i = j$ oder $i = k$ gilt, sind die Summanden Null. Beginnen wir mit dem Fall, daß $i \neq j \neq k$ gilt:

$$\begin{aligned}
E[\cdot] &= \frac{2}{n^3} \sum_i^n \sum_{j \neq i}^n \sum_{k \neq j}^n E \left[1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2} \right. \\
&\quad \frac{1_{\{\delta_k \neq 3, Z_{1k}+Z_{2k} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{(1 - H_s(Z_{1k} + Z_{2k}))^2} E [|H_{s_n}(Z_{1j} + Z_{2j}) - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})| \times \\
&\quad |H_{s_n}(Z_{1k} + Z_{2k}) - H_s(Z_{1k} + Z_{2k})| | Z_{1i}, Z_{2i}, \delta_i, Z_{1j}, Z_{2j}, \delta_j, Z_{1k}, Z_{2k}, \delta_k] \\
&\leq 2E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) \frac{1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}}}{(1 - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^2} \times \right. \\
&\quad \frac{1_{\{\delta_3 \neq 3, Z_{13}+Z_{23} < Z_{11}+Z_{21}\}}}{(1 - H_s(Z_{13} + Z_{23}))^2} E [|H_{s_n}(Z_{12} + Z_{22}) - H_s(Z_{12} + Z_{22})| \times \\
&\quad |H_{s_n}(Z_{13} + Z_{23}) - H_s(Z_{13} + Z_{23})| | Z_{11}, Z_{21}, \delta_1, Z_{12}, Z_{22}, \delta_2, Z_{13}, Z_{23}, \delta_3] \\
\end{aligned}$$

Diesen inneren Erwartungswert, in den $(Z_{1i}, Z_{2i}, \delta_i)$ für $1 \leq i \leq 3$ eingesetzt werden, schätzen wir jetzt ab, wobei die Indikatoren, die vor diesem Erwartungswert stehen, zu beachten sind:

$$\begin{aligned}
&E \left[\left| \frac{1}{n} \left(1 + 1_{\{Z_{13}+Z_{23} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} + \sum_{l=4}^n 1_{\{Z_{1l}+Z_{2l} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} \right) - H_s(Z_{12} + Z_{22}) \right| \times \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{1}{n} \left(1_{\{Z_{12}+Z_{22} \leq Z_{13}+Z_{23}\}} + 1 + \sum_{m=4}^n 1_{\{Z_{1m}+Z_{2m} \leq Z_{13}+Z_{23}\}} \right) - H_s(Z_{13} + Z_{23}) \right| \right] \\
&= E \left[\left| \frac{1}{n} (1 + 1_{\{Z_{13}+Z_{23} \leq Z_{12}+Z_{22}\}}) - \frac{3}{n} H_s(Z_{12} + Z_{22}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{n} \sum_{l=4}^n (1_{\{Z_{1l}+Z_{2l} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} - H_s(Z_{12} + Z_{22})) \right| \times \right. \\
&\quad \left| \frac{1}{n} (1_{\{Z_{12}+Z_{22} \leq Z_{13}+Z_{23}\}} + 1) - \frac{3}{n} H_s(Z_{13} + Z_{23}) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{n} \sum_{m=4}^n (1_{\{Z_{1m}+Z_{2m} \leq Z_{13}+Z_{23}\}} - H_s(Z_{13} + Z_{23})) \right| \right] \\
&\leq E \left[\left(\frac{5}{n} + \left| \frac{1}{n} \sum_{l=4}^n (1_{\{Z_{1l}+Z_{2l} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} - H_s(Z_{12} + Z_{22})) \right| \right) \times \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{5}{n} + \left| \frac{1}{n} \sum_{m=4}^n (1_{\{Z_{1m}+Z_{2m} \leq Z_{13}+Z_{23}\}} - H_s(Z_{13} + Z_{23})) \right| \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\frac{25}{n^2} + \frac{5}{n^2} \left| \sum_{l=4}^n (1_{\{Z_{1l}+Z_{2l} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} - H_s(Z_{12} + Z_{22})) \right| \right. \\
&\quad \left. + \frac{5}{n^2} \left| \sum_{m=4}^n (1_{\{Z_{1m}+Z_{2m} \leq Z_{13}+Z_{23}\}} - H_s(Z_{13} + Z_{23})) \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{1}{n^2} \sum_{l=4}^n \sum_{m=4}^n (1_{\{Z_{1l}+Z_{2l} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} - H_s(Z_{12} + Z_{22}))(1_{\{Z_{1m}+Z_{2m} \leq Z_{13}+Z_{23}\}} - H_s(Z_{13} + Z_{23})) \right| \right]
\end{aligned}$$

Damit kommen wir bei dieser Indexkombination auf vier Terme für den inneren Erwartungswert, die wir oben einsetzen müssen und zu den Termen $I - IV$ führen:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{50}{n^2} E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) \frac{1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}}}{(1 - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^2} \times \right. \\
&\quad \left. \frac{1_{\{\delta_3 \neq 3, Z_{13}+Z_{23} < Z_{11}+Z_{21}\}}}{(1 - H_s(Z_{13} + Z_{23}))^2} \right] \\
&= \frac{50}{n^2} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \left(\int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&= o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir nach dem Bedingen bzgl. $(Z_{11}, Z_{21}, \delta_1)$ die Unabhängigkeit zwischen $(Z_{12}, Z_{22}, \delta_2)$ und $(Z_{13}, Z_{23}, \delta_3)$ ausgenutzt. Wie bei D_{n2} folgt die Ordnung des Restterms. Für II wenden wir auf den inneren Erwartungswert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung an:

$$\begin{aligned}
&E \left[\frac{5}{n^2} \left| \sum_{l=4}^n (1_{\{Z_{1l}+Z_{2l} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} - H_s(Z_{12} + Z_{22})) \right| \right] \\
&\leq \frac{5}{n^2} \left(E \left[\sum_{l=4}^n (1_{\{Z_{1l}+Z_{2l} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} - H_s(Z_{12} + Z_{22})) \right]^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert der quadrierten Summe ist der Erwartungswert der Summe der quadrierten Größen, da die Summanden zentriert sind. Der Erwartungswert eines quadrierten Summanden entspricht gerade der Varianz des Indikators, die wir wiederum durch $1 - H_s(Z_{12} + Z_{22})$ abschätzen können. Dadurch erhalten wir die obere Schranke

$$\frac{5}{n^{3/2}} \sqrt{1 - H_s(Z_{12} + Z_{22})}.$$

Das bedeutet, wir kommen zu:

$$\begin{aligned}
II &\leq \frac{10}{n^{3/2}} E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) \frac{1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}}}{(1 - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^{3/2}} \times \right. \\
&\quad \left. \frac{1_{\{\delta_3 \neq 3, Z_{13}+Z_{23} < Z_{11}+Z_{21}\}}}{(1 - H_s(Z_{13} + Z_{23}))^2} \right] \\
&= \frac{10}{n^{3/2}} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^{3/2}} \tilde{H}_s(dw) \times \\
&\quad \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&\leq \frac{20}{n^{3/2}} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \frac{1}{(1 - H_s(z_1 + z_2))^{3/2}} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&= o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Nach dem Bedingen bzgl. $(Z_{11}, Z_{21}, \delta_1)$ und dem Ausnutzen der Unabhängigkeit zwischen $(Z_{12}, Z_{22}, \delta_2)$ und $(Z_{13}, Z_{23}, \delta_3)$ haben wir Lemma 5.14 benutzt. Die Ordnung des verbliebenen Terms wird im Beweis zu Lemma 5.15 bestimmt.

Der Term *III* wird analog zu *II* bearbeitet. Wir schätzen den inneren Erwartungswert zu *IV* mittels der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ab:

$$\begin{aligned}
&E \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{l=4}^n (1_{\{Z_{1l}+Z_{2l} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} - H_s(Z_{12} + Z_{22})) \frac{1}{n} \sum_{m=4}^n (1_{\{Z_{1m}+Z_{2m} \leq Z_{13}+Z_{23}\}} - H_s(Z_{13} + Z_{23})) \right| \right] \\
&\leq \left(\frac{1}{n^2} E \left[\sum_{l=4}^n (1_{\{Z_{1l}+Z_{2l} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} - H_s(Z_{12} + Z_{22})) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{n^2} E \left[\sum_{m=4}^n (1_{\{Z_{1m}+Z_{2m} \leq Z_{13}+Z_{23}\}} - H_s(Z_{13} + Z_{23})) \right]^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\frac{1}{n} (1 - H_s(Z_{12} + Z_{22})) \frac{1}{n} (1 - H_s(Z_{13} + Z_{23})) \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{n} ((1 - H_s(Z_{12} + Z_{22}))(1 - H_s(Z_{13} + Z_{23})))^{1/2}
\end{aligned}$$

Dies setzen wir ein und verfahren ähnlich wie bei *II*, so daß wir folgendes erhalten:

$$\begin{aligned}
IV &\leq \frac{2}{n} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \left(\int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^{3/2}} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&\leq \frac{8}{n} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \frac{1}{1 - H_s(z_1 + z_2)} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&= o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Es wurde nochmals Lemma 5.14 benutzt, und die Konvergenz des Integrals wird im Beweis zu Lemma 5.15 abgehandelt.

Die letzte Indexkombination, die zu untersuchen ist, ist $j = k \neq i$. Hier haben wir es mit folgendem Erwartungswert zu tun:

$$\begin{aligned}
E[\cdot] &= E \left[\frac{2}{n^3} \sum_i^n \sum_{j \neq i}^n 1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \times \right. \\
&\quad \left. 1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}} \frac{(H_{s_n}(Z_{1j} + Z_{2j}) - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^2}{(1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j}))^4} \right] \\
&\leq E \left[\frac{2}{n} 1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) \times \right. \\
&\quad \left. 1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}} \frac{(H_{s_n}(Z_{12} + Z_{22}) - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^2}{(1 - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^4} \right] \\
&= \frac{2}{n} E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) \frac{1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}}}{(1 - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^4} \right. \\
&\quad \left. E \left[(H_{s_n}(Z_{12} + Z_{22}) - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^2 \mid Z_{11}, Z_{21}, \delta_1, Z_{12}, Z_{22}, \delta_2 \right] \right]
\end{aligned}$$

Der bedingte Erwartungswert entspricht dem folgenden (man beachte den Indikator $1_{\{Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}}$):

$$\begin{aligned}
&E \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=3}^n 1_{\{Z_{1i}+Z_{2i} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} - H_s(Z_{12} + Z_{22}) \right]^2 \\
&= E \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n} H_s(Z_{12} + Z_{22}) + \frac{1}{n} \sum_{i=3}^n (1_{\{Z_{1i}+Z_{2i} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} - H_s(Z_{12} + Z_{22})) \right]^2 \\
&\leq 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n} H_s(Z_{12} + Z_{22}) \right)^2 + 2E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=3}^n (1_{\{Z_{1i}+Z_{2i} \leq Z_{12}+Z_{22}\}} - H_s(Z_{12} + Z_{22})) \right]^2 \\
&\leq \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n} (1 - H_s(Z_{12} + Z_{22}))
\end{aligned}$$

Dabei ist der Erwartungswert der quadrierten Summe $n - 2$ mal die Varianz des Indikators.

Für den bedingten Erwartungswert bekommen wir zwei Terme, die wir oben einsetzen müssen. Für den ersten folgt:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{4}{n^3} E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) \frac{1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}}}{(1 - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^4} \right] \\
&= \frac{4}{n^3} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^4} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&= o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Die Konvergenz ergibt sich aus Lemma 5.15.

Für den zweiten gilt:

$$\begin{aligned}
II &= \frac{4}{n^2} E \left[1_{\{\delta_1=3, Z_{11}+Z_{21} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{11}, Z_{21})| \gamma(Z_{11} + Z_{21}) \frac{1_{\{\delta_2 \neq 3, Z_{12}+Z_{22} < Z_{11}+Z_{21}\}}}{(1 - H_s(Z_{12} + Z_{22}))^3} \right] \\
&= \frac{4}{n^2} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^3} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&= o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Die Konvergenzordnung folgt aus Lemma 5.15.

Damit haben wir gezeigt, daß $D_{n4} = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, und wenden uns jetzt D_{n5} zu:

$$\begin{aligned}
D_{n5} &= 2 \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \left(\int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
&= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \times \\
&\quad \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})} - \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \\
&= \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n 1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \times \\
&\quad \left(\frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})} - \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \times \\
&\quad \left(\frac{1_{\{\delta_k \neq 3, Z_{1k}+Z_{2k} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{1 - H_s(Z_{1k} + Z_{2k})} - \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right)
\end{aligned}$$

Hiervon bestimmen wir den Erwartungswert. Dazu müssen wir die verschiedenen Indexkombinationen untersuchen. Da die Faktoren (...) zentriert sind, erhalten wir für $i \neq j \neq k, i = j \neq k, i = k \neq j$ jeweils den Erwartungswert Null. (Dazu bedingt man bzgl. der Variablen mit Index i und zieht die meßbaren Faktoren vor.)

Für $i \neq j = k$ gilt:

$$\begin{aligned}
E[\cdot] &= E \left[\frac{2}{n^3} \sum_i^n \sum_{j \neq i}^n 1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \left(\frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j}+Z_{2j} < Z_{1i}+Z_{2i}\}}}{1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \right] \\
&\leq \frac{2}{n} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&= o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Für den inneren zentrierten Term haben wir nach Bedingen die Varianz durch das zweite Moment abgeschätzt und schließlich Lemma 5.15 benutzt.

Für $i = j = k$ folgt:

$$\begin{aligned}
E[\cdot] &= E \left[\frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^n 1_{\{\delta_i=3, Z_{1i}+Z_{2i} \leq a_n\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \times \right. \\
&\quad \left. \left(\int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \right] \\
&\leq \frac{2}{n^2} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&= o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

Auf die Konvergenzordnung des Integrals können wir mit Lemma 5.15 schließen. Damit haben wir gezeigt, daß $D_{n5} = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Als letztes bleibt noch zu zeigen (siehe oben):

$$D_{n1} = \sup_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1 - H_{s_n}(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) - \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right| \right\} = O_p(1)$$

$$\begin{aligned}
D_{n1} &\leq \sup_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1 - H_{s_n}(w-)} \tilde{H}_{s_n}(dw) - \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right| \right\} \\
&\quad + \sup_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1 - H_{s_n}(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) - \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1 - H_{s_n}(w-)} \tilde{H}_{s_n}(dw) \right| \right\}
\end{aligned}$$

Das erste Supremum können wir durch folgenden Term nach oben abschätzen:

$$\sup_{0 \leq t < \max_{1 \leq i \leq n} \{Z_{1i} + Z_{2i}\}} \left| \int_0^t \frac{1}{1 - H_{s_n}(w-)} \tilde{H}_{s_n}(dw) - \int_0^t \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right|$$

Dieser Term ist nach Theorem 2.1 aus Zhou (1991) stochastisch beschränkt.

Für das zweite Supremum schauen wir uns an:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{(Z_{1i} + Z_{2i})-} \frac{1}{1 - H_{s_n}(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) - \int_0^{(Z_{1i} + Z_{2i})-} \frac{1}{1 - H_{s_n}(w-)} \tilde{H}_{s_n}(dw) \right| \\ &= \int_0^{(Z_{1i} + Z_{2i})-} \left(\frac{1}{1 - H_{s_n}(w)} - \frac{1}{1 - H_{s_n}(w-)} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{Z_{1j} + Z_{2j} < Z_{1i} + Z_{2i}, \delta_j \neq 3\}} \left(\frac{1}{1 - H_{s_n}(Z_{1j} + Z_{2j})} - \frac{1}{1 - H_{s_n}((Z_{1j} + Z_{2j})-)} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{(Z_1 + Z_2)_{j:n} < Z_{1i} + Z_{2i}, \delta_{j:n} \neq 3\}} \left(\frac{1}{1 - \frac{j}{n}} - \frac{1}{1 - \frac{j-1}{n}} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{(Z_1 + Z_2)_{j:n} < Z_{1i} + Z_{2i}, \delta_{j:n} \neq 3\}} \left(\frac{n}{n-j} - \frac{n}{n-j+1} \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{n}{n-j} - \frac{n}{n-j+1} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n-j} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n-j+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Hierbei sind die Ordnungsgrößen der $Z_{1i} + Z_{2i}$ eingegangen. Wir haben eine obere Schranke gefunden, die nicht von i abhängt, und können das Supremum insgesamt durch 1 abschätzen, so daß auch für dieses die stochastische Beschränktheit folgt.

Damit haben wir gezeigt, daß $D_{n1} = O_p(1)$.

□

Lemma 5.14 *Es gilt:*

$$\int_0^v \frac{1}{(1 - H_s(w))^i} \tilde{H}_s(dw) \leq \frac{c}{(1 - H_s(v))^{i-1}} \quad \forall v \geq 0 \text{ und } \forall i \geq \frac{3}{2},$$

wobei $c = 1$ für $i \geq 2$ gewählt werden kann und $c = 2$ für $3/2 \leq i < 2$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_0^v \frac{1}{(1 - H_s(w))^i} \tilde{H}_s(dw) &\leq \int_0^v \frac{1}{(1 - H_s(w))^i} H_s(dw) \\ &= \left. \frac{1}{i-1} \frac{1}{(1 - H_s(w))^{i-1}} \right|_0^v \\ &\leq \frac{c}{(1 - H_s(v))^{i-1}} \end{aligned}$$

□

Lemma 5.15 *Sei die Folge a_n gewählt wie in Bemerkung 5.7. Dann gilt für $i \geq 1$:*

$$\frac{1}{n^i} \int_0^{a_n} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^{i+1}} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Beweis:

Um die Behauptung zu beweisen, ist zu zeigen, daß der folgende Term gegen Null konvergiert:

$$\frac{1}{n^{(2i-1)/2}} \int 1_{\{z_1+z_2 \leq a_n\}} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^{i+1}} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)$$

Mit Lemma 5.14 reicht es, folgenden Term zu betrachten:

$$\frac{1}{n^{(2i-1)/2}} \int 1_{\{z_1+z_2 \leq a_n\}} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \frac{1}{(1 - H_s(z_1 + z_2))^i} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)$$

Wir wählen zunächst ein $d > 0$ mit $1 - H_s(d) > 0$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^{(2i-1)/2}} \int 1_{\{z_1+z_2 \leq a_n\}} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \frac{1}{(1 - H_s(z_1 + z_2))^i} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\ &\leq \frac{1}{n^{(2i-1)/2}} \int 1_{\{z_1+z_2 \leq d\}} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \frac{1}{(1 - H_s(z_1 + z_2))^i} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\ &\quad + \frac{1}{n^{(2i-1)/2}} \int 1_{\{d < z_1+z_2 \leq a_n\}} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \frac{1}{(1 - H_s(z_1 + z_2))^i} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Das erste Integral können wir abschätzen durch:

$$\frac{1}{n^{(2i-1)/2} (1 - H_s(d))^i} \int 1_{\{z_1+z_2 \leq d\}} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)$$

Da das Integral endlich ist, können wir den Term für jedes d mit wachsendem n beliebig klein machen.

Für das zweite verbliebene Integral von oben setzen wir so an:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n^{(2i-1)/2}} \int 1_{\{d < z_1+z_2 \leq a_n\}} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \frac{1}{(1 - H_s(z_1 + z_2))^i} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
& \leq \frac{1}{n^{(2i-1)/2}} \left(\int 1_{\{d < z_1+z_2 \leq a_n\}} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right)^{1/2} \\
& \quad \times \left(\int_d^{a_n} \frac{1}{(1 - H_s(w))^{2i}} H_s(dw) \right)^{1/2} \\
& \leq \frac{1}{n^{(2i-1)/2}} \left(\int 1_{\{d < z_1+z_2 \leq a_n\}} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right)^{1/2} \left(\frac{1}{(1 - H_s(a_n))^{2i-1}} \right)^{1/2} \\
& \leq \frac{1}{c^{(2i-1)/2}} \left(\int 1_{\{d < z_1+z_2 \leq \infty\}} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Hier haben wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung benutzt, Lemma 5.14 und die Eigenschaften der Folge a_n . Da das verbliebene Integral über $\mathbb{R}^2$ endlich ist, können wir durch entsprechend große Wahl von $d < H_s^{-1}(1)$ den Ausdruck beliebig klein machen.

□

Lemma 5.16 *Sei die Folge a_n gewählt wie in Bemerkung 5.7. Dann gilt für $i \geq 2$:*

$$\frac{1}{n^i} \int_0^{a_n} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^i} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Beweis:

Um die Behauptung zu beweisen, ist zu zeigen:

$$\frac{1}{n^{i-1}} \int 1_{\{z_1+z_2 \leq a_n\}} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^i} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) = o(1)$$

Mit Lemma 5.14 genügt es, folgenden Term zu betrachten:

$$\frac{1}{n^{i-1}} \int 1_{\{z_1+z_2 \leq a_n\}} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \frac{1}{(1 - H_s(z_1 + z_2))^{i-1}} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)$$

Wir wählen ein $d > 0$ mit $1 - H_s(d) > 0$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n^{i-1}} \int 1_{\{z_1+z_2 \leq a_n\}} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \frac{1}{(1 - H_s(z_1 + z_2))^{i-1}} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
& \leq \frac{1}{n^{i-1}} \int 1_{\{z_1+z_2 \leq d\}} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \frac{1}{(1 - H_s(z_1 + z_2))^{i-1}} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
& \quad + \frac{1}{n^{i-1}} \int 1_{\{d < z_1+z_2 \leq a_n\}} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \frac{1}{(1 - H_s(z_1 + z_2))^{i-1}} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)
\end{aligned}$$

Das erste Integral können wir abschätzen durch:

$$\frac{1}{n^{i-1}(1 - H_s(d))^{i-1}} \int 1_{\{z_1+z_2 \leq d\}} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)$$

Da das Integral endlich ist, können wir den Term für jedes d mit wachsendem n beliebig klein machen.

Für das zweite verbliebene Integral von oben setzen wir so an:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^{i-1}} \int 1_{\{d < z_1+z_2 \leq a_n\}} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \frac{1}{(1 - H_s(z_1 + z_2))^{i-1}} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\ & \leq \frac{1}{n^{i-1}} \frac{1}{(1 - H_s(a_n))^{i-1}} \int 1_{\{d < z_1+z_2 \leq a_n\}} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\ & \leq \frac{1}{c^{i-1}} \int 1_{\{d < z_1+z_2 \leq \infty\}} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Eigenschaften der Folge a_n benutzt. Da das verbliebene Integral über $\mathbb{R}^2$ endlich ist, können wir durch entsprechend große Wahl von $d < H_s^{-1}(1)$ den Ausdruck beliebig klein machen.

□

Lemma 5.17 *Sei die Folge a_n gewählt wie in Bemerkung 5.7. Dann gilt:*

$$\frac{1}{n^3} \int_0^{a_n} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \left(\int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Beweis:

Wir müssen von folgendem die Konvergenz gegen Null zeigen:

$$\frac{1}{n^2} \int 1_{\{z_1+z_2 \leq a_n\}} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \left(\int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)$$

Mit Lemma 5.14 reicht es, diesen Term zu untersuchen:

$$\frac{1}{n^2} \int 1_{\{z_1+z_2 \leq a_n\}} \varphi^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \frac{1}{(1 - H_s(z_1 + z_2))^2} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)$$

Dies wurde im Beweis zum vorigen Lemma gemacht.

□

Lemma 5.18 Für $X \sim \text{Bin}(n-2, p)$ mit $0 < p < 1$ und $n \geq 3$ gilt:

$$E \left[\frac{\left(\frac{1}{n}X + \frac{1}{n} - p\right)^2}{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}X} \right] \leq \frac{1}{n}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\left(\frac{1}{n}X + \frac{1}{n} - p\right)^2}{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}X} \right] &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\left(\frac{1}{n}k + \frac{1}{n} - p\right)^2}{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}k} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\frac{1}{n^2}(k+1-np)^2}{\frac{n-1-k}{n}} \frac{(n-2)!}{(n-2-k)!k!} p^k (1-p)^{n-2-k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} (k+1-np)^2 \frac{(n-2)!}{(n-1-k)!k!} p^k (1-p)^{n-2-k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (k-np)^2 \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-k} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (k-np)^2 \frac{(n-1)!}{(n-k)!k!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-k} \\ &= \frac{1}{n^2 p (1-p)} \sum_{k=1}^{n-1} (k-np)^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &\leq \frac{1}{n^2 p (1-p)} \sum_{k=0}^n (k-np)^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Bei der letzten Summe handelt es sich um die Varianz einer $\text{Bin}(n, p)$ verteilten Zufallsvariablen.

□

Lemma 5.19 Für $X \sim \text{Bin}(n-2, p)$ mit $0 < p < 1$ und $n \geq 3$ gilt:

$$E \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}X\right)^2} \right] \leq \frac{2n}{(n-1)(1-p)^2}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} E \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}X\right)^2} \right] &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}k\right)^2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n^2}{(n-1-k)^2} \frac{(n-2)!}{(n-2-k)!k!} p^k (1-p)^{n-2-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n}{n-1} \frac{n-k}{n-1-k} \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-2-k} \\
&\leq \frac{2n}{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-2-k} \\
&\leq \frac{2n}{(n-1)(1-p)^2}
\end{aligned}$$

Die erste Abschätzung im Beweis folgt aus der Äquivalenz:

$$\frac{n-k}{n-1-k} \leq 2 \Leftrightarrow k \leq n-2$$

□

6 Ein Invarianzprinzip für den φ -Prozeß

Bisher haben wir unseren Schätzer für eine feste Funktion φ betrachtet. In diesem Kapitel werden wir das Verteilungsverhalten untersuchen, wenn φ eine Klasse von Funktionen durchläuft. Wir setzen:

$$\begin{aligned}
 S_n(\varphi) &= \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\
 &\quad - \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1 - H_{s_n}(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
 &\quad + \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_{s_n}(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
 &\quad + R_n(\varphi) \\
 &= \alpha_n(\varphi) + R_n(\varphi)
 \end{aligned}$$

Wir werden für den Prozeß in φ ein Invarianzprinzip herleiten. Die Verteilungskonvergenz ist dabei im üblichen Sinne zu verstehen (siehe Definition 1.3.3 aus van der Vaart und Wellner (1996)).

Zunächst tragen wir die Voraussetzungen, unter denen wir arbeiten, zusammen. Dann formulieren wir die Konvergenzaussage für unseren standardisierten Prozeß. Als Korollar erhalten wir die entsprechende Behauptung für den klassischen empirischen Prozeß, bei dem für φ die Indikatoren über Rechtecke eingesetzt werden. Um die Konvergenz zu beweisen, betrachten wir zunächst den führenden Term aus der linearen Entwicklung von S_n und weisen die Anwendbarkeit eines Invarianzprinzips aus van der Vaart und Wellner (1996) nach. Die dazu notwendige Eigenschaft der beschränkten Entropiezahl wird in den nachfolgenden Lemmata 6.6 bis 6.8 gezeigt. Schließlich wird in Satz 6.10 bewiesen, daß R_n gleichmäßig in φ mit der entsprechenden Rate gegen Null konvergiert. Wir sehen, daß auch hier die lineare Entwicklung aus dem vorigen Kapitel von grundlegender Bedeutung ist.

Im folgenden führen wir die Annahmen auf, unter denen wir in diesem Kapitel arbeiten. Für unseren Prozeß in φ sei die Klasse der zugelassenen Funktionen

$$K = \{\varphi : \varphi \in K\}.$$

Hierbei soll es sich um einen nach Vapnik und Červonenkis bezeichneten Typ von Klasse (VC-Klasse) handeln. Diese Klasse soll dominiert werden durch ein φ_0 , das heißt, es gilt:

$$|\varphi| \leq \varphi_0 \quad \forall \varphi \in K$$

Sowohl die Funktionen in K als auch die Majorante φ_0 seien $\mathbb{B}_2^* - \mathbb{B}^*$ meßbar. Außerdem werden wir häufiger Klassen des Typs $\mathcal{H} = \{T(\varphi) : \varphi \in K\}$ betrachten, wobei T eine Funktion φ in eine Funktion $T(\varphi)$ überführt. Die Funktionen $T(\varphi)$ stammen im wesentlichen aus der linearen Entwicklung von S_n . Für Klassen diesen Typs $\mathcal{H}$ werden

wir Meßbarkeitsforderungen der folgenden Art machen müssen (siehe Definition 2.3.3 aus van der Vaart und Wellner (1996)):

Für jeden beliebigen Vektor $(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{R}^n$ und $n \in \mathbb{N}$ soll

$$((Z_{11}, Z_{21}, \delta_1), \dots, (Z_{1n}, Z_{2n}, \delta_n)) \longrightarrow \sup_{h \in \mathcal{H}} \left| \sum_{i=1}^n e_i h(Z_{1i}, Z_{2i}, \delta_i) \right|$$

$\mathbb{B}^*$ meßbar sein. Da die einzelnen Funktionen h meßbar sein werden, ist dies unter anderem dann erfüllt, wenn das Supremum über $\mathcal{H}$ durch ein abzählbares Supremum ersetzt werden kann. Dies ist z.B. der Fall, wenn K eine abzählbare Teilmenge $\tilde{K}$ besitzt, so daß für jedes $\varphi \in K$ eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \tilde{K}$ existiert mit $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^2$, da dann dies auch für $\mathcal{H}$ gilt. Damit ist insbesondere die Klasse der Indikatoren über Rechtecke zugelassen, die zum klassischen empirischen Prozeß führt. Für praktische Anwendungen stellt diese Meßbarkeitsforderung kein Problem dar (siehe dazu auch Abschnitt 2.3.1 aus van der Vaart und Wellner (1996)).

Des weiteren gehen wir davon aus, daß für die majorisierende Funktion φ_0 die folgenden Integrale endlich sind:

$$\int \varphi_0^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \quad (6.1)$$

$$\int \varphi_0^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \int \left(\int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1_{\{v \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 H_s(dv) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \quad (6.2)$$

$$\int \varphi_0^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \int \left(\frac{1_{\{\delta \neq 3, w_1 + w_2 < z_1 + z_2\}}}{1 - H_s(w_1 + w_2)} - \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 H_v d(w_1, w_2, \delta) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \quad (6.3)$$

$$\int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \quad (6.4)$$

Bemerkung 6.1 Die Endlichkeitsforderung (6.2) ist eine leichte Verschärfung gegenüber der entsprechenden Forderung (5.2). Während wir in (6.2) die quadratische Integrierbarkeit des Integranden fordern, haben wir in (5.2) dies von der nach einer Komponente bedingten Erwartung verlangt, was nach der Jensen-Ungleichung für bedingte Erwartungen eine schwächere Forderung darstellt. Entsprechend gilt dies für die Forderungen (6.3) und (5.3). Damit sind für φ_0 insbesondere die Endlichkeitsforderungen (5.1) - (5.3) erfüllt. Wir können das Integral in (6.2) auf eine ähnliche Form wie in (5.2) bringen. Dazu schreiben wir das innere quadrierte Integral um in:

$$\begin{aligned} & \int \left(\int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1_{\{v \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 H_s(dv) \\ &= \int \int_0^{(z_1+z_2)-} \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1_{\{v \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \frac{1_{\{v \leq y\}} - H_s(y)}{(1 - H_s(y))^2} \tilde{H}_s(dy) \tilde{H}_s(dw) H_s(dv) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{(z_1+z_2)-} \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{H_s(w \wedge y) - H_s(w)H_s(y)}{(1 - H_s(w))^2(1 - H_s(y))^2} \tilde{H}_s(dy) \tilde{H}_s(dw) \\
&= 2 \int_0^{(z_1+z_2)-} \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1_{\{w \leq y\}} H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2(1 - H_s(y))} \tilde{H}_s(dy) \tilde{H}_s(dw)
\end{aligned}$$

Damit kommen wir auf folgendes Integral:

$$2 \int \varphi_0^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1_{\{w \leq y\}} H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \times \frac{1}{1 - H_s(y)} \tilde{H}_s(dy) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)$$

Die Endlichkeitsforderung (6.4) wird benötigt, um bei einem der führenden Terme die Beschränktheit sicherzustellen.

Satz 6.2 Unter diesen Annahmen gilt für den Prozeß $\{S_n(\varphi) : \varphi \in K\}$:

$$\left\{ \sqrt{n} \left(S_n(\varphi) - \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) : \varphi \in K \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} L \circ \alpha_1 \quad \text{in } l^\infty(K)$$

Der Grenzprozeß $L \circ \alpha_1$ ist ein zentrierter Gaußprozeß mit Pfaden fast sicher in $l^\infty(K)$, dem Raum der beschränkten und reellen Funktionen auf K .

Als Spezialfall betrachten wir den empirischen Prozeß, bei dem für K die Klasse der Indikatoren eingesetzt wird. Mit der abkürzenden Schreibweise $S_n(1_{[0, t_1] \times [0, t_2]}) = S_n(t_1, t_2)$ gilt:

Korollar 6.3 Unter den Integrabilitätsannahmen (6.1) - (6.4) für die konstante Funktion $\varphi_0 \equiv 1$ gilt für den empirischen Prozeß:

$$\left\{ \sqrt{n} \left(S_n(t_1, t_2) - \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \gamma(z_1 + z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) : (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2 \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} L \circ \alpha_1$$

Beweis:

Die Klasse $K = \{1_{[0, t_1] \times [0, t_2]} : t_1, t_2 \geq 0\}$ ist eine VC-Klasse (siehe dazu z.B. die Bemerkung nach Definition 5.1.14 in de la Peña und Giné (1999)). Die majorisierende Funktion $\varphi_0 \equiv 1$ ist beschränkt.

□

Bemerkung 6.4 Weitere Beispiele für VC-Klassen finden sich unter anderem in Abschnitt 2.6 aus van der Vaart und Wellner (1996).

Bemerkung 6.5 In die Kovarianzstruktur des Grenzprozesses gehen nur die (Sub-)Verteilungen der beobachtbaren Zufallsvariablen ein. Somit können wir mittels der empirischen Analoga eine Ad-hoc-Schätzung vornehmen.

Beweis zu Satz 6.2:

Zunächst leiten wir ein Invarianzprinzip für α_n her. Mit $\varphi \in K$ durchläuft der führende Term die Klasse

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \left\{ g(w_1, w_2, \delta) = \varphi(w_1, w_2) \gamma(w_1 + w_2) 1_{\{\delta=3\}} \right. \\ & - \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1 - 1_{\{w_1+w_2 \leq w\}}}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\ & \left. + \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \frac{1_{\{w_1+w_2 < z_1+z_2, \delta \neq 3\}}}{1 - H_s(w_1 + w_2)} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) : \varphi \in K \right\}. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß für $\mathcal{H}$ eine gleichmäßige Entropiebedingung erfüllt ist, bestimmen wir in den Lemmata 6.6 - 6.8 für die drei führenden Terme Schranken für die Entropiezahlen. Die Entropiezahl ist der Logarithmus der Überdeckungszahl, die folgendermaßen definiert ist: Die Überdeckungszahl $N(\varepsilon, \mathcal{F}, \|\cdot\|)$ ist die minimale Anzahl an Kugeln vom Radius ε , $\{g \in \mathcal{F} : \|g - f\| < \varepsilon\}$, die gebraucht wird, um die Klasse $\mathcal{F}$ zu überdecken. Die Mittelpunkte der Kugeln müssen nicht zu $\mathcal{F}$ gehören, sollten aber endliche Norm haben. Bei uns wird die Norm immer die L_2 -Norm zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß Q sein.

Mit den Ergebnissen aus den Lemmata 6.6 - 6.8 gilt

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3$$

und damit folgt für die Überdeckungszahl $N(\varepsilon \|h_1 + h_2 + h_3\|, \mathcal{H}, L_2(Q))$ für ein endliches diskretes W-Maß Q auf $\mathbb{R}_+^2 \times \{1, 2, 3\}$ mit $\|h_2\|, \|h_3\| > 0$ und $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} \log N(\varepsilon \|h_1 + h_2 + h_3\|, \mathcal{H}, L_2(Q)) & \leq \log N(\varepsilon \|h_1 + h_2 + h_3\|, \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3, L_2(Q)) \\ & \leq \log \left(N\left(\frac{\varepsilon}{2} \|h_1 + h_2\|, \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2, L_2(Q)\right) \times \right. \\ & \quad \left. N\left(\frac{\varepsilon}{2} \|h_3\|, \mathcal{H}_3, L_2(Q)\right) \right) \\ & \leq \log N\left(\frac{\varepsilon}{4} \|h_1\|, \mathcal{H}_1, L_2(Q)\right) \\ & \quad + \log N\left(\frac{\varepsilon}{4} \|h_2\|, \mathcal{H}_2, L_2(Q)\right) \\ & \quad + \log N\left(\frac{\varepsilon}{2} \|h_3\|, \mathcal{H}_3, L_2(Q)\right) \\ & \leq k_1 4^{2-2/v_1} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/v_1} + k_2 4^{2-2/v_2} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/v_2} \\ & \quad + k_3 2^{2-2/v_3} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/v_3} \\ & \leq c \left(\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/v_1} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/v_2} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/v_3} \right) \\ & \leq 3c \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{v^*} \end{aligned}$$

mit $v^* = \max \{2 - 2/v_1, 2 - 2/v_2, 2 - 2/v_3\} \in (0, 2)$. Insbesondere gehen in c und v^* nur die Konstanten $k_1, \dots, k_3$ und $v_1, \dots, v_3$ ein, die unabhängig von dem zugrundegelegten Maß Q sind. Falls $\|h_2\| = 0$ oder $\|h_3\| = 0$ ist, sind die Funktionen der entsprechenden Klasse Q -fast sicher Null, und damit ist auch in diesem Fall die obige Schranke gegeben, so daß wir für die Menge aller endlichen diskreten W -Maße auf $\mathbb{R}_+^2 \times \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{Q}$, folgern können:

$$\sup_Q \sqrt{\log N(\varepsilon \|h_1 + h_2 + h_3\|, \mathcal{H}, L_2(Q))} \leq \sqrt{3c \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{v^*}}$$

Die obere Schranke ist damit vom Typ $c_1 x^{-\alpha}$ mit $\alpha \in (0, 1)$. Das bedeutet, sie ist auf dem Intervall $(0, 1)$ Lebesgue-integrierbar und erfüllt die gleichmäßige Entropie-Bedingung (2.5.1) aus van der Vaart und Wellner (1996). Es genügt dabei die Endlichkeit des Integrals auf $(0, 1)$ (siehe dazu den Beweis zu Theorem 2.5.2 bzw. die einleitende Bemerkung zu Abschnitt 2.6). So erhalten wir mit Theorem 2.5.2 unter den gemachten Integrabilitäts- und Meßbarkeitsannahmen die Donsker-Eigenschaft für $\mathcal{H}$. Die Quadratintegrierbarkeit von h_2 folgt aus der Tatsache, daß

$$\begin{aligned} & \int h_2^2(w_1, w_2, \delta) H_v d(w_1, w_2, \delta) \\ &= 4 \int \int \int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \varphi_0(x_1, x_2) \gamma(x_1 + x_2) \times \\ & \quad \frac{1_{\{w_1 + w_2 < ((z_1 + z_2) \wedge (x_1 + x_2)), \delta \neq 3\}}}{(1 - H_s(w_1 + w_2))^2} \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) H_v d(w_1, w_2, \delta) \\ &= 4 \int \int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \varphi_0(x_1, x_2) \gamma(x_1 + x_2) \times \\ & \quad \int_0^{((z_1 + z_2) \wedge (x_1 + x_2)) -} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(x_1, x_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\ &\leq 4 \int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1 + z_2) -} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\ & \quad \times \int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \end{aligned}$$

und die letzten beiden Integrale nach (6.4) und (6.1) endlich sind.

Damit erhalten wir die Verteilungskonvergenz auf $l^\infty(\mathcal{H})$ bzw. mit dem Stetigkeitssatz:

$$\sqrt{n} \left(\alpha_n(\varphi) - \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) : \varphi \in K \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} L \circ \alpha_1 \quad \text{in } l^\infty(K)$$

Die Pfade des Grenzprozesses $L \circ \alpha_1$ liegen fast sicher in $l^\infty(K)$, und mit dem multivariaten Zentralen Grenzwertsatz folgt, daß es sich um einen zentrierten Gaußprozeß handelt.

Mit Satz 6.10 und Lemma 1.10.2 (i) aus van der Vaart und Wellner (1996) folgt die Verteilungskonvergenzaussage für S_n .

□

Lemma 6.6 *Für die Klasse der Funktionen*

$\mathcal{H}_1 =$

$$\left\{ g(w_1, w_2) = - \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1 - 1_{\{w_1+w_2 \leq w\}}}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) : \varphi \in K \right\}$$

mit der konstanten Majorante

$$h_1 = 2 \int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)$$

gilt für jedes endliche diskrete Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathbb{R}_+^2$ und $\varepsilon \in (0, 1)$ für die Entropiezahl:

$$\log N(\varepsilon \|h_1\|, \mathcal{H}_1, L_2(Q)) \leq k_1 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{2-2/v_1}$$

Hierbei sind $k_1 > 0$ und $v_1 \geq 2$ zwei Konstanten.

Beweis:

Wir zerlegen die Klasse $\mathcal{H}_1$ in zwei Klassen monotoner Funktionen, indem wir φ in den Positivteil und Negativteil φ^+ und φ^- aufspalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \left\{ g(w_1, w_2) = - \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \times \right. \\ &\quad \left. \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1_{\{w_1+w_2 > w\}}}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) : \varphi \in K \right\} \\ &\subset \left\{ g(w_1, w_2) = \int \varphi^-(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \times \right. \\ &\quad \left. \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1_{\{w_1+w_2 > w\}}}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) : \varphi \in K \right\} \\ &\quad + \left\{ g(w_1, w_2) = - \int \varphi^+(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \times \right. \\ &\quad \left. \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1_{\{w_1+w_2 > w\}}}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) : \varphi \in K \right\} \\ &= \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \end{aligned}$$

Die Klasse $\mathcal{F}_1$ ist eine Klasse monoton wachsender Funktionen. Von einer allgemeineren Klasse diesen Typs wird in Lemma 6.9 gezeigt, daß es sich um eine VC-major Klasse handelt, so daß dies nach Proposition 5.1.13 (iv) aus de la Peña und Giné (1999) auch für $\mathcal{F}_1$ gilt. Eine Majorante der Klasse ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
& \int \varphi^-(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1_{\{w_1+w_2>w\}}}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
& \leq \int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
& = \frac{1}{2} h_1
\end{aligned}$$

Da wir das Integral in (6.4) als endlich voraussetzen, ist $\mathcal{F}_1$ eine beschränkte VC-major Klasse, die nach Lemma 2.6.13 aus van der Vaart und Wellner (1996) eine VC-hull Klasse bildet. Nach Korollar 2.6.12 aus van der Vaart und Wellner (1996) gilt für $\varepsilon \in (0, 1)$ und ein endliches diskretes W-Maß Q für die Entropiezahl:

$$\log N\left(\frac{\varepsilon}{2} \|h_1\|, \mathcal{F}_1, L_2(Q)\right) \leq c_1 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/w_1}$$

c_1 und w_1 sind zwei Konstanten mit $w_1 \geq 2$.

Für die Klasse monoton wachsender Funktionen $-\mathcal{F}_2 = \{-g : g \in \mathcal{F}_2\}$ können wir mit derselben Majorante und denselben Argumenten wie eben darauf schließen, daß es sich um eine VC-hull Klasse handelt. Damit ist auch $\mathcal{F}_2$ eine VC-hull Klasse, und wir können wiederum mit Korollar 2.6.12 aus van der Vaart und Wellner (1996) für ein endliches diskretes W-Maß Q und $\varepsilon \in (0, 1)$ schließen:

$$\log N\left(\frac{\varepsilon}{2} \|h_1\|, \mathcal{F}_2, L_2(Q)\right) \leq c_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/w_2}$$

Auch hier sind c_2 und w_2 zwei Konstanten, wobei $w_2 \geq 2$ ist.

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\log N(\varepsilon \|h_1\|, \mathcal{H}_1, L_2(Q)) & \leq \log N(\varepsilon \|h_1\|, \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2, L_2(Q)) \\
& \leq \log \left(N\left(\frac{\varepsilon}{4} \|h_1\|, \mathcal{F}_1, L_2(Q)\right) N\left(\frac{\varepsilon}{4} \|h_1\|, \mathcal{F}_2, L_2(Q)\right) \right) \\
& = \log N\left(\frac{\varepsilon}{4} \|h_1\|, \mathcal{F}_1, L_2(Q)\right) + \log N\left(\frac{\varepsilon}{4} \|h_1\|, \mathcal{F}_2, L_2(Q)\right) \\
& \leq c_1 2^{2-2/w_1} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/w_1} + c_2 2^{2-2/w_2} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/w_2} \\
& \leq k_1 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/v_1}
\end{aligned}$$

Hierbei ist $k_1 = 2 \max\{c_1 2^{2-2/w_1}, c_2 2^{2-2/w_2}\} > 0$ und $v_1 = \max\{w_1, w_2\} \geq 2$.

□

Lemma 6.7 *Für die Klasse der Funktionen*

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ g(w_1, w_2, \delta) = \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \frac{1_{\{w_1+w_2 < z_1+z_2, \delta \neq 3\}}}{1 - H_s(w_1 + w_2)} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) : \varphi \in K \right\}$$

mit der Majorante

$$h_2(w_1, w_2, \delta) = 2 \int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \frac{1_{\{w_1+w_2 < z_1+z_2, \delta \neq 3\}}}{1 - H_s(w_1 + w_2)} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)$$

gilt für jedes endliche diskrete Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathbb{R}_+^2 \times \{1, 2, 3\}$ mit $\|h_2\| > 0$ und $\varepsilon \in (0, 1)$ für die Entropiezahl:

$$\log N(\varepsilon \|h_2\|, \mathcal{H}_2, L_2(Q)) \leq k_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{2-2/v_2}$$

Hierbei sind $k_2 > 0$ und $v_2 \geq 2$ zwei Konstanten.

Beweis:

Wir argumentieren ähnlich wie im Beweis zu Lemma 6.6 und zerlegen φ in seinen Positiv- und Negativteil:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 &= \left\{ g(w_1, w_2, \delta) = \frac{1_{\{\delta \neq 3\}}}{1 - H_s(w_1 + w_2)} \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \times \right. \\ &\quad \left. 1_{\{w_1+w_2 < z_1+z_2\}} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) : \varphi \in K \right\} \\ &\subset \left\{ g(w_1, w_2, \delta) = \frac{1_{\{\delta \neq 3\}}}{1 - H_s(w_1 + w_2)} \int \varphi^+(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \times \right. \\ &\quad \left. 1_{\{w_1+w_2 < z_1+z_2\}} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) : \varphi \in K \right\} \\ &\quad + \left\{ g(w_1, w_2, \delta) = \frac{1_{\{\delta \neq 3\}}}{1 - H_s(w_1 + w_2)} \int -\varphi^-(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \times \right. \\ &\quad \left. 1_{\{w_1+w_2 < z_1+z_2\}} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) : \varphi \in K \right\} \\ &= \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \end{aligned}$$

Der Nenner $1 - H_s(w_1 + w_2)$ des Bruches, den wir vor das Integral gezogen haben, ist für $w_1 + w_2 \geq H_s^{-1}(1)$ Null. In diesem Fall ist auch das Integral Null, so daß wir das Produkt als Null setzen.

Die Klasse $\mathcal{F}_1$ besteht im wesentlichen aus:

$$\mathcal{F}_1^* = \left\{ g(w_1, w_2) = \int \varphi^+(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) 1_{\{w_1+w_2 < z_1+z_2\}} \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) : \varphi \in K \right\}$$

Da $-\mathcal{F}_1^*$ eine Klasse monoton wachsender Funktionen ist, folgt mit Lemma 6.9 und Proposition 5.1.13 (iv) aus de la Peña und Giné (1999), daß es sich hierbei um eine durch

die Konstante $\int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)$ beschränkte VC-major Klasse handelt. Diese bildet wiederum nach Lemma 2.6.13 aus van der Vaart und Wellner (1996) eine VC-hull Klasse. Diese Eigenschaft überträgt sich nach Lemma 2.6.18 (vi) aus van der Vaart und Wellner (1996) auf $\mathcal{F}_1$. Das heißt, mit Korollar 2.6.12 aus van der Vaart und Wellner (1996) können wir mit der Majorante $\frac{1}{2}h_2$ für $\varepsilon \in (0, 1)$ und jedes endliche diskrete W-Maß Q mit $\|h_2\| > 0$ folgern:

$$\log N\left(\frac{\varepsilon}{2}\|h_2\|, \mathcal{F}_1, L_2(Q)\right) \leq c_1 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/w_1}$$

Dabei ist c_1 eine positive Konstante, und w_1 als VC-Index größergleich 2. Analog kommen wir für die Klasse $\mathcal{F}_2$ auf

$$\log N\left(\frac{\varepsilon}{2}\|h_2\|, \mathcal{F}_2, L_2(Q)\right) \leq c_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/w_2},$$

mit $c_2 > 0$ und $w_2 \geq 2$.

Wenn wir die beiden Ergebnisse zusammensetzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \log N(\varepsilon\|h_2\|, \mathcal{H}_2, L_2(Q)) &\leq \log N(\varepsilon\|h_2\|, \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2, L_2(Q)) \\ &\leq \log \left(N\left(\frac{\varepsilon}{4}\|h_2\|, \mathcal{F}_1, L_2(Q)\right) N\left(\frac{\varepsilon}{4}\|h_2\|, \mathcal{F}_2, L_2(Q)\right) \right) \\ &= \log N\left(\frac{\varepsilon}{4}\|h_2\|, \mathcal{F}_1, L_2(Q)\right) + \log N\left(\frac{\varepsilon}{4}\|h_2\|, \mathcal{F}_2, L_2(Q)\right) \\ &\leq c_1 2^{2-2/w_1} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/w_1} + c_2 2^{2-2/w_2} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/w_2} \\ &\leq k_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/v_2} \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung folgt für $k_2 = 2 \max\{c_1 2^{2-2/w_1}, c_2 2^{2-2/w_2}\} > 0$ und für $v_2 = \max\{w_1, w_2\} \geq 2$.

□

Lemma 6.8 *Für die Klasse der Funktionen*

$$\mathcal{H}_3 = \{g(w_1, w_2, \delta) = \varphi(w_1, w_2) \gamma(w_1 + w_2) 1_{\{\delta=3\}} : \varphi \in K\}$$

mit der Majorante

$$h_3(w_1, w_2, \delta) = \varphi_0(w_1, w_2) \gamma(w_1 + w_2) 1_{\{\delta=3\}}$$

gilt für jedes endliche diskrete Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathbb{R}_+^2 \times \{1, 2, 3\}$ mit $\|h_3\| > 0$ und $\varepsilon \in (0, 1)$ für die Entropiezahl:

$$\log N(\varepsilon \|h_3\|, \mathcal{H}_3, L_2(Q)) \leq k_3 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/v_3}$$

Hierbei sind $k_3 > 0$ und $v_3 \geq 2$ zwei Konstanten.

Beweis:

Da K eine VC-Klasse ist, gilt dies nach Lemma 2.6.18 (vi) aus van der Vaart und Wellner (1996) auch für $\mathcal{H}_3$. Die Majorante ist:

$$|\varphi(w_1, w_2)|\gamma(w_1 + w_2)1_{\{\delta=3\}} \leq \varphi_0(w_1, w_2)\gamma(w_1 + w_2)1_{\{\delta=3\}} = h_3(w_1, w_2, \delta)$$

Mit dem Theorem 2.6.7 aus van der Vaart und Wellner (1996) erhalten wir für ein endliches diskretes W-Maß Q mit $\|h_3\| > 0$ und $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$N(\varepsilon \|h_3\|, \mathcal{H}_3, L_2(Q)) \leq cv_3(16e)^{v_3} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2(v_3-1)}$$

c ist eine Konstante und v_3 der VC-Index von $\mathcal{H}_3$.

Das heißt (siehe Korollar 2.6.12 aus van der Vaart und Wellner (1996)), es gilt:

$$\log N(\varepsilon \|h_3\|, \mathcal{H}_3, L_2(Q)) \leq k_3 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2-2/v_3}$$

Die Konstante k_3 hängt dabei nur von v_3 ab.

□

Lemma 6.9 *Die Klasse der Funktionen*

$$\mathcal{G} = \left\{ g : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ ist meßbar und es gibt eine monoton wachsende Funktion } f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } g(w_1, w_2) = f(w_1 + w_2) \right\}$$

ist eine VC-major Klasse.

Beweis:

Um zu zeigen, daß $\mathcal{G}$ eine VC-major Klasse ist, müssen wir zeigen, daß es sich bei $M = \{ \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^2 : g(w_1, w_2) > t\} : t \in \mathbb{R}, g \in \mathcal{G} \}$ um eine VC-Klasse von Mengen handelt. Für sie gilt:

$$\begin{aligned} M &\subset \{ \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^2 : f(w_1 + w_2) > t\} : t \in \mathbb{R}, f \text{ monoton wachsend} \} \\ &\subset \emptyset \cup \{ \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^2 : w_1 + w_2 \geq x\} : x \in \mathbb{R} \} \\ &\quad \cup \{ \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^2 : w_1 + w_2 > x\} : x \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Auf diese letzten drei Mengensysteme kommen wir, da wir unterscheiden müssen, ob f immer kleinergleich t ist oder wie sich f in der Umgebung der Stelle $f^{-1}(t)$, falls

das Urbild existiert, verhält. Aufgrund der Monotonie von f haben wir mit den drei Mengensystemen alle Möglichkeiten erfaßt. Bei $\{\{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^2 : w_1 + w_2 \geq x\} : x \in \mathbb{R}\}$ handelt es sich um eine VC-Klasse vom Index zwei, da es nicht möglich ist, für eine beliebige zweielementige Menge sämtliche Teilmengen herauszuschneiden:

Sei $L = \{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\}$ eine beliebige Menge zweier Vektoren. O.B.d.A. können wir davon ausgehen, daß $u_1 + u_2 \geq v_1 + v_2$ gilt. Dann ist es nicht möglich, den Vektor (v_1, v_2) herauszuschneiden, denn angenommen, dies ginge, dann gäbe es ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\{(v_1, v_2)\} = L \cap \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^2 : w_1 + w_2 \geq x\}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_1 + v_2 \geq x &\Rightarrow u_1 + u_2 \geq v_1 + v_2 \geq x \\ \Rightarrow (u_1, u_2) \in L \cap \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^2 : w_1 + w_2 \geq x\} &\text{ Widerspruch.} \end{aligned}$$

Entsprechend ist auch $\{\{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^2 : w_1 + w_2 > x\} : x \in \mathbb{R}\}$ eine VC-Klasse vom Index zwei. Mit der Proposition 5.1.13 (ii) und (iv) aus de la Peña und Giné (1999) folgt die VC Eigenschaft für M .

□

Satz 6.10 *Für den Restterm $R_n(\varphi)$ gilt:*

$$\sup_{\varphi \in K} |R_n(\varphi)| = o_p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Beweis:

Wir zeigen, daß die Aussagen in den einzelnen Lemmata aus dem vorigen Kapitel, in denen die Restterme untersucht wurden, gleichmäßig in φ gelten.

In Lemma 5.8:

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in K} & \left| \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \left(\tilde{H}_{s_n}(dw) - \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \right| \\ & \leq \int \sup_{\varphi \in K} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \left| \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \left(\tilde{H}_{s_n}(dw) - \tilde{H}_s(dw) \right) \right| \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \\ & \leq \int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \left| \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \left(\tilde{H}_{s_n}(dw) - \tilde{H}_s(dw) \right) \right| \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Da φ_0 die Voraussetzungen (5.1)-(5.3) erfüllt, können wir für diesen Term das Ergebnis aus dem Beweis zu Lemma 5.8 übernehmen und erhalten damit die gewünschte Konvergenzaussage.

In Lemma 5.9:

Um zu zeigen, daß in diesem Fall der Term gleichmäßig in φ vernachlässigbar ist, benutzen wir ein Invarianzprinzip für U-Statistiken. Wir wenden Theorem 5.3.7 aus de la Peña und Giné (1999) an.

$$\begin{aligned}
& \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{H_{s_n}(w) - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \left(\tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) - \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(1_{\{\delta_i=3\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})^-} \frac{1_{\{Z_{1j}+Z_{2j} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right. \\
&\quad \left. - \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1_{\{Z_{1j}+Z_{2j} \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(h((Z_{1i}, Z_{2i}, \delta_i), (Z_{1j}, Z_{2j}, \delta_j)) - \int h((z_1, z_2, \delta), (Z_{1j}, Z_{2j}, \delta_j)) H_v d(z_1, z_2, \delta) \right)
\end{aligned}$$

Dabei ist $h : (\mathbb{R}_+^2 \times \{1, 2, 3\}) \times (\mathbb{R}_+^2 \times \{1, 2, 3\}) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine bezüglich $H_v \otimes H_v$ integrierbare Funktion. Mit φ durchläuft h die Klasse:

$$\mathcal{H} = \{h : \varphi \in K\}$$

Eigentlich müßten wir die symmetrisierte Form von h betrachten, wir verweisen dazu aber auf die Bemerkung 5.3.9 aus de la Peña und Giné (1999). Im folgenden überlegen wir uns, daß es sich bei $\mathcal{H}$ um eine VC-Klasse handelt. Dazu ziehen wir auch Ergebnisse aus van der Vaart und Wellner (1996) heran, dessen VC-Klassenbegriff äquivalent zu dem von de la Peña und Giné (1999) ist (siehe dazu auch Aufgabe 11 in Kapitel 2.6 aus van der Vaart und Wellner (1996)). Da die Klasse der φ 's eine VC-Klasse ist, überträgt sich diese Eigenschaft nach Lemma 2.6.18 (vi) aus van der Vaart und Wellner (1996) auf die Klasse $\mathcal{H}$. Eine Majorante für diese Klasse ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
|h(\cdot)| &= 1_{\{\delta_1=3\}} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \left| \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1_{\{w_1+w_2 \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right| \\
&\leq 1_{\{\delta_1=3\}} \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \left| \int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1_{\{w_1+w_2 \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right| \\
&= h_0((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2))
\end{aligned}$$

Diese Majorante ist quadratintegrierbar, denn:

$$\begin{aligned}
& \int \int h_0^2((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2)) H_v d(w_1, w_2, \delta_2) H_v d(z_1, z_2, \delta_1) \\
&= \int \varphi_0^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \int \left(\int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1_{\{v \leq w\}} - H_s(w)}{(1 - H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 H_s(dv) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)
\end{aligned}$$

Dieses Integral wurde in (6.2) als endlich vorausgesetzt.

Damit ist das Theorem 5.3.7 aus de la Peña und Giné (1999) anwendbar und mit $k = 2$

folgt für die Hoeffding-Projektion:

$$\begin{aligned}
\pi_2(h) &= h((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2)) - \int h((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2)) H_v d(z_1, z_2, \delta_1) \\
&\quad - \int h((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2)) H_v d(w_1, w_2, \delta_2) \\
&\quad + \int h((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2)) H_v d(w_1, w_2, \delta_2) H_v d(z_1, z_2, \delta_1) \\
&= h((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2)) - \int h((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2)) H_v d(z_1, z_2, \delta_1)
\end{aligned}$$

Es bleiben aufgrund der Zentrierung in der zweiten Komponente von h nur die beiden obigen Terme übrig. Somit ergibt sich für die U-Statistik dieser Projektion:

$$\begin{aligned}
U_n(\pi_2(h)) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_i^n \sum_{j \neq i}^n \left(h((Z_{1i}, Z_{2i}, \delta_i), (Z_{1j}, Z_{2j}, \delta_j)) \right. \\
&\quad \left. - \int h((z_1, z_2, \delta), (Z_{1j}, Z_{2j}, \delta_j)) H_v d(z_1, z_2, \delta) \right)
\end{aligned}$$

Für sie gilt das Invarianzprinzip:

$$\{nU_n(\pi_2(h)) : h \in \mathcal{H}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\sqrt{2}R(\pi_2(h)) : h \in \mathcal{H}\} \quad \text{in } l^\infty(\mathcal{H}),$$

wobei $l^\infty(\mathcal{H})$ den Raum der beschränkten und reellen Funktionen auf $\mathcal{H}$ bezeichnet. $l^\infty(\mathcal{H})$ ist mit der Supremumsnorm auf $\mathcal{H}$ versehen. Da der Grenzprozeß R fast sicher in $l^\infty(\mathcal{H})$ liegt, folgt mit Cramér Slutsky:

$$\sup_{h \in \mathcal{H}} \left| \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n} U_n(\pi_2(h)) \right| = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n^2} \sup_{h \in \mathcal{H}} |nU_n(\pi_2(h))| \xrightarrow{P} 0$$

Mit dem Invarianzprinzip haben wir die Summe über $i \neq j$ bearbeitet. Falls die Summationsindizes gleich sind, gilt:

$$\begin{aligned}
&\sup_{\varphi \in K} \left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1_{\{\delta_i=3\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{-H_s(w)}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1_{\{Z_{1i}+Z_{2i} \leq w\}} - H_s(w)}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) \right| \\
&\leq \sup_{\varphi \in K} \left\{ \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1_{\{\delta_i=3\}} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{H_s(w)}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{|1_{\{Z_{1i}+Z_{2i} \leq w\}} - H_s(w)|}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1_{\{\delta_i=3\}} \sup_{\varphi \in K} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{H_s(w)}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right. \\
&\quad \left. + \sup_{\varphi \in K} \left\{ \int |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{|1_{\{Z_{1i}+Z_{2i} \leq w\}} - H_s(w)|}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right\} \right) \\
&\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1_{\{\delta_i=3\}} \varphi_0(Z_{1i}, Z_{2i}) \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{H_s(w)}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \right. \\
&\quad \left. + \int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{|1_{\{Z_{1i}+Z_{2i} \leq w\}} - H_s(w)|}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) \\
&= I + II
\end{aligned}$$

Für diese beiden Summen zeigen wir die stochastische Konvergenz gegen Null mit der entsprechenden Rate. Dazu schauen wir uns deren Erwartungswerte an. Für den ersten genügt es, nach Bemerkung 5.7 das Integral auf der Menge $\{(z_1, z_2) : z_1 + z_2 \leq a_n\}$ zu betrachten.

$$\begin{aligned}
E[\cdot] &\leq \frac{1}{n} \int_0^{a_n} \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1-H_s(w))^2} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&= o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Die Ordnung wird in Lemma 5.15 bestimmt.

Für II setzen wir für $E[|1_{\{Z_1+Z_2 \leq w\}} - H_s(w)|] = 2H_s(w)(1-H_s(w))$ ein:

$$\begin{aligned}
E[II] &= \frac{1}{n} \int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{2H_s(w)}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&\leq \frac{2}{n} \int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \\
&= O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Das Integral ist endlich (siehe dazu Bemerkung 5.5).

In Lemma 5.10:

Wir gehen hier analog zum vorigen Beweis vor. Das heißt, wir argumentieren wieder mit Hilfe des Invarianzprinzips aus de la Peña und Giné (1999).

$$\int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1+z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1-H_s(w)} \left(\tilde{H}_{s_n}(dw) - \tilde{H}_s(dw) \right) \left(\tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) - \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(1_{\{\delta_i=3\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \times \right. \\
&\quad \left(\frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j} + Z_{2j} < Z_{1i} + Z_{2i}\}}}{1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})} - \int_0^{(Z_{1i} + Z_{2i})-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \\
&\quad - \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \left(\frac{1_{\{\delta_j \neq 3, Z_{1j} + Z_{2j} < z_1 + z_2\}}}{1 - H_s(Z_{1j} + Z_{2j})} - \int_0^{(z_1 + z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \Big) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(h((Z_{1i}, Z_{2i}, \delta_i), (Z_{1j}, Z_{2j}, \delta_j)) - \int h((z_1, z_2, \delta), (Z_{1j}, Z_{2j}, \delta_j)) H_v d(z_1, z_2, \delta) \right)
\end{aligned}$$

Dabei ist $h : (\mathbb{R}_+^2 \times \{1, 2, 3\}) \times (\mathbb{R}_+^2 \times \{1, 2, 3\}) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine bezüglich $H_v \otimes H_v$ integrierbare Funktion. Mit φ durchläuft h die Klasse:

$$\mathcal{H} = \{h : \varphi \in K\}$$

Wir können wieder nach der Bemerkung 5.3.9 aus de la Peña und Giné (1999) die nichtsymmetrisierte Form von h untersuchen. Da K eine VC-Klasse ist, gilt dies nach Lemma 2.6.18 (vi) aus van der Vaart und Wellner (1996) auch für $\mathcal{H}$. Eine Majorante für diese Klasse ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
|h(\cdot)| &= 1_{\{\delta_1=3\}} |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \left| \frac{1_{\{\delta_2 \neq 3, w_1 + w_2 < z_1 + z_2\}}}{1 - H_s(w_1 + w_2)} - \int_0^{(z_1 + z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right| \\
&\leq 1_{\{\delta_1=3\}} \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \left| \frac{1_{\{\delta_2 \neq 3, w_1 + w_2 < z_1 + z_2\}}}{1 - H_s(w_1 + w_2)} - \int_0^{(z_1 + z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right| \\
&= h_0((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2))
\end{aligned}$$

Diese Majorante ist quadratintegrierbar, denn:

$$\begin{aligned}
&\int \int h_0^2((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2)) H_v d(w_1, w_2, \delta_2) H_v d(z_1, z_2, \delta_1) \\
&= \int \varphi_0^2(z_1, z_2) \gamma^2(z_1 + z_2) \int \left(\frac{1_{\{\delta_2 \neq 3, w_1 + w_2 < z_1 + z_2\}}}{1 - H_s(w_1 + w_2)} - \int_0^{(z_1 + z_2)-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right)^2 \\
&\quad H_v d(w_1, w_2, \delta_2) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2)
\end{aligned}$$

Dieses Integral ist nach (6.3) endlich.

Damit ist das Theorem 5.3.7 aus de la Peña und Giné (1999) anwendbar. Für die

Hoeffding-Projektion ($k = 2$) folgt:

$$\begin{aligned}
\pi_2(h) &= h((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2)) - \int h((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2)) H_v d(z_1, z_2, \delta_1) \\
&\quad - \int h((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2)) H_v d(w_1, w_2, \delta_2) \\
&\quad + \int h((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2)) H_v d(w_1, w_2, \delta_2) H_v d(z_1, z_2, \delta_1) \\
&= h((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2)) - \int h((z_1, z_2, \delta_1), (w_1, w_2, \delta_2)) H_v d(z_1, z_2, \delta_1)
\end{aligned}$$

Bezüglich der zweiten Komponente ist h zentriert, so daß sich nach dieser Komponente ausintegriert, Null ergibt. Die U-Statistik dieses Terms sieht demnach so aus:

$$\begin{aligned}
U_n(\pi_2(h)) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_i^n \sum_{j \neq i}^n \left(h((Z_{1i}, Z_{2i}, \delta_i), (Z_{1j}, Z_{2j}, \delta_j)) \right. \\
&\quad \left. - \int h((z_1, z_2, \delta), (Z_{1j}, Z_{2j}, \delta_j)) H_v d(z_1, z_2, \delta) \right)
\end{aligned}$$

Für sie gilt:

$$\{nU_n(\pi_2(h)) : h \in \mathcal{H}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\sqrt{2}R(\pi_2(h)) : h \in \mathcal{H}\} \quad \text{in } l^\infty(\mathcal{H})$$

Hierbei bezeichnet wieder $l^\infty(\mathcal{H})$ den Raum der beschränkten und reellen Funktionen auf $\mathcal{H}$, versehen mit der Supremumsnorm. Da der Grenzprozeß R fast sicher in $l^\infty(\mathcal{H})$ liegt, folgt mit Cramér Slutsky:

$$\sup_{h \in \mathcal{H}} \left| \frac{\sqrt{n}(n-1)}{n} U_n(\pi_2(h)) \right| = \frac{\sqrt{n}(n-1)}{n^2} \sup_{h \in \mathcal{H}} |nU_n(\pi_2(h))| \xrightarrow{P} 0$$

Als nächstes schauen wir uns die Summe über $i = j$ an:

$$\begin{aligned}
\sup_{\varphi \in K} &\left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1_{\{\delta_i=3\}} \varphi(Z_{1i}, Z_{2i}) \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{-1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \left(\frac{1_{\{\delta_i \neq 3, Z_{1i}+Z_{2i} < z_1+z_2\}}}{1-H_s(Z_{1i}+Z_{2i})} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1_{\{\delta_i=3\}} \sup_{\varphi \in K} |\varphi(Z_{1i}, Z_{2i})| \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right. \\
&\quad \left. + \sup_{\varphi \in K} \left\{ \int |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \left| \frac{1_{\{\delta_i \neq 3, Z_{1i}+Z_{2i} < z_1+z_2\}}}{1-H_s(Z_{1i} + Z_{2i})} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right| \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right\} \right) \\
&\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(1_{\{\delta_i=3\}} \varphi_0(Z_{1i}, Z_{2i}) \gamma(Z_{1i} + Z_{2i}) \int_0^{(Z_{1i}+Z_{2i})-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right. \\
&\quad \left. + \int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \left| \frac{1_{\{\delta_i \neq 3, Z_{1i}+Z_{2i} < z_1+z_2\}}}{1-H_s(Z_{1i} + Z_{2i})} - \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right| \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) \right)
\end{aligned}$$

Nachdem wir oben die Dreiecksungleichung benutzt haben, verwenden wir sie nochmal für die innere Differenz im zweiten Term und bilden den Erwartungswert. Dieser ist gleich:

$$\frac{3}{n} \int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{1-H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \tilde{H}^3 d(z_1, z_2) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Das Integral ist nach Bemerkung 5.5 endlich.

In Lemma 5.11:

$$\begin{aligned}
&\sup_{\varphi \in K} \left| \int \varphi(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{(H_{s_n}(w) - H_s(w))^2}{(1-H_s(w))^2(1-H_{s_n}(w))} \tilde{H}_{s_n}(dw) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \right| \\
&\leq \int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{(H_{s_n}(w) - H_s(w))^2}{(1-H_s(w))^2(1-H_{s_n}(w))} \tilde{H}_{s_n}(dw) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2)
\end{aligned}$$

Wir haben hier den Betrag in das Integral gezogen und die Majorisierung von K durch φ_0 ausgenutzt. Das verbliebene Integral entspricht gerade dem C_{n_3} Term für φ_0 . Da für φ_0 die Voraussetzungen (5.1)-(5.3) erfüllt sind, können wir mit dem Beweis für festes φ auf die Konvergenz mit der entsprechenden Rate schließen.

In Lemma 5.12:

Mit der Abschätzung für B_{n_1} aus dem Beweis bekommen wir folgendes:

$$\begin{aligned}
\sup_{\varphi \in K} |B_n| &\leq \frac{1}{2n} \sup_{\varphi \in K} \left\{ \int |\varphi(z_1, z_2)| \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1-H_{s_n}(w))^2} \tilde{H}_{s_n}(dw) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \right\} \\
&\leq \frac{1}{2n} \int \varphi_0(z_1, z_2) \gamma(z_1 + z_2) \int_0^{(z_1+z_2)-} \frac{1}{(1-H_{s_n}(w))^2} \tilde{H}_{s_n}(dw) \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2)
\end{aligned}$$

Dieses empirische Integral wird in Lemma 5.12 bearbeitet.

In Lemma 5.13:

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in K} |D_n| \leq & \int \varphi_0(z_1, z_2) \frac{1}{2} \exp(\Delta_n(z_1 + z_2)) \left(\int_0^{(z_1+z_2)^-} \frac{1}{1 - H_s(w)} \tilde{H}_s(dw) \right. \\ & \left. - n \int_0^{(z_1+z_2)^-} \ln \left(1 + \frac{1}{n(1 - H_{s_n}(w))} \right) \tilde{H}_{s_n}(dw) \right)^2 \tilde{H}_n^3 d(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Somit können wir mit Lemma 5.13 auf die Konvergenz schließen.

Damit sind alle Restterme untersucht, und der Beweis ist beendet.

□

7 Simulationen

7.1 Allgemeines

In diesem Kapitel sind die Simulationen, die wir zu den unterschiedlichen Aspekten durchgeführt haben, zusammengefaßt.

In den folgenden drei Abschnitten haben wir einige Simulationen dargestellt, die einen optischen Eindruck über die Güte des Schätzers der Verteilungsfunktion liefern. Wir haben dabei jeweils für (X_1, X_2) ein bivariates Exponentialverteilungsmodell gewählt, d.h. die Marginalien sind jeweils exponentialverteilt. Während wir im ersten Modell Unabhängigkeit zwischen X_1 und X_2 annehmen, wird in den anderen beiden eine unterschiedliche Abhängigkeitsstruktur modelliert. Für die zensierende Variable wurde eine eindimensionale Exponentialverteilung verwendet. Der Zensierungsgrad lag meist zwischen dreißig und vierzig Prozent, wobei ein Datum als zensiert gilt, falls mindestens eine Komponente zensiert ist. Für die zu wählenden Parameter der Verteilungen haben wir hier jeweils eine „typische“ Konstellation ausgesucht. Selbstverständlich wurden in einer umfangreicheren Simulationsstudie verschiedene Parameterwerte getestet, die vergleichbare Ergebnisse lieferten.

Um den Schätzer und die Verteilungsfunktion darzustellen, haben wir ein 50x50 Gitter in dem Bereich, in dem Daten auftraten, benutzt und an jedem Gitterpunkt den entsprechenden Wert berechnet. Dazwischen wird linear interpoliert. Wir haben drei verschiedene Stichprobenumfänge ($n = 20, 50, 100$) gewählt. Unter den Abbildungen haben wir festgehalten, wie oft welcher δ -Fall bei den Daten auftrat.

Charakteristisch bei den Plots sind die Plateaus, die anzeigen, daß in den entsprechenden Bereichen keine unzensierten Daten gefallen sind, die Masse erhalten. Diese Plateaus werden bei steigendem Stichprobenumfang immer weiter in den Tail der Verteilung getragen, da immer mehr und „größere“ unzensierte Daten auftreten. Der Schätzer nähert sich immer besser der Verteilungsfunktion an. Zudem werden bei höherem Stichprobenumfang die Sprunghöhen des diskreten Schätzers kleiner, und die Funktion erhält dadurch ein glatteres Aussehen.

Im fünften Abschnitt befinden sich die Ergebnisse der Monte-Carlo Simulationen, mit deren Hilfe wir einen Vergleich zwischen S_n und T_n als Schätzer für die Verteilungsfunktion durchgeführt haben.

Im letzten Abschnitts des Kapitels gehen wir auf die Simulationsstudie von Lin, Sun und Ying (1999) ein und vergleichen die Ergebnisse mit denen unseres Schätzers S_n .

7.2 Exponentialverteilung mit unabhängigen Komponenten

Wir haben für X_1, X_2 und C Exponentialverteilungen gewählt. Ferner sind alle Variablen unabhängig untereinander:

$$\begin{aligned} X_1, X_2 &\sim \exp(1) \\ C &\sim \exp(0.3) \end{aligned}$$

Die zugehörige Verteilungsfunktion von (X_1, X_2) ist damit auf $\mathbb{R}_+^2$:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (1 - \exp(-x))(1 - \exp(-y)) \\ &= 1 - \exp(-x) - \exp(-y) + \exp(-x - y) \end{aligned}$$

Die Simulationen brachten folgende Ergebnisse:

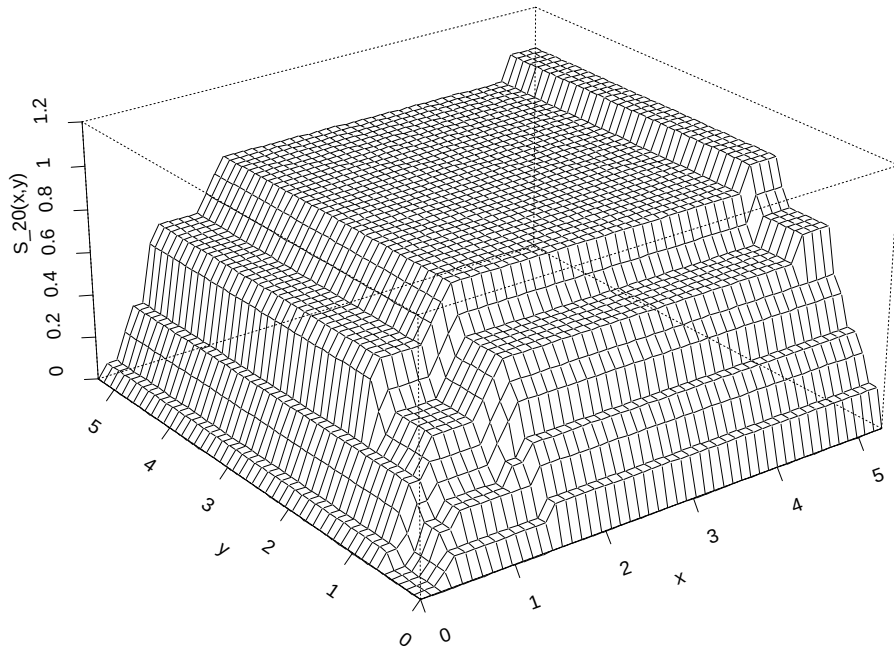


Abbildung 1: $n = 20$, $\delta = 1 : 4$, $\delta = 2 : 3$, $\delta = 3 : 13$

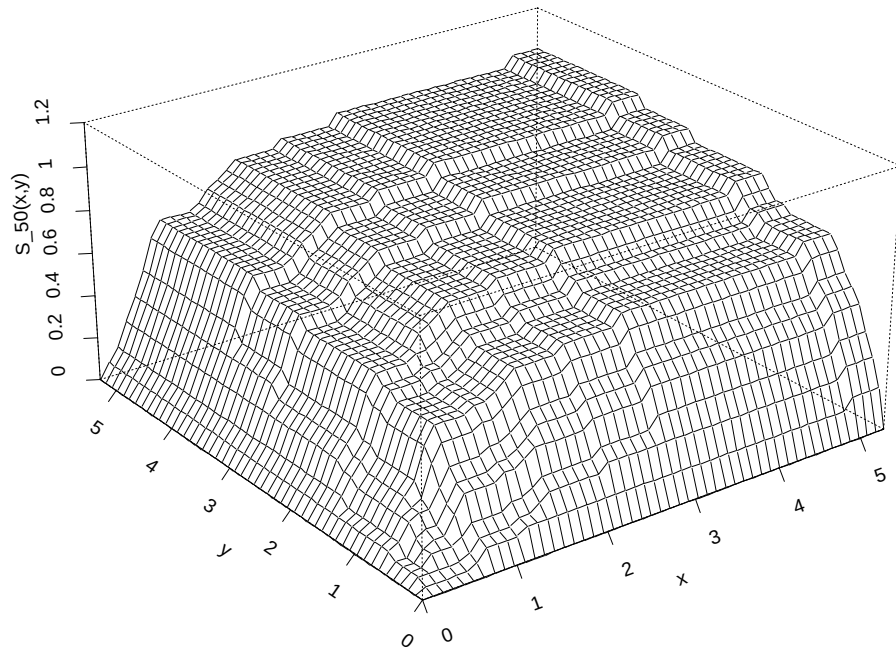


Abbildung 2: $n = 50$, $\delta = 1 : 7$, $\delta = 2 : 12$, $\delta = 3 : 31$

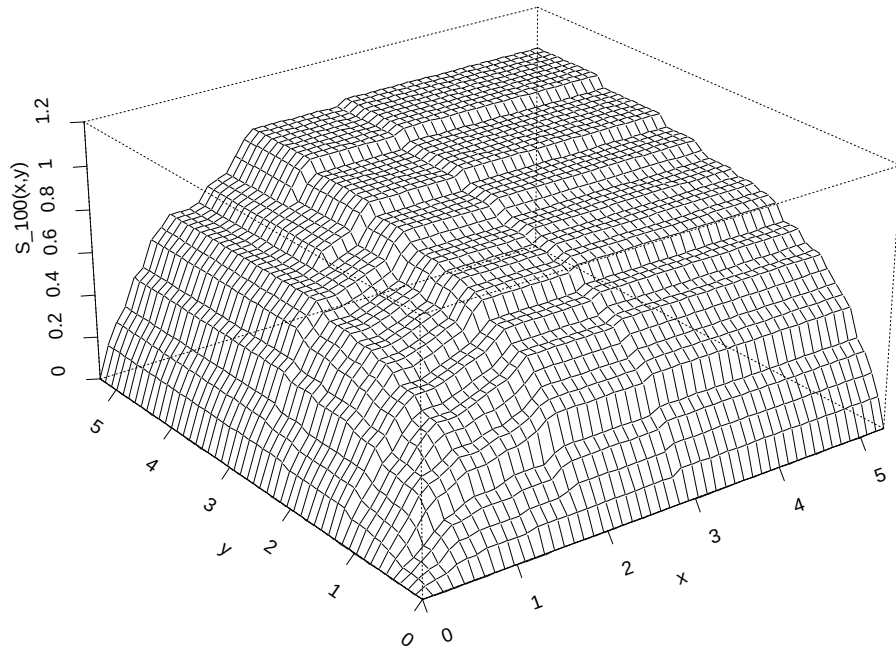


Abbildung 3: $n = 100$, $\delta = 1 : 26$, $\delta = 2 : 14$, $\delta = 3 : 60$

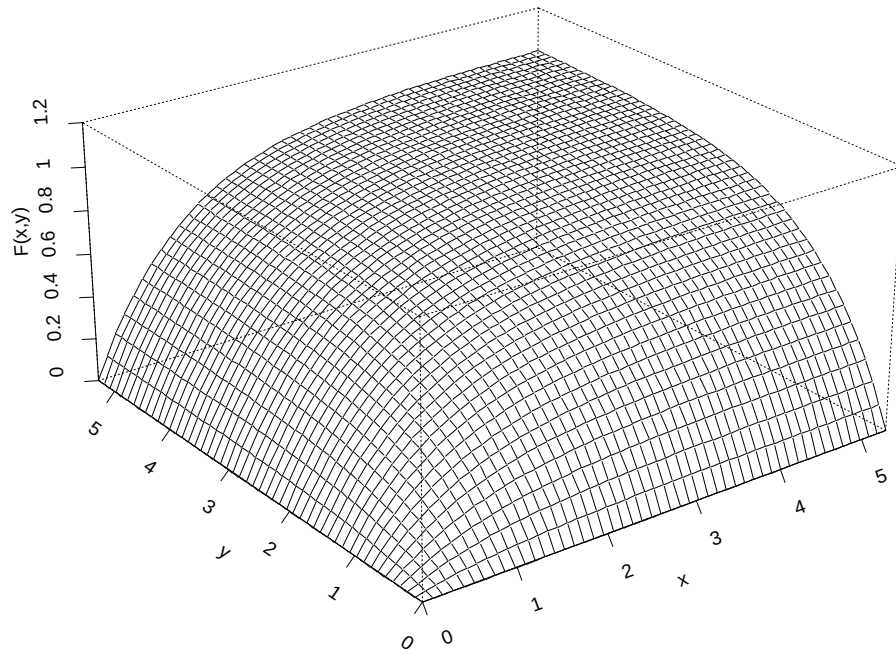


Abbildung 4: Verteilungsfunktion

7.3 Exponentialverteilung nach Marshall und Olkin

Der Vektor setzt sich nach Devroye (1986), S. 585, folgendermaßen zusammen:

$$(X_1, X_2) = (\min(E_1/\lambda_1, E_3/\lambda_3), \min(E_2/\lambda_2, E_3/\lambda_3))$$

Die Variablen E_1, E_2, E_3 sind unabhängig und $\exp(1)$ verteilt. Für die Parameter haben wir $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ gesetzt. Die Verteilungsfunktion für $x, y \geq 0$ ist gegeben durch:

$$F(x, y) = 1 - \exp(-3x) - \exp(-3y) + \exp(-x - y - 2 \max(x, y))$$

Der Korrelationskoeffizient von X_1, X_2 ist $1/2$ (siehe Johnson und Kotz (1972), S. 266). Die zensierende Variable ist $\exp(0.75)$ verteilt.

Bei den Simulationen ergab sich folgendes:

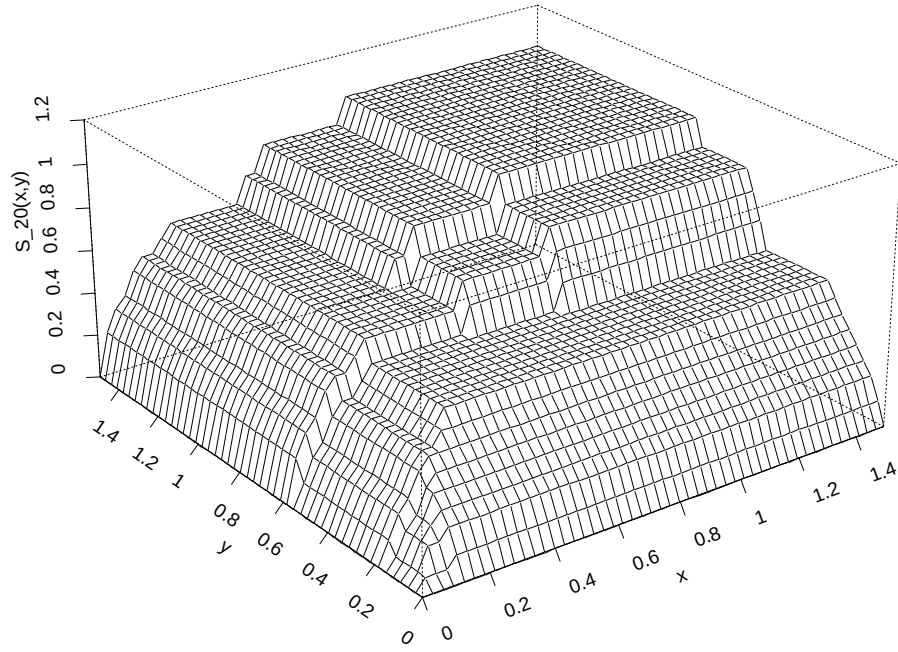


Abbildung 5: $n = 20$, $\delta = 1 : 4$, $\delta = 2 : 2$, $\delta = 3 : 14$

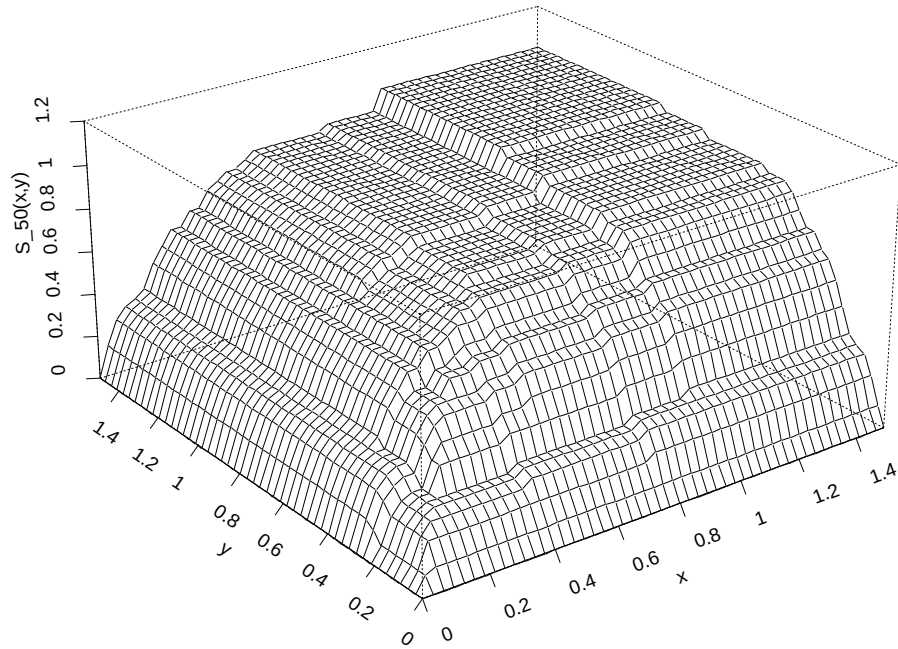


Abbildung 6: $n = 50$, $\delta = 1 : 8$, $\delta = 2 : 7$, $\delta = 3 : 35$

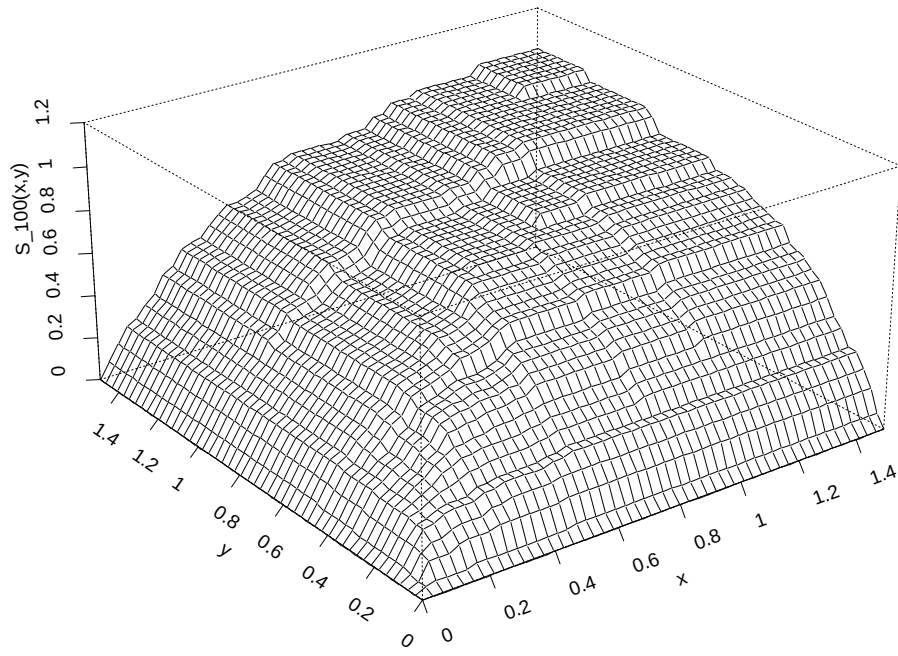


Abbildung 7: $n = 100$, $\delta = 1 : 27$, $\delta = 2 : 12$, $\delta = 3 : 61$

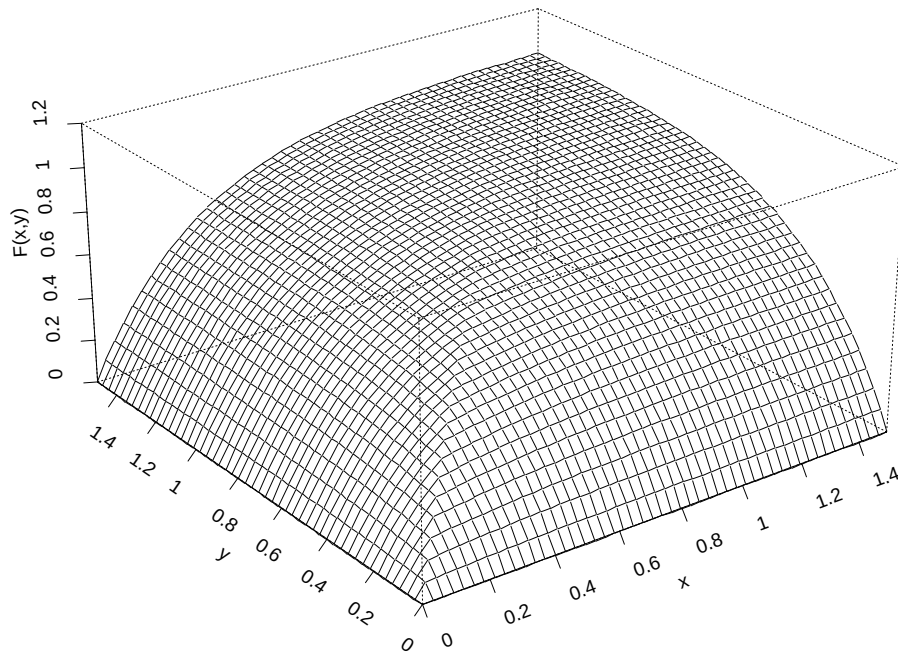


Abbildung 8: Verteilungsfunktion

7.4 Exponentialverteilung nach Gumbel

Die Lebensdauern werden hier nach Devroye (1986), S. 584, so gebildet:

$$(X_1, X_2) = (-\log(U), -\log(V))$$

Dabei sind U, V bivariat uniform verteilt nach Morgenstern, das heißt:

$$\begin{aligned} U &\sim U[0, 1] \\ V &= \min \left\{ W_1, -\frac{W_2}{a(2U-1)} \right\} \quad \text{falls } U < 1/2 \\ V &= \max \left\{ W_1, 1 - \frac{W_2}{a(2U-1)} \right\} \quad \text{falls } U \geq 1/2 \end{aligned}$$

W_1 und W_2 sind $U[0, 1]$ verteilt und untereinander und von U unabhängig; a ist ein Parameter mit $a \in (0, 1]$.

Die Verteilungsfunktion von (X_1, X_2) ist auf $\mathbb{R}_+^2$ gegeben durch:

$$F(x, y) = (1 - \exp(-x))(1 - \exp(-y))(1 + a \exp(-x - y))$$

Wir haben $a = 1$ gewählt. Der Korrelationskoeffizient von X_1, X_2 ist $1/4$ (siehe Johnson und Kotz (1972), S. 263). Die zensierende Variable besitzt eine $\exp(0.3)$ Verteilung.

Die Simulationen lieferten folgende Graphiken:

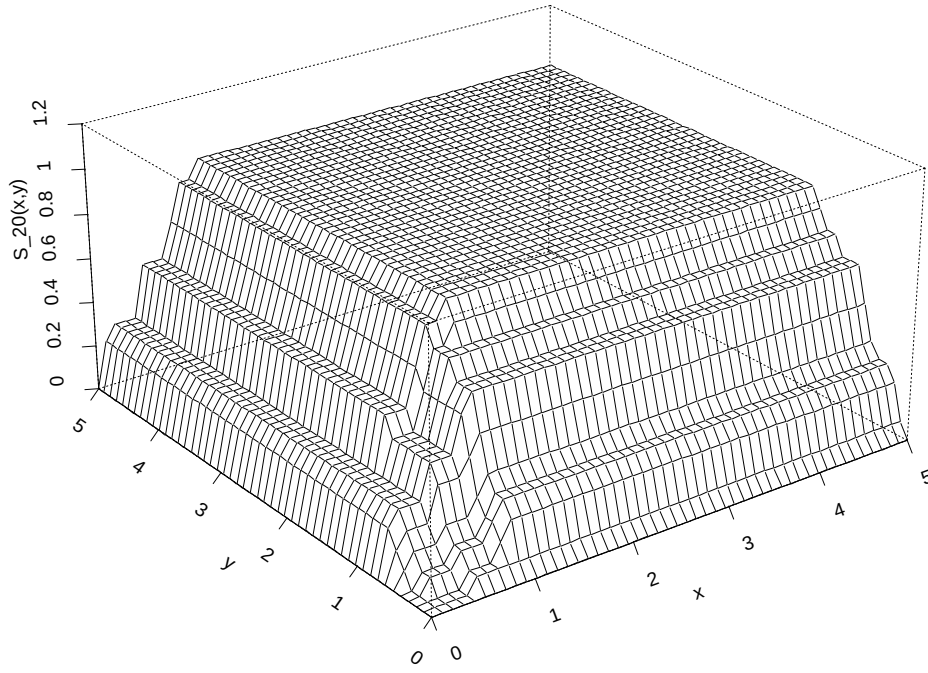


Abbildung 9: $n = 20$, $\delta = 1 : 5$, $\delta = 2 : 3$, $\delta = 3 : 12$

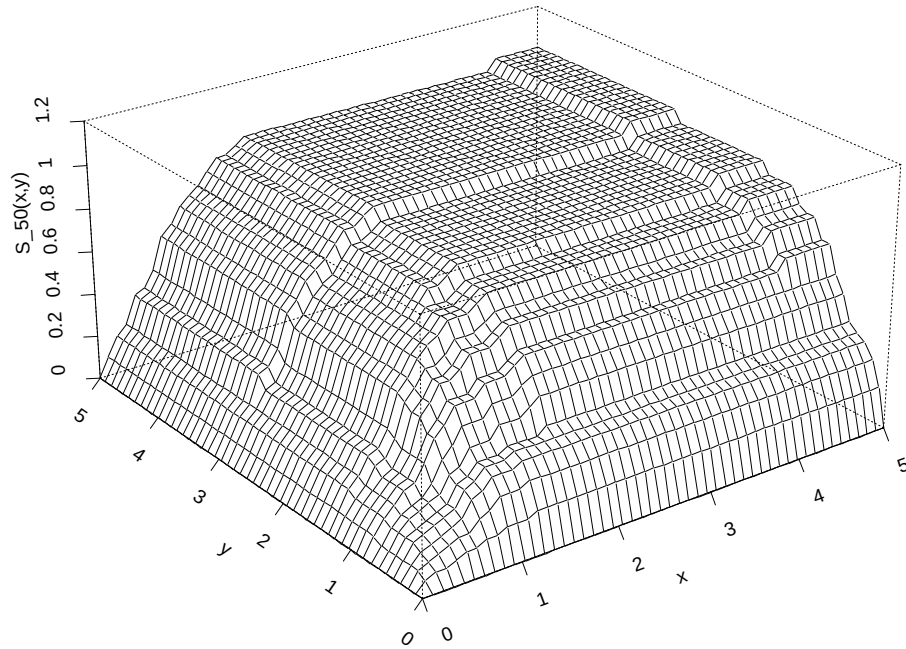


Abbildung 10: $n = 50$, $\delta = 1 : 9$, $\delta = 2 : 4$, $\delta = 3 : 37$

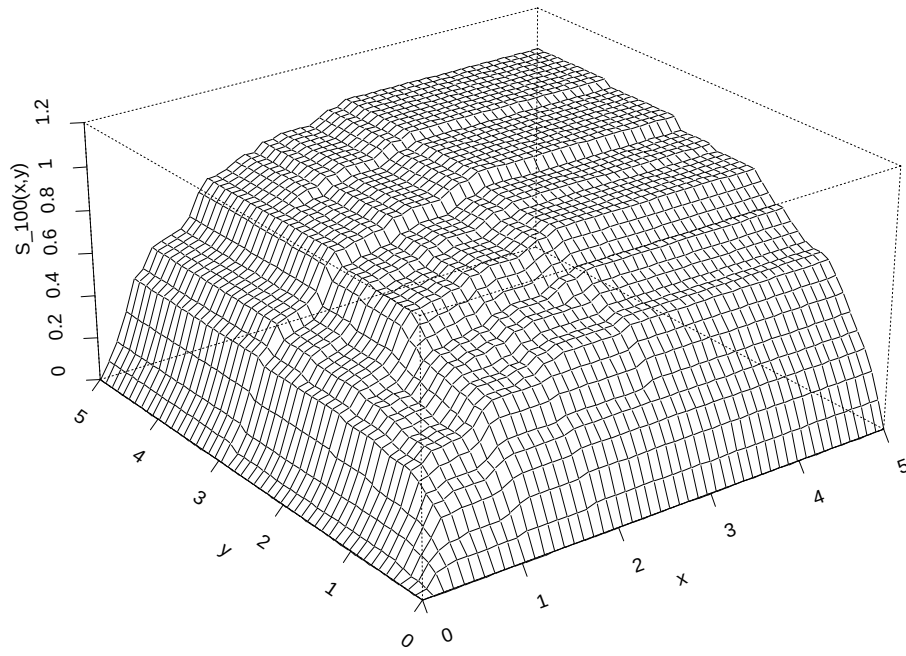


Abbildung 11: $n = 100$, $\delta = 1 : 23$, $\delta = 2 : 13$, $\delta = 3 : 64$

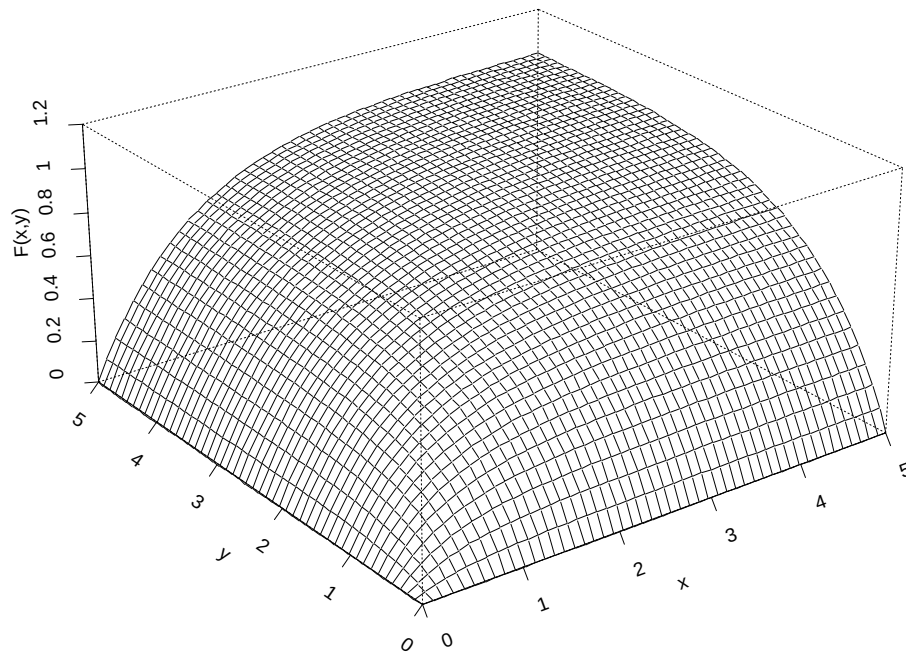


Abbildung 12: Verteilungsfunktion

7.5 Vergleich zwischen S_n und T_n

In den nachfolgenden Tabellen stellen wir die Ergebnisse, die wir bei den vergleichenden Simulationen zwischen S_n und T_n erzielt haben, dar.

Für die verschiedenen Exponentialmodelle haben wir die Schätzer für die Verteilungsfunktion an unterschiedlichen Stellen ausgewertet und jeweils $m = 1000$ Monte-Carlo Simulationen zum Stichprobenumfang $n = 100$ durchgeführt. In den Tabellen halten wir neben dem betrachteten Punkt und dem Wert der Verteilungsfunktion an dieser Stelle die gemittelten Schätzwerte und die geschätzten Werte für Bias und Varianz von S_n und T_n fest. Der Bias von S_n an der Stelle (x, y) , $S_n(x, y)$, wurde dabei geschätzt durch

$$\begin{aligned} B_S(x, y) &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_n^{(i)}(x, y) - F(x, y) \\ &= \overline{S_n^m}(x, y) - F(x, y) \end{aligned}$$

und entsprechend der von $T_n(x, y)$. Für die Varianz von $S_n(x, y)$ haben wir die Schätzung

$$V_S(x, y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (S_n^{(i)}(x, y) - \overline{S_n^m}(x, y))^2$$

verwendet und analog für die Varianz von $T_n(x, y)$.

Die Werte für Bias und Varianz haben wir mit 10^3 multipliziert angegeben.

Für die Exponentialverteilung mit unabhängigen Komponenten ergaben sich folgende Werte (die Parameter wurden wie in Abschnitt 2 gewählt):

(x, y)	F	$\overline{S_n^m}$	$\overline{T_n^m}$	B_S	B_T	V_S	V_T
(0.5, 0.5)	0.155	0.154	0.154	-1.12	-1.16	1.5	1.52
(0.5, 1.0)	0.249	0.248	0.248	-1.04	-1.16	2.39	2.5
(0.5, 2.0)	0.340	0.338	0.338	-2.4	-2.41	3.19	3.74
(0.5, 3.0)	0.374	0.371	0.371	-2.83	-3.11	3.8	4.81
(1.0, 0.5)	0.249	0.246	0.245	-3.09	-3.32	2.3	2.35
(1.0, 1.0)	0.4	0.397	0.397	-2.34	-2.83	3.31	3.62
(1.0, 2.0)	0.547	0.543	0.542	-3.66	-4.09	3.75	5.37
(1.0, 3.0)	0.601	0.597	0.595	-3.52	-5.33	4.13	7.02
(2.0, 0.5)	0.34	0.34	0.338	-0.76	-2.18	3.23	3.24
(2.0, 1.0)	0.547	0.547	0.545	0.9	-1.52	3.88	4.44
(2.0, 2.0)	0.748	0.748	0.744	0.84	-3.24	3.64	7.14
(2.0, 3.0)	0.822	0.824	0.817	2.57	-4.74	3.36	10.07
(3.0, 0.5)	0.374	0.373	0.37	-0.55	-3.87	3.45	3.39
(3.0, 1.0)	0.601	0.601	0.595	0.75	-5.29	4.05	4.59
(3.0, 2.0)	0.822	0.822	0.812	0.57	-9.61	3.14	7.13
(3.0, 3.0)	0.903	0.905	0.889	1.69	-13.69	2.4	10.14

Wir sehen, daß S_n an nahezu allen Punkten einen betragsmäßig kleineren geschätzten Bias und eine kleinere geschätzte Varianz besitzt. Dies war auch bei anderen Simulationsläufen in diesem Modell festzustellen. Insbesondere bei stärkerer Zensierung verdeutlicht sich der Unterschied, da T_n größere Bias- und Varianzwerte lieferte. Auffällig ist auch die Tatsache, daß der Bias von T_n (meist) negativ ist, was auf ein Unterschätzen des wahren Wertes hindeutet.

Im Exponentialverteilungsmodell nach Marshall und Olkin mit denselben Parameterwerten wie in Abschnitt 3 erhielten wir folgendes Resultat:

(x, y)	F	$\overline{S_n^m}$	$\overline{T_n^m}$	B_S	B_T	V_S	V_T
(0.10, 0.10)	0.189	0.191	0.191	2.02	1.93	1.74	1.76
(0.10, 0.25)	0.214	0.216	0.216	1.66	1.54	1.88	1.9
(0.10, 0.50)	0.238	0.239	0.239	1.28	1.14	2.18	2.21
(0.10, 1.00)	0.254	0.255	0.255	0.72	0.55	2.35	2.41
(0.10, 2.00)	0.259	0.26	0.259	0.32	-0.18	2.47	2.56
(0.25, 0.10)	0.214	0.217	0.217	2.44	2.28	1.8	1.82
(0.25, 0.25)	0.423	0.423	0.422	-0.05	-0.66	2.91	3.12
(0.25, 0.50)	0.478	0.48	0.479	1.48	0.7	3.05	3.43
(0.25, 1.00)	0.517	0.518	0.517	1.67	0.34	3.2	3.79
(0.25, 2.00)	0.527	0.529	0.526	1.67	-1.05	3.36	4.03
(0.50, 0.10)	0.238	0.24	0.24	1.96	1.61	1.96	1.97
(0.50, 0.25)	0.478	0.478	0.476	-0.64	-1.8	3.17	3.4
(0.50, 0.50)	0.689	0.687	0.684	-1.64	-5.26	3.31	4.45
(0.50, 1.00)	0.757	0.756	0.751	-1.05	-6.18	3.04	5.35
(0.50, 2.00)	0.776	0.775	0.767	-0.91	-9.16	3.13	5.89
(1.00, 0.10)	0.254	0.257	0.255	1.97	1.02	2.16	2.16
(1.00, 0.25)	0.517	0.518	0.515	1.24	-1.54	3.45	3.63
(1.00, 0.50)	0.757	0.757	0.75	-0.47	-7.38	3.22	4.55
(1.00, 1.00)	0.919	0.918	0.897	-1.19	-21.85	2.05	7.27
(1.00, 2.00)	0.949	0.945	0.919	-3.27	-30.05	1.65	8.31
(2.00, 0.10)	0.259	0.261	0.259	2.23	0.45	2.29	2.24
(2.00, 0.25)	0.527	0.529	0.524	2.17	-2.83	3.62	3.69
(2.00, 0.50)	0.776	0.776	0.765	-0.16	-11.28	3.33	4.55
(2.00, 1.00)	0.949	0.947	0.918	-1.71	-30.49	1.64	7.0
(2.00, 2.00)	0.995	0.985	0.945	-10.58	-50.0	0.69	7.76

Während hier ein Vergleich der Biaswerte nicht eindeutig ausfällt, ist die Varianz von S_n fast durchweg kleiner als die von T_n . Da der Anteil der Varianz am geschätzten mittleren quadratischen Fehler deutlich höher ist als der des quadrierten Bias, ist S_n auch bezüglich des geschätzten mittleren quadratischen Fehlers T_n überlegen. Bemerkenswert ist auch, daß T_n eine recht starke Verzerrung in dem Bereich, in dem $F \geq 0.7$ ist, aufweist. Bei leichtem Erhöhen des Zensierungsgrades fiel das Ergebnis wieder ähnlich eindeutig wie bei dem Modell mit unabhängigen Komponenten aus.

Als letztes haben wir mit den Parameterwerten aus Abschnitt 4 uns exponentialverteilte Zufallsvariablen nach Gumbel erzeugt und einen Vergleich der beiden Schätzer angestellt:

(x, y)	F	$\overline{S_n^m}$	$\overline{T_n^m}$	B_S	B_T	V_S	V_T
(0.5, 0.5)	0.212	0.21	0.21	-1.4	-1.63	1.86	1.88
(0.5, 1.0)	0.304	0.303	0.303	-0.93	-1.41	2.4	2.52
(0.5, 2.0)	0.368	0.367	0.366	-1.05	-1.83	2.89	3.29
(0.5, 3.0)	0.385	0.383	0.383	-1.82	-2.46	3.13	3.81
(0.5, 4.0)	0.391	0.388	0.387	-2.22	-3.40	3.28	3.96
(1.0, 0.5)	0.304	0.302	0.301	-2.1	-2.77	2.39	2.46
(1.0, 1.0)	0.454	0.452	0.45	-2.1	-3.4	2.96	3.32
(1.0, 2.0)	0.574	0.572	0.57	-1.55	-3.71	3.3	4.66
(1.0, 3.0)	0.612	0.609	0.606	-2.57	-5.73	3.73	6.02
(1.0, 4.0)	0.625	0.621	0.616	-3.69	-8.85	3.93	6.3
(2.0, 0.5)	0.368	0.365	0.364	-2.78	-4.48	2.91	3.01
(2.0, 1.0)	0.574	0.572	0.568	-1.99	-5.55	3.74	4.37
(2.0, 2.0)	0.761	0.76	0.753	-1.26	-8.42	3.4	6.69
(2.0, 3.0)	0.827	0.824	0.813	-2.73	-14.3	3.33	9.43
(2.0, 4.0)	0.851	0.846	0.83	-5.07	-20.89	3.22	9.93
(3.0, 0.5)	0.385	0.383	0.38	-1.71	-4.82	3.05	3.11
(3.0, 1.0)	0.612	0.611	0.604	-0.28	-7.5	4.03	4.41
(3.0, 2.0)	0.827	0.829	0.813	1.84	-13.77	3.24	6.86
(3.0, 3.0)	0.905	0.905	0.882	0.22	-23.14	2.69	10.2
(3.0, 4.0)	0.934	0.931	0.902	-3.07	-32.13	2.13	10.73
(4.0, 0.5)	0.391	0.388	0.385	-2.11	-6	3.11	3.12
(4.0, 1.0)	0.625	0.623	0.614	-1.27	-11.16	4.12	4.4
(4.0, 2.0)	0.851	0.852	0.83	0.84	-21.05	3.21	6.66
(4.0, 3.0)	0.934	0.932	0.901	-2.07	-33.11	2.22	9.84
(4.0, 4.0)	0.964	0.958	0.921	-5.98	-43.25	1.56	10.41

S_n liegt gegenüber T_n an allen ausgewerteten Stellen bezüglich des Bias und der Varianz besser. Die Unterschiede sind zum Teil recht beachtlich. Der Effekt der starken Verzerrung von T_n in dem Bereich, in dem $F \geq 0.7$ gilt, ist auch hier festzustellen. Diese Eindrücke bestätigen sich auch bei höherem Zensierungsgrad.

7.6 Vergleich zwischen S_n und dem Schätzer von Lin, Sun und Ying

In diesem Abschnitt vergleichen wir die Simulationsergebnisse von Lin, Sun und Ying (1999) mit denen, die wir für unseren Schätzers erzielt haben. Genau wie im vorigen Abschnitt führen wir dazu an ausgewählten Stellen Monte-Carlo Simulationen durch. Lin, Sun und Ying haben in ihrer Arbeit das Exponentialmodell von Gumbel benutzt und für den Parameter a die Werte 1 und 0 eingesetzt. Mit $a = 0$ sind die Komponenten unabhängig. Die zensierende Variable ist $U[0, 4]$ verteilt, so daß für gut 50% der Daten beide Komponenten unzensiert sind und für ca. 25% der Fall $\delta = 1$ zutrifft. Der Bias wurde wie im letzten Abschnitt geschätzt, und statt der Varianz geben wir diesmal die geschätzte Standardabweichung an. Der Bias ist wieder mit 10^3 multipliziert. Die Werte des Schätzers von Lin, Sun und Ying, den wir mit L_n bezeichnen, haben wir aus ihrer Arbeit übernommen. Die Werte für den Bias fehlen bei ihnen. Es wurden 10.000 Monte-Carlo Simulationen zum Stichprobenumfang 100 durchgeführt.

- $a = 0$:

(x, y)	F	$\overline{S_n^m}$	$\overline{L_n^m}$	B_S	ST_S	ST_L
(0.2231, 0.2231)	0.04	0.04	0.04	-0.128	0.02	0.022
(0.2231, 0.5108)	0.08	0.08	0.08	-0.365	0.028	0.031
(0.2231, 0.9163)	0.12	0.119	0.12	-0.781	0.035	0.036
(0.2231, 1.6094)	0.16	0.16	0.16	-0.367	0.041	0.041
(0.5108, 0.2231)	0.08	0.08	0.08	0.048	0.028	0.031
(0.5108, 0.5108)	0.16	0.16	0.16	0.05	0.039	0.043
(0.5108, 0.9163)	0.24	0.24	0.24	-0.283	0.047	0.05
(0.5108, 1.6094)	0.32	0.32	0.32	-0.065	0.055	0.055
(0.9163, 0.2231)	0.12	0.12	0.12	-0.004	0.035	0.039
(0.9163, 0.5108)	0.24	0.24	0.24	0.219	0.047	0.052
(0.9163, 0.9163)	0.36	0.36	0.36	-0.197	0.054	0.059
(0.9163, 1.6094)	0.48	0.48	0.48	-0.302	0.06	0.063
(1.6094, 0.2231)	0.16	0.16	0.16	0.267	0.041	0.047
(1.6094, 0.5108)	0.32	0.32	0.32	0.279	0.054	0.062
(1.6094, 0.9163)	0.48	0.48	0.481	-0.286	0.06	0.069
(1.6094, 1.6094)	0.64	0.64	0.64	-0.066	0.064	0.071

- $a = 1$:

(x, y)	F	$\overline{S}_n^m$	$\overline{L}_n^m$	B_S	ST_S	ST_L
(0.2231, 0.2231)	0.066	0.066	0.066	0.182	0.026	0.027
(0.2231, 0.5108)	0.118	0.118	0.118	-0.039	0.034	0.034
(0.2231, 0.9163)	0.158	0.158	0.158	-0.107	0.039	0.038
(0.2231, 1.6094)	0.186	0.186	0.185	0.124	0.042	0.04
(0.5108, 0.2231)	0.118	0.118	0.118	-0.141	0.034	0.035
(0.5108, 0.5108)	0.218	0.217	0.218	-0.315	0.044	0.045
(0.5108, 0.9163)	0.298	0.297	0.297	-0.722	0.05	0.05
(0.5108, 1.6094)	0.358	0.358	0.358	-0.28	0.054	0.053
(0.9163, 0.2231)	0.158	0.158	0.158	-0.218	0.039	0.042
(0.9163, 0.5108)	0.298	0.297	0.297	-0.527	0.05	0.053
(0.9163, 0.9163)	0.418	0.417	0.417	-0.647	0.055	0.058
(0.9163, 1.6094)	0.518	0.518	0.518	-0.003	0.06	0.061
(1.6094, 0.2231)	0.186	0.185	0.185	-0.481	0.043	0.048
(1.6094, 0.5108)	0.358	0.358	0.357	-0.588	0.054	0.061
(1.6094, 0.9163)	0.518	0.518	0.517	-0.778	0.06	0.067
(1.6094, 1.6094)	0.666	0.666	0.664	0.155	0.065	0.069

Die Werte der Verteilungsfunktion werden von beiden Schätzern gut angenähert. Im Fall der abhängigen Komponenten ist zu beobachten, daß der Schätzer von Lin, Sun und Ying in dem Bereich, wo $x = 1.6094$ ist und damit mehr Masse von F liegt, etwas schlechtere Werte liefert. Leider gehen sie nur bis zum 67% Niveau und geben auch keine geschätzten Biaswerte an, so daß wir dies nicht näher analysieren können. Beim Vergleich der Standardabweichungen nimmt S_n fast durchgängig kleinere Werte an. Es scheint eine Tendenz zu geben, daß der Unterschied in dem Bereich, wo x größere Werte annimmt, deutlicher wird.

Literatur

- [1] Burke, M. D. (1988). Estimation of a bivariate distribution function under random censorship. *Biometrika* **75** 379-382.
- [2] Campbell, G. und Földes, A. (1982). Large sample properties of nonparametric statistical inference. *Colloquia Mathematica-Societatis, János Bolyai*, Ed. B. V. Gnedenko, M. L. Puri and I. Vincze, pp. 103-122. Amsterdam: North Holland.
- [3] Dabrowska, D. M. (1988). Kaplan-Meier estimate on the plane. *The Annals of Statistics* **16** 1475-1489.
- [4] Devroye, L. (1986). *Non-Uniform Random Variate Generation*. Springer-Verlag, New York.
- [5] Gänssler, P. und Stute, W. (1977). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [6] Johnson, N. L. und Kotz, S. (1972). *Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions*. Wiley, New York.
- [7] Kaplan, E. L. und Meier, P. (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. *Journal of the American Statistical Association* **53** 457-481.
- [8] van der Laan, M. J. (1996). Efficient estimation in the bivariate censoring model and repairing NPMLE. *The Annals of Statistics* **24** 596-627.
- [9] Lin, D. Y., Sun, W. und Ying, Z. (1999). Nonparametric estimation of the gap time distributions for serial events with censored data. *Biometrika* **86** 59-70.
- [10] Lin, D. Y. und Ying, Z. (1993). A simple nonparametric estimator of the bivariate survival function under univariate censoring. *Biometrika* **80** 573-581.
- [11] de la Peña, V. H. und Giné, E. (1999). *Decoupling, From Dependence to Independence*. Springer-Verlag, New York.
- [12] Shorack, G. R. und Wellner, J. A. (1986). *Empirical Processes with Applications to Statistics*. Wiley, New York.
- [13] Stute, W. (1995). The central limit theorem under random censorship. *The Annals of Statistics* **23** 422-439.
- [14] Stute, W. und Wang, J.-L. (2000). The central limit theorem under random truncation. *Preprint*.
- [15] Tsai, W.-Y., Leurgans, S. und Crowley, J. (1986). Nonparametric estimation of a bivariate survival function in the presence of censoring. *The Annals of Statistics* **14** 1351-1365.
- [16] van der Vaart, A. W. und Wellner, J. A. (1996). *Weak Convergence and Empirical Processes*. Springer-Verlag, New York.
- [17] Visser, M. (1996). Nonparametric estimation of the bivariate survival function with an application to vertically transmitted AIDS. *Biometrika* **83** 507-518.

- [18] Wang, W. und Wells, M. T. (1998). Nonparametric estimation of successive duration times under dependent censoring. *Biometrika* **85** 561-572.
- [19] Zhou, M. (1991). Some properties of the Kaplan-Meier estimator for independent nonidentically distributed random variables. *The Annals of Statistics* **19** 2266-2274.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die Arbeit selbständig verfaßt und nur die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Gießen, den 18.06.2002
